D–MATH

Prüfung Wahrscheinlichkeit & Statistik

401-2604-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Teil I: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. [**6 Punkte**]

Vier Personen werfen eine nach der anderen eine faire Münze. Wir nehmen an, dass die vier Münzwürfe unabhängig voneinander sind.

(a) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit genau einmal “Kopf” zu erhalten.

(b) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit genau zweimal “Zahl” zu erhalten.

(c) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal “Zahl” zu erhalten.

2. [**9 Punkte**]

Ein Gebäude hat drei Stockwerke. Drei Personen gehen hinein und laufen auf eines dieser Stockwerke. Sei Ω der Grundraum, also die Menge aller möglichen Elementarereignisse, die beschreiben, welche Person auf welches Stockwerk läuft.

(a) [**1 Punkt**]
Beschreiben Sie, was ein Laplace Modell ist.

(b) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ für $\omega \in \Omega$ unter der Annahme eines Laplace Modells.

(c) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Personen auf dasselbe Stockwerk laufen.

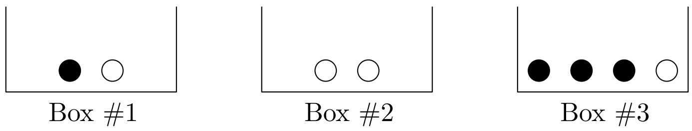
(d) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Personen auf genau zwei verschiedene Stockwerke laufen.

(e) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Personen alle auf verschiedene Stockwerke laufen.

3. [**7 Punkte**]

Betrachten Sie drei Boxen wie folgt:

- Box #1 enthält eine schwarze und eine weisse Kugel;
- Box #2 enthält zwei weisse Kugeln;
- Box #1 enthält drei schwarze und eine weisse Kugel.



Zuerst wählen wir zufällig eine Box aus und ziehen dann eine Kugel aus dieser Box. Von der gewählten Box wird jede der Kugeln mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen. Sei $W = \{$Die gezogene Kugel ist weiss$\}$.

(a) [**2 Punkte**]
Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass die Boxen alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben gewählt zu werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses W.

(b) [**2 Punkte**]
Nun nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(\{\text{Box \#1 wird gewählt}\}) = \mathbb{P}(\{\text{Box \#2 wird gewählt}\}) = 1/4$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel schwarz ist.

(c) [**3 Punkte**]
Wir nehmen wieder an, dass die Boxen alle mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden. Gegeben, dass die gezogene Kugel weiss ist, was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sie von Box #2 gezogen wurde?

4. [**6 Punkte**]

Betrachten Sie ein Quadrat mit einer zufälligen Seitenlänge X. Wir nehmen an, $X \sim \mathcal{U}([0, a])$ ist uniform verteilt für ein $a > 0$. Sei A die Fläche des Quadrats.

(a) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[A]$ und die Varianz $\mathbb{V}(A)$.

(b) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion von A.

(c) [**2 Punkte**]
Bestimmen Sie alle $a > 0$, sodass $\mathbb{P}(A > 1) \geq 1/2$.

5. [**8 Punkte**]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim$ Pois(λ) für ein $\lambda > 0$.

(a) [**1 Punkt**]
Definieren Sie Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

(b) [**2 Punkte**]
Zeigen Sie mit Chebyshevs Ungleichung, dass $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ wenn $n \to \infty$.

(c) [**2 Punkte**]
Schreiben Sie den zentralen Grenzwertsatz für die Zufallsvariable $\bar{X}_n$ auf.

(d) [**3 Punkte**]
Nehmen Sie an, ein Hotel hat 100 Tage im Jahr geöffnet. Für $i \in \{1, \ldots, 100\}$ sei $X_i =$ die Anzahl Personen, die das Hotel am Tag $\#i$ empfängt. Unter der Annahme, dass $X_1, \ldots, X_{100}$ i.i.d. $\sim$ Pois(9) sind, finden Sie eine Approximation von

$$\mathbb{P}\left(840 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 960\right).$$

Sie dürfen Folgendes benutzen: $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(3/2) \approx 0.93$, und $\Phi(2) \approx 0.97$, wobei $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx$ für $z \in \mathbb{R}$.

Teil II: Statistik

6. [**9 Punkte**]

Betrachten Sie das parametrische Modell $\mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in (0, \infty)\}$, wobei P_θ die folgende Dichte hat:

$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}\mathbb{1}_{x\in[0,1]}.$$

(a) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta[X]$, wobei $X \sim P_\theta$.

(b) [**2 Punkte**]
Konstruieren Sie dem Momentenschätzer von θ_0 basierend auf i.i.d. $X_1, \ldots, X_n \sim P_{\theta_0}$.

