1. (11 Punkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{falls } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei f_X tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f_X.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Wie muss eine Konstante $a > 0$ gewählt werden, damit $\mathbb{P}[a - 1 \leq X \leq a] = \frac{1}{2}$ ist?

2. (6 Punkte)

Betrachten Sie die Zufallsvariable (X, Y) mit Werten in $\mathbb{R}^2$, deren gemeinsame Dichte gegeben ist durch:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xe^{1-x\cdot y} & \text{falls } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y. Sind X und Y unabhängig?

b) Berechnen Sie

- den Erwartungswert von X,
- den Erwartungswert von $\frac{Y}{X}$.

Bitte wenden!

3. (6 Punkte)

Bei einem Würfelspiel werden zwei Würfel geworfen, beschrieben durch ein Laplace-Modell mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, wobei ein Element daraus mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ bezeichnet wird. Damit man am Spiel teilnimmt, muss man x CHF Einsatz bereitstellen. Ist die Summe der Augenzahlen grösser oder gleich 10, bekommt man diese Augenzahlsumme in CHF ausgezahlt, ansonsten verliert man den gesamten Einsatz von x CHF. Der tatsächliche Gewinn (oder Verlust) wird durch die folgende Zufallsvariable modelliert:

$$G(\omega) = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 - x, & \text{falls } \omega_1 + \omega_2 \geq 10, \\ -x, & \text{falls } \omega_1 + \omega_2 < 10. \end{cases}$$

a) Welche Werte kann G in Abhängigkeit von x annehmen? Wir bezeichnen diese Menge an Werten mit T.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[G = t]$ für alle möglichen Werte $t \in T$.

c) Wie hoch muss der Einsatz x sein, damit das Spiel fair ist?

4. (7 Punkte)

Auf einem quadratischen Flächenstück regnet es 10 Minuten lang. Sei X die Anzahl an Tropfen, die in der ersten Minute in das Flächenstück fällt und Y die Anzahl an Tropfen, die in den darauffolgenden Minuten fällt. Beide Zufallsvariablen sind unabhängig und Possion-verteilt mit jeweilgen Parametern λ und 9λ, wobei $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie **rechnerisch** die Verteilung der Gesamtmenge an Tropfen $Z = X + Y$.

b) Sind X und Z unabhängig?

c) Nehmen Sie an, es fallen insgesamt 100 Tropfen. Geben Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit an, dass k Tropfen ($0 \leq k \leq 100$) in der ersten Minute fallen.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable N, die Poisson-verteilt ist mit Parameter $\mu > 0$, gilt

$$\mathbb{P}[N = k] = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

für alle ganzzahligen $k \geq 0$.