1. (11 Punkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{falls } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei f_X tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt. (3 Punkte)

Lösung:

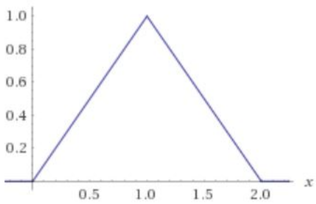
Wir müssen zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Zusätzlich ist $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $f_X(x)$ tatsächlich eine Dichtefunktion.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f_X. (2 Punkte)

Lösung:



c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X. (3 Punkte)

Lösung:

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = \frac{7}{6}$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$

Bitte wenden!

d) Wie muss eine Konstante $a > 0$ gewählt werden, damit $\mathbb{P}[a-1 \leq X \leq a] = \frac{1}{2}$ ist? (3 Punkte)

Lösung:

Grafisch:
Wir bestimmen a durch das Ablesen des Flächeninhaltes unterhalb des Graphen von $f_X(x)$. Im Intervall $[0,1)$ und $[1,2)$ erhalten wir zwei flächenmässig gleichgrosse Dreiecke mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}$, und somit ist $a \in \{1,2\}$.

Algebraisch:
Angenommen $a \in [1,2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[a-1 \leq X \leq a] = F_X(a) - F_X((a-1)^-) = \int_{a-1}^{a} f_X(x)dx &= \int_{a-1}^{1} xdx + \int_{1}^{a} (2-x)dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} + 2a - \frac{a^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -a^2 + 3a - \frac{3}{2} \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{2} &= -a^2 + 3a - \frac{3}{2} \\
\Rightarrow \quad a &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \quad \Rightarrow \quad a \in \{1,2\}
\end{aligned}$$

Die anderen Fälle sind ähnlich, geben aber keine zustätzlichen Lösungen.

Siehe nächstes Blatt!

2. (6 Punkte)

Betrachten Sie die Zufallsvariable (X, Y) mit Werten in $\mathbb{R}^2$, deren gemeinsame Dichte gegeben ist durch:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{1-x\cdot y} & \text{falls } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y. Sind X und Y unabhängig? (3 Punkte)

Lösung:

Randdichte f_X: Im Intervall $[0, 1]$ gilt

$$f_X(x) = ex \cdot \int_0^1 e^{-xy} dy = ex \left(\frac{-1}{x}\right) \left[e^{-xy}\right]_{y=0}^1 = e(1 - e^{-x}),$$

wobei $f_X(x) = 0$ für $x \notin [0, 1]$.

Randdichte f_Y: Im Intervall $[0, 1]$ gilt

$$f_Y(y) = e \int_0^1 xe^{-xy} dx = \frac{e}{y^2}(1 - ye^{-y} - e^{-y}),$$

wobei $f_Y(y) = 0$ für $y \notin [0, 1]$.

Es gilt $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y)$, folglich sind X und Y nicht unabhängig.

b) Berechnen Sie

- den Erwartungswert von X (1.5 Punkte)

  Lösung:

  $\mathbb{E}[X] = e \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 e^{-xy} dy\right) dx = e \int_0^1 (-xe^{-x} + x) dx = e\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{e}{2}.$

- den Erwartungswert von $\frac{Y}{X}$. (1.5 Punkte)

  Lösung:

  $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X}\right] \overset{\text{Einsetzen}}{=} \int_0^1 \int_0^1 ye^{1-xy} dydx \overset{\text{Symmetrie}}{=} \int_0^1 \int_0^1 xe^{1-xy} dydx \overset{\text{Dichtefunktion}}{=} 1.$

  Alternative:

  $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X}\right] \overset{\text{Einsetzen}}{=} \int_0^1 \int_0^1 ye^{1-xy} dxdy = \int_0^1 \left[-e^{1-xy}\right]_{y=0}^1 dy = \int_0^1 e - e^{1-y} dy = 1$

Bitte wenden!

3. (6 Punkte)

Bei einem Würfelspiel werden zwei Würfel geworfen, beschrieben durch ein Laplace-Modell mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, wobei ein Element daraus mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ bezeichnet wird. Damit man am Spiel teilnimmt, muss man x CHF Einsatz bereitstellen. Ist die Summe der Augenzahlen grösser oder gleich 10, bekommt man diese Augenzahlsumme in CHF ausgezahlt, ansonsten verliert man den gesamten Einsatz von x CHF. Der tatsächliche Gewinn (oder Verlust) wird durch die folgende Zufallsvariable modelliert:

$$G(\omega) = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 - x, & \text{falls } \omega_1 + \omega_2 \geq 10, \\ -x, & \text{falls } \omega_1 + \omega_2 < 10. \end{cases}$$

a) Welche Werte kann G in Abhängigkeit von x annehmen? Wir bezeichnen diese Menge an Werten mit T. (2 Punkte)

Lösung:

$T = \{10 - x,\ 11 - x,\ 12 - x,\ -x\}$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[G = t]$ für alle möglichen Werte $t \in T$. (2 Punkte)

Lösung:

Um die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, betrachtet man die Summe der beiden Würfelwürfe und die Häufigkeit davon:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Folglich gilt

$$\mathbb{P}[G = 10 - x] = \frac{3}{36},\ \mathbb{P}[G = 11 - x] = \frac{2}{36},\ \mathbb{P}[G = 12 - x] = \frac{1}{36},\ \mathbb{P}[G = -x] = \frac{30}{36}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Wie hoch muss der Einsatz x sein, damit das Spiel fair ist? (2 Punkte)

Lösung:

Fair heisst, dass der Erwartungswert des Spieles gleich 0 ist, weil dadurch die Person, die am Spiel teilnimmt und die Person, die das Spiel anbietet, keinen Vorteil der jeweils anderen Person gegenüber hat.