(c) [**2 Punkte**]
Unter Benutzung angemessener Sätze, zeigen Sie, dass der Momentenschätzer aus Aufgabe (b) in Wahrscheinlichkeit gegen θ_0 konvergiert.

(d) [**3 Punkte**]
Für $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ und $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$, schreiben Sie die Log-likelihood Funktion $l_{\mathbb{X}}(\theta)$ für $\theta \in (0, \infty)$ auf und finden Sie den MLS. (Sie können annehmen, dass $X_i \in (0, 1)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.)

7. [**6 Punkte**]

Betrachten Sie die uniforme Verteilung $\mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ für $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) [**1 Punkt**]
Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}_\theta[X]$ für $X \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ (benutzen Sie hierfür nicht die Formelsammlung).

(b) [**1 Punkt**]
Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}_\theta(X)$ für $X \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ (benutzen Sie hierfür nicht die Formelsammlung).

(c) [**2 Punkte**]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}([\theta_0, \theta_0 + 1])$. Schreiben Sie den zentralen Grenzwertsatz für $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ auf.

(d) [**2 Punkte**]
Basierend auf Aufgabe (c), konstruieren Sie ein bilaterales und symmetrisches Konfidenzinterval für θ_0 mit asymptotischen Niveau $1 - \alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$.

8. [**8 Punkte**]

Betrachten Sie die Dichtefunktion

$$f_\theta(x) = \frac{c}{x^3}\mathbb{1}_{\{x\geq\theta\}}$$

mit $\theta \in (0, \infty)$ und $c > 0$.

(a) [**1 Punkte**]
Bestimmen Sie $c > 0$ als Funktion von θ.

(b) [**2 Punkte**]
Sei $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim f_{\theta_0}$ sind. Schreiben Sie die Likelihood Funktion $L_{\mathbb{X}}(\theta)$ auf und zeigen Sie, dass $\min_{1\leq i\leq n} X_i$ der MLS ist.

(c) [**3 Punkte**]
Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion von $\min_{1\leq i\leq n} X_i$, wobei wieder $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim f_{\theta_0}$ sind.

(d) [**2 Punkte**]
Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, berechnen Sie $\mathbb{P}(|\min_{1\leq i\leq n} X_i - \theta_0| > \varepsilon)$ und schliessen Sie, dass der MLS in Wahrscheinlichkeit gegen θ_0 konvergiert wenn $n \to \infty$.

9. [**9 Punkte**]

Betrachten Sie $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$, wobei $\sigma_0 > 0$ bekannt ist und $\theta \in \mathbb{R}$. Wir wollen $H_0\colon \theta = 0$ gegen $H_1\colon \theta = 1$ testen. $(\star)$

(a) [**2 Punkte**]
Definieren Sie den Neyman-Pearson Test mit Niveau α zum Testen einer einfachen Hypothese $H_0\colon p = p_0$ gegen eine einfache Alternativhypothese $H_1\colon p = p_1$, wobei p die Dichte einer beobachteten Stichprobe ist bezüglich eines σ-endlichen dominierenden Masses.

(b) [**3 Punkte**]
Finden Sie den NP-Test mit Niveau α für das Testproblem $(\star)$.

(c) [**2 Punkte**]
Finden Sie die Trennschärfe des NP-Tests aus Aufgabe (b) und zeigen Sie, dass diese gegen 1 konvergiert wenn $n \to \infty$.

(d) [**2 Punkte**]
Argumentieren Sie, dass der NP-Test aus Aufgabe (b) UMP ist beim Testen von $H_0\colon \theta = 0$ gegen $H_1\colon \theta > 0$.

10. [**6 Punkte**]

100 Studierenden, welche die Vorlesung Wahrscheinlichkeit und Statistik besuchten, wurden die folgenden Fragen gestellt:

- Q1: Gefiel Ihnen die Vorlesung? (Ja/Nein)
- Q2: Welchen Modus bevorzugten Sie? (Präsenz/Online)

Seien

$$X = \begin{cases} 1 & \text{die Antwort auf Q1 ist "Ja"} \\ 2 & \text{die Antwort auf Q1 ist "Nein"} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{die Antwort auf Q2 ist "Präsenz"} \\ 2 & \text{die Antwort auf Q2 ist "Online"} \end{cases}$$

Das Ziel ist es zu testen, ob eine Assoziation zwischen X und Y besteht.

(a) [**1 Punkte**]
Beschreiben Sie das Testproblem mathematisch.

(b) [**3 Punkte**]
Schreiben Sie die passende Test-Statistik und den dazugehörigen Test mit asymptotischem Niveau α auf.

