

D-MATH

**Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik**

401-2604-00L

---

*Nachname*

**XX**

*Vorname*

**XX**

*Legi-Nr.*

**XX-000-000**

*Prüfungs-Nr.*

**000**

---

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Answerheft.*

Alle Zufallsvariablen sind auf einem fixierten impliziten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definiert.

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$  schreiben wir  $E(X)$  und für die Varianz  $\text{Var}(X)$ .

## Aufgabe 1

Sei  $(X_i)_{i \geq 1}$  eine Folge von unabhängig identisch verteilten (uiv) Zufallsvariablen, die Werte in  $\{0, 1, -1\}$  mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/3.$$

annehmen. Für die gesamte Aufgabe fixieren wir ein ganze Zahl  $n \geq 1$ . Wir untersuchen das Verhalten von  $S_n$ , definiert als

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

**1.A1 [1 Punkt]** Berechne  $E(X_1)$ .

**1.A2 [1 Punkt]** Berechne  $E(S_n)$ .

**1.A3 [1 Punkt]** Berechne  $\text{Var}(X_1)$ .

**1.A4 [1 Punkt]** Berechne  $\text{Var}(S_n)$ .

**1.A5 [2 Punkte]** Beweise, dass  $P(|S_n| \geq \sqrt{n}) \leq 2/3$ .

**1.A6 [2 Punkte]** Folgere, dass gilt

$$P(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{3}.$$

**1.A7 [2 Punkte]** Beweise, dass  $k \in \mathbb{Z}$  existiert, so dass

$$P(S_n = k) \geq \frac{1}{9\sqrt{n}}.$$

## Aufgabe 2

Sei  $(U_i)_{i \geq 1}$  eine uiv. Folge von  $\mathcal{U}([0, 1])$  Zufallsvariablen. Für eine ganze Zahl  $n \geq 1$ , definieren wir

$$Z_n = \min(n \cdot U_1, \dots, n \cdot U_n).$$

**2.A1 [2 Punkte]** Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt. Begründe, dass gilt

$$\mathbb{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^1 \int_0^1 \phi(2 \cdot \min(u, v)) \, du \, dv.$$

**2.A2 [2 Punkte]** Folgere, dass gilt

$$\mathbb{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^2 \phi(z)(1 - z/2) \, dz.$$

**2.A3 [1 Punkt]** Was ist die Dichte von  $Z_2$ ?

**2.A4 [3 Punkte]** Seien  $n \geq 1$  und  $t \geq 0$ . Zeige, dass

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < 0, \\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{wenn } t \in [0, n], \\ 0 & \text{wenn } t > n. \end{cases}$$

**2.A5 [2 Punkte]** Sei  $n \geq 1$ . Berechne  $\mathbb{E}(Z_n)$ .

**2.A6 [2 Punkte]** Sei  $Z \sim \text{Exp}(1)$ . Zeige, dass  $(Z_n)_{n \geq 1}$  in Verteilung gegen  $Z$  konvergiert:

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z.$$

**2.A7 [2 Punkte]** Zeige, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

## Aufgabe 3

Sei  $\Theta = [0, \infty)$ , und sei  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen die durch  $\Theta$  parametrisiert sind. Sei  $n \geq 1$  und seien  $X_1, \dots, X_n$  nicht-negative Zufallsvariablen, so dass unter  $P_\theta$  gilt

- $X_1, \dots, X_n$  uiv. und
- $X_i$  hat die Dichte gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\theta(x) = \exp(\theta - x) 1_{\theta \leq x}.$$

**3.A1 [2 Punkte]** Überprüfe, dass  $f_\theta$  für jedes  $\theta \in \Theta$  eine Dichte definiert.

**3.A2 [3 Punkte]** Beweise, dass der Maximum-Likelihood Schätzer durch  $T = \min(X_1, \dots, X_n)$  gegeben ist.

**3.A3 [1 Punkt]** Sei  $a \geq 0$ . Berechne

$$P_\theta(X_1 > \theta + a).$$

**3.A4 [2 Punkte]** Zeige, dass  $\forall a \in [0, \infty)$  gilt

$$P_\theta(T > \theta + a) = \exp(-an).$$

**3.A5 [2 Punkte]** Ist  $T$  erwartungstreu?

**3.A6 [1 Punkt]** Zeige, dass

$$P_\theta(\theta \leq T \leq \theta + a) = 1 - \exp(-an).$$

**3.A7 [2 Punkte]** Konstruiere ein 95% Konfidenzintervall für  $\theta$  von der Form  $[T - c/n, T]$ , wobei  $c > 0$  eine explizite Konstante ist, die bestimmt werden muss.

