Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
D-ITET
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1.

(a) Es gilt

$$1 = \int_0^1 c \cdot x^2(1-x)\,dx = c/12$$

und daher $c = 12$.

(b) Es gilt natürlich $F_X(x) = 0$ für $x < 0$ und $F_X(x) = 1$ wann immer $x > 1$ **(1 Punkt)**. Betrachten wir also $x \in [0,1]$. Dann ist

$$F_X(x) = \int_0^x 12 \cdot t^2(1-t)\,dt = 12 \cdot (x^3/3 - x^4/4)\ .$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 2/3 \mid X > 1/3) &= \frac{\mathbb{P}(X > 2/3)}{\mathbb{P}(X > 1/3)} = \frac{1 - F_X(2/3)}{1 - F_X(1/3)} \\ &= \frac{1 - 12((2/3)^3/3 - (2/3)^4/4)}{1 - 12((1/3)^3/3 - (1/3)^4/4)} = \frac{11}{24}\ .\end{aligned}$$

(d) Es gilt für $n \geq 1$,

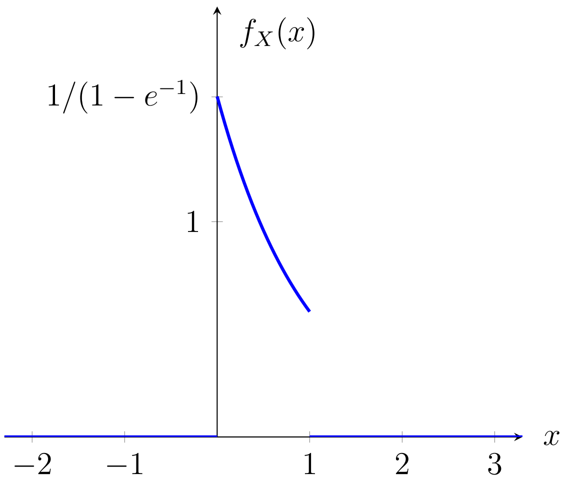
$$\mathbb{E}(X^n) = 12 \int_0^1 x^n \cdot x^2(1-x)\,dx = 12\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{12}{(n+3)(n+4)}\ .$$

(e) Es ist

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}\ .$$

Aufgabe 2.

(a) Wir haben den folgenden Graph



(b) Natürlich $F_X(x) = 0$ falls $x < 0$ und $F_X(x) = 1$ für $x > 1$ **(1 Punkt)**. Nehmen wir also $x \in [0,1]$ an. Dann ist

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \ .$$

(c) Die Aussage ist klar für $x \notin [0,1]$ **(0 Punkte)**. Sei also $x \in [0,1]$. Da $\mathbb{P}(E \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$ für $y > 0$ gilt, folgt

$$\mathbb{P}(E \leq x \mid E \leq 1) = \frac{\mathbb{P}(E \leq x, E \leq 1)}{\mathbb{P}(E \leq 1)} = \frac{\mathbb{P}(E \leq x)}{\mathbb{P}(E \leq 1)} = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} = F_X(x) \ .$$

(d) Wir schreiben

$$\begin{aligned}\{N \le y\} &= \{N \le y, B = 0\} \cup \{N \le y, B = 1\} \\ &= \{X \le y, B = 0\} \cup \{1 + E \le y, B = 1\} \; .\end{aligned}$$

Aufgrund von Disjunktheit und Unabhängigkeit folgt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \le y) &= \mathbb{P}(X \le y, B = 0) + \mathbb{P}(1 + E \le y, B = 1) \\ &= (1-p)\mathbb{P}(X \le y) + p\mathbb{P}(E \le y - 1) \; .\end{aligned}$$

Falls $y \le 0$ gilt natürlich $F_N(y) = 0$. Ferner

$$F_N(y) = (1-p)\mathbb{P}(X \le y) = \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}}\,(1 - e^{-\lambda y}) \quad \text{für } y \in (0,1) \; ,$$

$$F_N(y) = 1 - p + p\,\mathbb{P}(E \le y - 1) = 1 - p + p\,(1 - e^{\lambda(1-y)}) \quad \text{für } y \ge 1 \; .$$

(e) Wir benötigen, dass

$$\begin{aligned}\frac{1-p}{1-e^{-\lambda}}\,(1 - e^{-\lambda y}) &= 1 - e^{-\lambda y} \quad \text{für } y \in (0,1) \; , \\ 1 - p + p\,(1 - e^{\lambda(1-y)}) &= 1 - e^{-\lambda y} \quad \text{für } y \ge 1 \; .\end{aligned}$$

Dies gilt genau dann wenn

$$p = e^{-\lambda} \; .$$

Aufgabe 3.

(a) Es gilt aufgrund der Unabhängigkeit von X und Y, dass

$$\mathbb{P}(A = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p(1 - q) + q(1 - p)$$
$$\mathbb{P}(B = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = pq \ .$$

Somit

$$\mathbb{P}(A = 0) = pq + (1 - p)(1 - q) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(B = 0) = 1 - pq \ .$$

(b) Wir haben

$$\mathbb{P}(A = 1 \mid B = 0) = \frac{\mathbb{P}(A = 1, B = 0)}{\mathbb{P}(B = 0)} = \frac{\mathbb{P}(A = 1)}{\mathbb{P}(B = 0)} = \frac{p(1 - q) + q(1 - p)}{1 - pq} \ .$$

(c) Falls $A = 1$, und $C = a_{\texttt{AND}}(Y, A) = 0$ so folgt $Y = 0$ und daher $X = 1$ (und diese Werte genügen den Aussagen). Also

$$\mathbb{P}(A = 1, C = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p(1 - q) \ .$$

(d) Es ist $\mathbb{P}(A = 0, C = 1) = 0$, da $A = 0$ immer $C = 1$ impliziert. Jedoch ist $\mathbb{P}(A = 0) > 0$ und

$$\mathbb{P}(C = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, A = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = 0) = q(1 - p) > 0 \ .$$

Ende!