Prof. Dr. V. Tassion

ETH Zürich – Winter 2021

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
D-ITET

Bitte ausfüllen!

Name	
Vorname	
Leginummer	
Datum	2. Februar 2021
Zeit	11:00 – 12:30 Uhr

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		

Punktesumme	
Kontrolle	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

- **Bitte ...**
  - Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
  - Tragen Sie Ihre Daten in das Deckblatt ein.
  - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
  - Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
  - Verwenden Sie keinen Tipp-Ex oder Ähnliches.
  - Verwenden Sie keinen roten oder grünen Stift und keinen Bleistift.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter und kein Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
D-ITET

Aufgabe 1 (8 Punkte). Wir betrachten die Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^2(1-x) & : x \in (0,1) \ , \\ 0 & : \text{sonst} \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsvariable X.

(c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 2/3 \mid X > 1/3)$.

(d) Für jedes $n \geq 1$, berechnen Sie $\mathbb{E}(X^n)$.

(e) Berechnen Sie die Varianz von X.

Aufgabe 2 (12 Punkte). Sei $\lambda > 0$ und X sei eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \cdot e^{-\lambda x} & : x \in (0,1) \ , \\ 0 & : \text{sonst} \ . \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Graph von f_X wenn $\lambda = 1$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

Sei nun $p \in (0,1)$. Ferner sei E exponentialverteilt mit Parameter λ und B sei Bernoulliverteilt mit Parameter p. Wir nehmen an, dass X, E und B unabhängig sind.

(c) Zeigen Sie, dass $F_X(x) = \mathbb{P}(E \leq x \mid E \leq 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(d) Wir definieren $N = B(1+E) + (1-B)X$. Beweisen Sie, dass die Verteilungsfunktion von N durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$F_N(y) = \begin{cases} 0 & : y \leq 0 \ , \\ \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}} \left(1 - e^{-\lambda y}\right) & : y \in (0,1) \ , \\ p(1 - e^{\lambda(1-y)}) + 1 - p & : y \geq 1 \ . \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\{N \leq y\} = \{X \leq y, B = 0\} \cup \{1 + E \leq y, B = 1\}$.

(e) Für welche Paare von Parametern (λ, p) ist N exponentialverteilt mit Parameter λ?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (10 Punkte). Das Thema dieser Aufgabe sind Boolesche Schaltkreise. Wir erinnern an die Definitionen der XOR und AND Operationen: $a_{\texttt{XOR}}, a_{\texttt{AND}} \colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ sind definiert durch

$$a_{\texttt{XOR}}(x,y) = \begin{cases} 1 & : (x,y) = (1,0) \text{ oder } (x,y) = (0,1)\ , \\ 0 & : \text{sonst}\ , \end{cases}$$

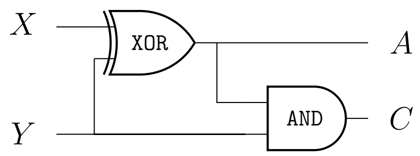
$$a_{\texttt{AND}}(x,y) = \begin{cases} 1 & : (x,y) = (1,1)\ , \\ 0 & : \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Es seien $p, q \in (0,1)$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X und Y. X ist Bernoulliverteilt mit Parameter p und Y ist Bernoulliverteilt mit Parameter q.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $A = a_{\texttt{XOR}}(X,Y)$ und die Verteilung von $B = a_{\texttt{AND}}(X,Y)$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A = 1 \mid B = 0)$.

(c) Wir definieren Zufallsvariablen A und C durch folgenden Booleschen Schaltkreis:



Dies lässt sich als $A = a_{\texttt{XOR}}(X,Y)$ und $C = a_{\texttt{AND}}(Y, a_{\texttt{XOR}}(X,Y))$ schreiben. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A = 1, C = 0)$.

(d) Zeigen Sie, dass A und C nicht unabhängig sind.

Ende der Prüfung!