## Aufgabe 4

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$  definiert als

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < -1, \\ 1/3 & \text{wenn } -1 \leq a < 2, \\ 1/2 & \text{wenn } 2 \leq a < 3, \\ 3/4 & \text{wenn } 3 \leq a < 6, \\ 1 & \text{wenn } a \geq 6. \end{cases} \quad (1)$$

*Erinnerung:*  $F_X(a) = P(X \leq a)$ .

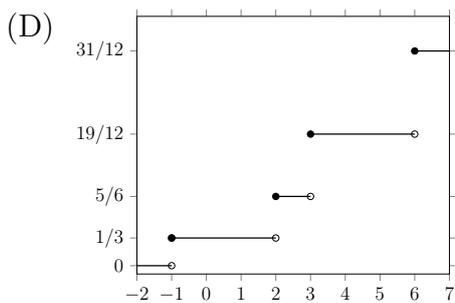
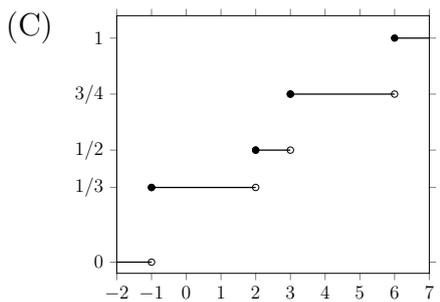
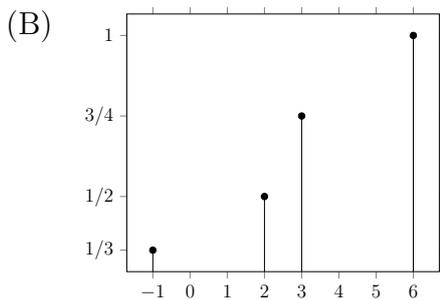
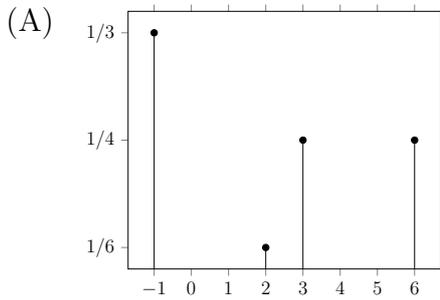
**4.MC1 [2 Punkte]** Markiere die wahre(n) Aussage(n).

- (A)  $X$  ist stetig
- (B)  $X$  ist diskret
- (C)  $X$  ist weder stetig noch diskret
- (D)  $X^2$  ist diskret
- (E)  $X^2$  ist stetig

**4.MC2 [2 Punkte]** Markiere die wahre(n) Aussage(n).

- (A)  $P(X = 2) = 1/2$
- (B)  $P(X = 2) = 1/3$
- (C)  $P(X = 2) = 1/6$
- (D)  $P(X = 2) = P(-1 < X < 3)$
- (E)  $P(X = 2) = P(X = -1)$

4.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Diagramme ist die Gewichsfunktion von  $X$ ?



(E) Keine der anderen Optionen.

4.MC4 [2 Punkte] Was ist  $E[X]$ ?

- (A) 1
- (B)  $9/4$
- (C)  $35/12$
- (D)  $43/12$
- (E)  $5/2$

Sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 1, \\ 1 - 1/a^3 & \text{wenn } a \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

**4.MC5 [2 Punkte]** Was ist  $E(Y)$ ?

- (A)  $-1$
- (B)  $1/2$
- (C)  $3/2$
- (D)  $2$
- (E)  $7/2$

**4.MC6 [2 Punkte]** Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich  $\text{Var}(Y)$ ?

- (A)  $E(Y^2)$
- (B)  $E\left(\left(Y - E(Y)\right)^2\right)$
- (C)  $E(Y^2) - E(Y)^2$
- (D)  $-1$
- (E)  $0$

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$  definiert als (1) und sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_Y$  definiert als (2). Wir nehmen an, dass  $X$  und  $Y$  unabhängig sind.

**4.MC7 [2 Punkte]** Welche(r) der folgenden Ausdrücke ist/sind gleich  $P(X + Y \leq 1)$ ?

- (A)  $\sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}, \\ x+y \leq 1}} P(X = x, Y = y)$
- (B)  $\int_{\substack{x,y \in \mathbb{R}, \\ x+y \leq 1}} P(X = x, Y = y) dx dy$
- (C)  $P(X = -1) \cdot P(Y \leq 2)$
- (D)  $0$
- (E)  $7/24$

## Aufgabe 5

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

**5.MC1 [2 Punkte]** Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in  $\{-1, 1\}$ , mit  $P(X = 1) = 1/2$  und  $P(Y = 1) = 1/3$ . Welche der folgenden Zufallsvariablen hat/haben die gleiche Verteilung wie  $X$ ?