$0 \overset{!}{=} \mathbb{E}[G] = \frac{3}{36}(10 - x) + \frac{2}{36}(11 - x) + \frac{1}{36}(12 - x) + \frac{30}{36}(-x) \Rightarrow x = \frac{16}{9}.$

4. (7 Punkte)

Auf einem quadratischen Flächenstück regnet es 10 Minuten lang. Sei X die Anzahl an Tropfen, die in der ersten Minute in das Flächenstück fällt und Y die Anzahl an Tropfen, die in den darauffolgenden Minuten fällt. Beide Zufallsvariablen sind unabhängig und Possion-verteilt mit jeweilgen Parametern λ und 9λ, wobei $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie **rechnerisch** die Verteilung der Gesamtmenge an Tropfen $Z = X + Y$. (3 Punkte)

Lösung:

Es gilt ganz allgemein für $X \sim \mathcal{P}oi(\lambda)$ und $Y \sim \mathcal{P}oi(\mu)$ unabhängig, dass für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
P[X+Y=k] &= \sum_{i=0}^{k} P[X+Y=k, X=i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} P[Y=k-i, X=i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} P[Y=k-i]P[X=i] \quad \text{(unabhängig)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\mu^{k-i}\lambda^i \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu^{k-i}\lambda^i \\
&= \frac{(\mu+\lambda)^k}{k!}\cdot e^{-(\mu+\lambda)}
\end{aligned}$$

gilt.

Folglich ist $Z = X + Y \sim \mathcal{P}oi(\mu + \lambda)$. In unserem Beispiel heisst das, dass Z Possion-Verteilt ist mit Parameter $\lambda + 9\lambda = 10\lambda$.

b) Sind X und Z unabhängig? (2 Punkte)

Lösung:

Lösungsweg 1:

Siehe nächstes Blatt!

Wir müssen verifizieren, ob $\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z]$ gilt.

Hierfür schreiben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XZ] &= \mathbb{E}[X(X+Y)] \\
&= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[XY] \\
&= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad \text{(unabhängig)} \\
&= Var(X) + \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \lambda + \lambda^2 + 9\lambda^2 \\
&\neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] = 10\lambda^2
\end{aligned}$$

Es gilt also, dass X und Z nicht unabhängig sind.

Lösungsweg 2:
Wir müssen verifizieren, ob $\mathbb{P}[X = k, Z = j] = \mathbb{P}[X = k] \cdot \mathbb{P}[Z = j]$ gilt $\forall k, j \in \mathbb{Z}$.

Hierfür schreiben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = k, Z = j] &= \mathbb{P}[X = k, Y = j-k] \\
&= \mathbb{P}[X = k] \cdot \mathbb{P}[Y = j-k] \quad \text{(unabhängig)} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(9\lambda)^{j-k}}{(j-k)!} e^{-9\lambda} \\
&\neq \mathbb{P}[X = k] \cdot \mathbb{P}[Z = j] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^j}{j!} e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

Oder man kann auch direkt bemerken, dass gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = 1, Z = 0] &= 0 \\
&\neq \mathbb{P}[X = 1] \cdot \mathbb{P}[Z = 0] = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

Es gilt also, dass X und Z nicht unabhängig sind.

Lösungsweg 3:
Wir müssen verifizieren, ob $\mathbb{P}[Z = j | X = k] = \mathbb{P}[Z = j]$ gilt $\forall k, j \in \mathbb{Z}$.

Hierfür schreiben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z = j | X = k] &= \mathbb{P}[Y = j-k | X = k] \\
&= \mathbb{P}[Y = j-k] \quad \text{(unabhängig)} \\
&= \frac{(9\lambda)^{j-k}}{(j-k)!} e^{-9\lambda} \\
&\neq \mathbb{P}[Z = j] = \frac{(10\lambda)^j}{j!} e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Oder man kann auch direkt bemerken, dass gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z=0|X=1] &= 0\\ &\neq \mathbb{P}[Z=0]=e^{-10\lambda}\\ \text{(wobei } \mathbb{P}[X=1] &\neq 0 \text{ ist)}\end{aligned}$$

Es gilt also, dass X und Z nicht unabhängig sind.

c) Nehmen Sie an, es fallen insgesamt 100 Tropfen. Geben Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit an, dass k Tropfen ($0 \leq k \leq 100$) in der ersten Minute fallen. (2 Punkte)

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=k|Z=100] &= \frac{\mathbb{P}[\{X=k\}\cap\{Y=100-k\}]}{\mathbb{P}[Z=100]}\\ &= \frac{\mathbb{P}[X=k]\mathbb{P}[Y=100-k]}{\mathbb{P}[Z=100]}\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\frac{(9\lambda)^{(100-k)}}{(100-k)!}e^{-9\lambda}\cdot\frac{100!}{(10\lambda)^{100}}e^{10\lambda}\\ &= \binom{100}{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\\ &\sim Bin\left(100,\frac{1}{10}\right)\end{aligned}$$

Hinweis: Für eine Zufallsvariable N, die Poisson-verteilt ist mit Parameter $\mu > 0$, gilt

$$\mathbb{P}[N=k]=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

für alle ganzzahligen $k \geq 0$.