Musterlösung zur Prüfung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET), Winter 09,
Prof. Dr. A.-S. Sznitman

1. **a)** Es seien T_1, T_2 und T_3 die Lebensdauern der drei Komponenten in Stunden und

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } T_i > 1, \\ 0, & \text{falls } T_i \leq 1, \end{cases}$$

für $i = 1, 2, 3$. Dann ist

$$N = X_1 + X_2 + X_3,$$

wobei X_1, X_2 und X_3 unabhängig und identisch Bernoulli-verteilt sind mit Parametern $(3, p)$, mit

$$p = P[X_1 = 1] = P[T_1 > 1] = \int_1^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda}.$$

Daher ist

$$E[N] = 3e^{-\lambda}, \quad \mathrm{var}[N] = 3e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}).$$

b)

$$\begin{aligned} P[T_1 > 1 | N \geq 1] &= \frac{P[\{T_1 > 1\} \cap \{N \geq 1\}]}{P[N \geq 1]} \\ &= \frac{P[T_1 > 1]}{1 - P[N = 0]} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1 - (1 - e^{-\lambda})^3} \\ &= \frac{1}{3 - 3e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}}. \end{aligned}$$

c) Es gilt $S = \min(T_1, T_2, T_3)$ und daher für $s \geq 0$,

$$P[S > s] = P[\{T_1 > s\} \cap \{T_2 > s\} \cap \{T_3 > s\}] = P[T_1 > s]^3 = e^{-3\lambda s},$$

somit für die Verteilungsfunktion F_S von S,

$$F_S(s) = P[S \leq s] = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda s}, & \text{für } s \geq 0, \\ 0, & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

Bitte wenden!

Die Dichte f_S von S ist somit

$$f_S(s) = \frac{d}{ds}F_S(s) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda s}, & \text{für } s \geq 0, \\ 0, & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

Weiters ist $T = \max(T_1, T_2, T_3)$. Somit ist die Verteilungsfunktion F_T von T

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P[T \leq t] \\ &= P[\{T_1 \leq t\} \cap \{T_2 \leq t\} \cap \{T_3 \leq t\}] \\ &= P[T_1 \leq t]^3 = (1 - e^{-\lambda t})^3, \text{ für } t \geq 0, \end{aligned}$$

und

$$F_T(t) = 0, \text{ für } t < 0.$$

Die Dichte f_T von T ist daher

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t) = \begin{cases} 3\lambda(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0, \\ 0, & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

2. a) Für $r \geq 0$ sei $D(r)$ die Kreisscheibe mit Zentrum 0 und Radius 1. Dann ist die Dichte von X gleich 0 ausserhalb von $D(1)$ und konstant auf $D(1)$. Da die Fläche von $D(1)$ gleich π ist, ist die Dichte f_X von X gleich

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{für } x \in D(1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir für $0 \leq r \leq 1$,

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P[R \leq r] \\ &= P[X \in D(r)] \\ &= \int_{D(r)} f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{D(r)} dx \\ &= \frac{1}{\pi}r^2\pi \\ &= r^2, \end{aligned}$$

und $F_R(r) = 0$ für $r < 0$ sowie $F_R(r) = 1$ für $r > 1$. Daher ist die Dichte f_R von R gegeben durch

$$f_R(r) = \frac{d}{dr}F_R(r) = \begin{cases} 2r, & \text{für } r \in (0,1), \\ 0, & \text{für } r \in \mathbb{R} \setminus (0,1). \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Daraus folgt

$$E[R] = \int_0^1 r 2r\, dr = 2\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) Es gilt

$$A = S^2\pi.$$

Für die Verteilungsfunktion F_A von A und $a \geq 0$ erhalten wir damit

$$F_A(a) = P[S^2\pi \leq a] = P[S \leq \sqrt{a/\pi}] = \int_0^{\min(\sqrt{a/\pi},1)} 2sds = \min\left(\frac{a}{\pi}, 1\right),$$

während für $a < 0$ gilt $F_A(a) = 0$. Damit berechnen wir die Dichte f_A von a als

$$f_A(a) = \frac{d}{da}F_A(a) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{für } 0 < a < \pi \\ 0, & \text{für } a \in \mathbb{R} \setminus (0,\pi). \end{cases}$$

Schliesslich ist

$$E[A] = \int_0^\pi a\frac{1}{\pi}da = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^2}{2}\right)_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

c) Um die Varianz zu berechnen, betrachten wir zunächst

$$E[A^2] = \int_0^\pi a^2\frac{1}{\pi}da = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^3}{3}\right)_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\text{var}[A] = E[A^2] - E[A]^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Für die beste lineare Prognose benötigen wir noch die Kovarianz von S und A. Zu diesem Zweck berechnen wir

$$E[SA] = E[S^3\pi] = \pi\int_0^1 s^3 2sds = 2\pi\left(\frac{s^5}{5}\right)_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Daraus folgt mit $E[S] = 2/3$ (siehe a)) und $E[A] = \pi/2$ (siehe b)),

$$\text{cov}[S,A] = E[SA] - E[S]E[A] = \frac{2\pi}{5} - \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{15}.$$

Die beste lineare Prognose Z von S durch A ist

$$Z = \frac{\text{cov}[S,A]}{\text{var}[A]}(A - E[A]) + E[S] = \frac{4}{5\pi}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}.$$

Bitte wenden!

3. a) Die Zufallsvariable $C : \Omega \to \{1, 2\}$ bezeichne den gewählten Chip, sowie X die Anzahl der defekten Stellen auf dem gewählten Chip. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, verwenden wir die Bayes-Formel:

$$P[C = 1|X = 2] = \frac{P[X = 2|C = 1]P[C = 1]}{P[X = 2]}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
P[C = 1] &= \frac{1}{2},\\
P[X = 2|C = 1] &= P[X_1 = 2] = \frac{\lambda_1^2}{2}e^{-\lambda_1}, \text{ sowie}\\
P[X = 2] &= P[X = 2|C = 1]P[C = 1] + P[X = 2|C = 2]P[C = 2]\\
&= \frac{\lambda_1^2}{2}e^{-\lambda_1}\frac{1}{2} + \frac{\lambda_2^2}{2}e^{-\lambda_2}\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in obige Formel ein, so erhalten wir

$$P[C = 1|X = 2] = \frac{\lambda_1^2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1^2 e^{-\lambda_1} + \lambda_2^2 e^{-\lambda_2}}.$$

b)

$$\begin{aligned}
k!P[N = k] &= k!\sum_{i=0}^{k} P[\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k - i\}]\\
&= k!\sum_{i=0}^{k} P[X_1 = i]P[X_2 = k - i]\\
&= k!\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^k.
\end{aligned}$$

Daher ist N Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

c)

$$\begin{aligned}
E[X_1(X_1 - 1)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{\lambda_1^n}{n!}e^{-\lambda_1}\\
&= \lambda_1^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_1^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda_1}\\
&= \lambda_1^2,
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

da $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$, für $\lambda \in \mathbb{R}$. Ähnlich erhalten wir

$$E[X_1] = \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1} = \lambda_1,$$

und schliesslich

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[X_1] &= E[X_1^2] - E[X_1]^2 \\
&= E[X_1(X_1-1)] + E[X_1] - E[X_1]^2 \\
&= \lambda_1^2 + \lambda_1 - \lambda_1^2 \\
&= \lambda_1.
\end{aligned}$$