(c) [**2 Punkte**]
Sei $\alpha = 0.05$. Welche Entscheidung treffen Sie mit dem Test aus Aufgabe (b), wenn die Umfrage die folgende Kontingenztafel liefert?

X \ Y		
	40	30
	10	20

Sie können Folgendes benutzen:

- das 0.95-Quantil von $\chi^2_{(1)} \approx 3.84$,
- das 0.975-Quantil von $\chi^2_{(1)} \approx 5.02$,
- das 0.95-Quantil von $\chi^2_{(2)} \approx 5.99$,
- das 0.975-Quantil von $\chi^2_{(2)} \approx 7.37$.

D–MATH

Exam Probability & Statistics

401-2604-00L

Please do not turn the page yet!

Part I: Probability Theory

1. [**6 Points**]

Four people toss, one after the other, a fair coin. We assume that the outcomes of the four tosses are independent.

(a) [**2 Points**]
Compute the probability of obtaining 'Heads' exactly once.

(b) [**2 Points**]
Compute the probability of obtaining 'Tails' exactly twice.

(c) [**2 Points**]
Compute the probability of obtaining 'Tails' at least once.

2. [**9 Points**]

A building has three floors. Three people get in and walk up to one of the floors. Let Ω denote the sample space, that is, the set of all possible elementary events describing which person goes to which floor.

(a) [**1 Point**]
Recall what a Laplace model is.

(b) [**2 Points**]
Compute $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ for $\omega \in \Omega$ under the assumption of a Laplace model.

(c) [**2 Points**]
Compute the probability that all three people go to the same floor.

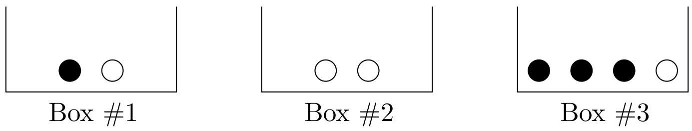
(d) [**2 Points**]
Compute the probability that they go to exactly two different floors.

(e) [**2 Points**]
Compute the probability that they all go to different floors.

3. [**7 Points**]

Consider three boxes such that

- Box #1 contains one black and one white ball;
- Box #2 contains two white balls;
- Box #1 contains three black and one white ball.



We first choose randomly a box and then a ball from this box. From a chosen box, the balls have the same probability to be drawn. Let $W = \{\text{The ball drawn is white}\}$.

(a) [**2 Points**]
We assume in this question that the boxes have the same probability to be chosen. Compute the probability of the event W.

(b) [**2 Points**]
We assume now that $\mathbb{P}(\{\text{Picking Box \#1}\}) = \mathbb{P}(\{\text{Picking Box \#2}\}) = 1/4$. Compute the probability that the ball drawn is black.

(c) [**3 Points**]
We assume again that the boxes have the same probabilities of being chosen. Given that the ball drawn is white, what is the conditional probability that it was drawn from Box #2?

4. [**6 Points**]

Consider a square with a random length X. We assume that $X \sim \mathcal{U}([0, a])$ is distributed uniformly for some $a > 0$. Let A denote the area of the square.

(a) [**2 Points**]
Compute the expected value $\mathbb{E}[A]$ and the variance $\mathbb{V}(A)$.

(b) [**2 Points**]
Compute the cumulative distribution function of A.

(c) [**2 Points**]
Determine all $a > 0$ such that $\mathbb{P}(A > 1) \geq 1/2$.

5. [8 Points]

Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $\sim \text{Pois}(\lambda)$ for some $\lambda > 0$.

(a) **[1 Point]**
Recall the definition of convergence in probability.

(b) **[2 Points]**
By using Chebyshev's inequality, show that $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ as $n \to \infty$.

(c) **[2 Points]**
Write down the Central Limit Theorem for the random variable $\bar{X}_n$.

(d) **[3 Points]**
Suppose that some hotel opens only for 100 days in any given year. For $i \in \{1, \dots, 100\}$, let X_i = The number of people the hotel receives on day $\#i$. Assuming that $X_1, \dots, X_{100}$ are i.i.d. $\sim \text{Pois}(9)$, give an approximation of

$$\mathbb{P}\left(840 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 960\right).$$

You may use: $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(3/2) \approx 0.93$, and $\Phi(2) \approx 0.97$, where $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx$ for $z \in \mathbb{R}$.

Part II: Statistics

6. [9 Points]

Consider the parametric model $\mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in (0, \infty)\}$, where P_θ admits the density

$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}\mathbb{1}_{x\in[0,1]}.$$

(a) **[2 Points]**
Compute $\mathbb{E}_\theta[X]$, where $X \sim P_\theta$.