- (A)  $Y$
- (B)  $X \cdot Y$
- (C)  $X + Y$
- (D)  $-X \cdot Y$
- (E)  $-X$

**5.MC2 [2 Punkte]** Sei  $(X_i)_{i \geq 1}$  eine Folge von uiv. Zufallsvariablen mit  $E(|X_1|) < \infty$  und  $E(X_1) = 1$ . Für jede ganze Zahl  $n \geq 1$ , definieren wir

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 2X_n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

und

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- (A)  $\frac{S_n}{n}$  konvergiert nicht fast-sicher
- (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[S_n]}{n}$  fast-sicher
- (C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2n} = 2$  fast-sicher
- (D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 3/2$  fast-sicher
- (E)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 1$  fast-sicher

## 5.MC3 [2 Punkte]

Sei  $\Theta = (0, 1]$  und sei  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen indiziert durch  $\Theta$ . Betrachte die folgenden Hypothesen:

$$H_0 : \theta = 0.1,$$

$$H_1 : \theta = 0.01.$$

Seien  $X_1, \dots, X_{10}$  uiv.  $\text{Geo}(\theta)$  Zufallsvariablen unter  $P_\theta$ . Wir betrachten den Test

$$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \min(X_1, \dots, X_{10}) < 5, \\ 1 & \text{wenn } \min(X_1, \dots, X_{10}) \geq 5. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- (A) Der Test hat das Niveau  $(0.9)^{40}$  und Macht  $(0.99)^{40}$ .
- (B) Der Test hat das Niveau  $(0.99)^{40}$  und Macht  $(0.9)^{40}$ .
- (C) Der Test hat das Niveau  $(0.9)^{50}$  und Macht  $(0.99)^{50}$ .
- (D) Der Test hat das Niveau  $1 - (0.9)^{40}$  und Macht  $(0.99)^{40}$ .
- (E) Wenn wir  $(7, 10, 18, 11, 31, 89, 104, 11, 7, 202)$  beobachten, dann verwerfen wir  $H_0$ .

5.MC4 [2 Punkte] Seien  $(X_i)_{i \geq 1}$  uiv. Zufallsvariablen mit  $E(X_1) = 0$ ,  $E(X_1^2) = 1$ , und  $E(X_1^4) = 2$ . Sei  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A)  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$

(B)  $\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$

(C)  $\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$

(D)  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$

(E)  $\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2 - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$



## Formelsammlung

Wir erinnern an die folgenden Definitionen und Aussagen. Diese müssen nicht zwingend benutzt werden.

### Diskrete Zufallsvariablen

1. Sei  $p \in (0, 1]$ . Eine Zufallsvariable (Z.V.)  $X$  heisst geometrisch mit Parameter  $p$  ( $X \sim \text{Geo}(p)$ ), falls

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

2. Sei  $p \in (0, 1]$ ,  $X \sim \text{Geo}(p)$ .

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}.$$

### Stetige Zufallsvariablen

1. Seien  $a < b$ . Eine stetige Z.V. heisst gleichverteilt auf  $[a, b]$  ( $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ ), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & y \in [a, b] \\ 0 & y \notin [a, b] \end{cases}.$$

2. Sei  $\lambda > 0$ . Eine Z.V.  $X$  heisst Exponential mit Parameter  $\lambda$  ( $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch

$$f_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}.$$

### Erwartungswert

1. Sei  $X$  eine Z.V.,  $X \geq 0$  f.s. oder  $X \in L^1(\mathbb{P})$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int X d\mathbb{P}.$$

2. Sei  $X \geq 0$  Z.V.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt.$$

3. Sei  $X$  eine diskrete Z.V. mit  $X \in W$  f.s.,  $X \geq 0$  f.s. oder  $X \in L^1(\mathbb{P})$ .

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y \in W} y \cdot \mathbb{P}(X = y).$$

4. Sei  $X$  eine Z.V. mit Dichte  $f$ ,  $X \geq 0$  f.s. oder  $X \in L^1(\mathbb{P})$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} y f(y) dy.$$

### Tchebyscheff Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ ,  $m = \mathbb{E}(X)$ .

$$\forall a \geq 0 \quad \mathbb{P}(|X - m| > a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

### Kriterium für f.s. Konvergenz

Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $X$  Zufallsvariablen. Falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon) < \infty,$$

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{f.s.}$$