(b) **[2 Points]**
Construct the moment estimator of θ_0 based on i.i.d. $X_1, \ldots, X_n \sim P_{\theta_0}$.

(c) **[2 Points]**
Using the appropriate theorems, show that the moment estimator obtained in question (b) converges in probability to θ_0.

(d) **[3 Points]**
For $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ and $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim P_{\theta_0}$, write down the log-likelihood $l_{\mathbb{X}}(\theta)$ for $\theta \in (0, \infty)$ and find the MLE. (You can assume that $X_i \in (0,1)$ for all $i \in \{1, \ldots, n\}$.)

7. [6 Points]

Consider the uniform distribution $\mathcal{U}([\theta, \theta+1])$ for $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) **[1 Point]**
Compute the expected value $\mathbb{E}_\theta[X]$ for $X \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+1])$ (do not use the sheet of formulas).

(b) **[1 Point]**
Compute the variance $\mathbb{V}_\theta(X)$ for $X \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+1])$ (do not use the sheet of formulas).

(c) **[2 Points]**
Let $X_1, \ldots, X_n$ be i.i.d. $\sim \mathcal{U}([\theta_0, \theta_0+1])$. State the Central Limit Theorem for $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ in this case.

(d) **[2 Points]**
Based on question (c), construct a bilateral and symmetric confidence interval for θ_0 with asymptotic level $1-\alpha$ for $\alpha \in (0,1)$.

8. [**8 Points**]

Consider the probability density function

$$f_\theta(x) = \frac{c}{x^3}\mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$$

with $\theta \in (0, \infty)$ and $c > 0$.

(a) [**1 Points**]
Determine $c > 0$ as a function of θ.

(b) [**2 Points**]
Let $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, where $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. $\sim f_{\theta_0}$. Write down the likelihood function $L_{\mathbb{X}}(\theta)$ and show that the MLE is $\min_{1\leq i\leq n} X_i$.

(c) [**3 Points**]
Compute the cumulative distribution function of $\min_{1\leq i\leq n} X_i$, where, as before, $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. $\sim f_{\theta_0}$.

(d) [**2 Points**]
For a fixed $\varepsilon > 0$, compute $\mathbb{P}(|\min_{1\leq i\leq n} X_i - \theta_0| > \varepsilon)$ and deduce that the MLE converges to θ_0 in probability as $n \to \infty$.

9. [**9 Points**]

Consider $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$, where $\sigma_0 > 0$ is known and $\theta \in \mathbb{R}$. We want to test $H_0\colon \theta = 0$ versus $H_1\colon \theta = 1$. $(\star)$

(a) [**2 Points**]
Recall the Neyman-Pearson test of level α for testing a simple null hypothesis $H_0\colon p = p_0$ versus a simple alternative hypothesis $H_1\colon p = p_1$, where p is the density of an observed sample with respect to some σ-finite dominating measure.

(b) [**3 Points**]
Find the NP-test of level α for the testing problem $(\star)$.

(c) [**2 Points**]
Give the power of the NP-test obtained in question (b) and show that it converges to 1 as $n \to \infty$.

(d) [**2 Points**]
Argue that the NP-test obtained in question (b) is UMP for testing $H_0\colon \theta = 0$ versus $H_1\colon \theta > 0$.

10. [**6 Points**]

100 students who attended the lectures on Probability and Statistics were asked the following questions:

- Q1: Did you like the lectures? (yes/no)
- Q2: What was your preferred mode of attendance? (presence/online)

Put

$$X = \begin{cases} 1 & \text{if the answer to Q1 is 'yes'} \\ 2 & \text{if the answer to Q1 is 'no'} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{if the answer to Q2 is 'presence'} \\ 2 & \text{if the answer to Q2 is 'online'} \end{cases}$$

The goal is to test whether there is an association between X and Y.

(a) [**1 Points**]
Describe the testing problem mathematically.

(b) [**3 Points**]
Write down the appropriate test-statistic and the related test of asymptotic level α.

(c) [**2 Points**]
Take $\alpha = 0.05$. What is the decision you make using the test from question (b) if the survey results yielded the following contingency table?

	Y	
X	40	30
	10	20

You may use:

- the 0.95-quantile of $\chi^2_{(1)} \approx 3.84$,
- the 0.975-quantile of $\chi^2_{(1)} \approx 5.02$,
- the 0.95-quantile of $\chi^2_{(2)} \approx 5.99$,
- the 0.975-quantile of $\chi^2_{(2)} \approx 7.37$.