Aufgaben und Lösungsvorschlag
Gruppe A

Alle Zufallsvariablen sind auf einem fixierten impliziten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ definiert.

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable X schreiben wir $\mathrm{E}(X)$ und für die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 1

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten (uiv) Zufallsvariablen, die Werte in $\{0, 1, -1\}$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = -1) = 1/3.$$

annehmen. Für die gesamte Aufgabe fixieren wir ein ganze Zahl $n \geq 1$. Wir untersuchen das Verhalten von S_n, definiert als

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1.A1 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{E}(X_1)$.

Lösung:

We compute $\mathrm{E}(X_1) = 0 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) - 1 \cdot (1/3) = 0$.

1.A2 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{E}(S_n)$.

Lösung:

Since X_i has the same distribution as X_1 for all $i \geq 1$, we have $\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{E}(X_1) = 0$ for all $i \geq 1$. So, linearity of expectation gives $\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = 0$.

1.A3 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{Var}(X_1)$.

Lösung:

We compute $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{E}\Big((X_1 - \mathrm{E}(X_1))^2\Big) = \mathrm{E}(X_1^2) = 0 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) = 2/3$.

1.A4 [1 Punkt] Berechne $\mathrm{Var}(S_n)$.

Lösung:

Since X_i has the same distribution as X_1 for all $i \geq 1$, we have $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_1) = 2/3$ for all $i \geq 1$. Since $X_1, \ldots, X_n$ are independent, we get $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = 2n/3$.

1.A5 [2 Punkte] Beweise, dass $\mathrm{P}\left(|S_n| \geq \sqrt{n}\right) \leq 2/3$.

Lösung:

Chebyshev's inequality applied to the random variable S_n gives

$$\mathrm{P}\left(|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \geq \sqrt{n}\right) \leq \mathrm{Var}(S_n)/n.$$

Using that $\mathrm{E}(S_n) = 0$ and $\mathrm{Var}(S_n) = 2n/3$ gives the desired inequality.

1.A6 [2 Punkte] Folgere, dass gilt

$$\mathrm{P}(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{3}.$$

Lösung:

First, notice that

$$\mathrm{P}(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) \geq \mathrm{P}(-\sqrt{n} < S_n < \sqrt{n})$$

since $\{-\sqrt{n} < S_n < \sqrt{n}\} \subset \{-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}\}$. Second, using that $\{-\sqrt{n} < S_n < \sqrt{n}\} = \{|S_n| \geq \sqrt{n}\}^c$ and the bound from the previous part, we get

$$\mathrm{P}(-\sqrt{n} < S_n < \sqrt{n}) = 1 - \mathrm{P}(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{3}.$$

1.A7 [2 Punkte] Beweise, dass $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass

$$\mathrm{P}(S_n = k) \geq \frac{1}{9\sqrt{n}}.$$

Lösung:

First, by the previous part we have

$$\frac{1}{3} \leq \mathrm{P}(|S_n| \leq \sqrt{n}).$$

Second, define $I = \mathbb{Z} \cap [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ and note that because S_n is integer-valued we have

$$\mathrm{P}(|S_n| \leq \sqrt{n}) = \mathrm{P}(\cup_{k \in I}\{S_n = k\}).$$

Third, by the union bound and that $|I| \leq 3\sqrt{n}$ we have

$$\mathrm{P}(\cup_{k \in I}\{S_n = k\}) \leq \sum_{k \in I} \mathbb{P}(S_n = k) \leq 3\sqrt{n} \max_{k \in I} \mathbb{P}(S_n = k).$$

Combining the three above inequalities yields

$$\max_{k \in I} \mathbb{P}(S_n = k) \geq \frac{1}{9\sqrt{n}},$$

completing the proof.

Aufgabe 2

Sei $(U_i)_{i\geq 1}$ eine uiv. Folge von $\mathcal{U}([0,1])$ Zufallsvariablen. Für $n \geq 1$, definieren wir

$$Z_n = \min(n \cdot U_1, \ldots, n \cdot U_n).$$

2.A1 [1 Punkt] Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Begründe, dass gilt

$$\mathrm{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^1 \int_0^1 \phi(2 \cdot \min(u,v))\, du\, dv.$$

Lösung:

By independence, (U_1, U_2) has a density in $\mathbb{R}^2$ given by

$$f_{U_1,U_2}(u,v) = f_{U_1}(u) \cdot f_{U_2}(v) = 1_{(u,v)\in[0,1]^2}.$$

So we obtain

$$\mathrm{E}[\phi(Z_2)] = \mathrm{E}[\phi(2\min(U_1,U_2))] = \int_0^1 \int_0^1 \phi(2\min(u,v))dudv.$$

2.A2 [2 Punkte] Folgere, dass gilt

$$\mathrm{E}(\phi(Z_2)) = \int_0^2 \phi(z)(1 - z/2)dz.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi(Z_2)] &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(2\min(u,v))dudv \\
&= \int_{u=0}^1 \int_{v=u}^1 \phi(2\min(u,v))dvdu + \int_{v=0}^1 \int_{u=v}^1 \phi(2\min(u,v))dudv \\
&= 2\int_{u=0}^1 \int_{v=u}^1 \phi(2\min(u,v))dvdu \\
&= 2\int_{u=0}^1 \int_{v=u}^1 \phi(2u)dvdu \\
&= 2\int_0^1 (1-u)\phi(2u)du \\
&= \int_0^2 \phi(z)(1-z/2)dz.
\end{aligned}$$

2.A3 [2 Punkte] Was ist die Dichte von Z_2?

Lösung:

$(1 - z/2)1_{0\leq z\leq 2}$.

2.A4 [3 Punkte] Seien $n \geq 1$ und $t \geq 0$. Zeige, seige dass

$$P(Z_n > t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < 0, \\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{wenn } t \in [0, n], \\ 0 & \text{wenn } t > n. \end{cases}$$

Lösung:

Fix $n \geq 1$. First, since $Z_n \geq 0$ almost surely,

$$\forall t < 0 \;\; P(Z_n > t) = 1.$$

Second, since $Z_n = n \min(U_1, \dots, U_n) \leq n$ almost surely, we have

$$\forall t > n \;\; P(Z_n > t) = 0.$$

Third, let $t \in [0, 1]$. Then

$$\begin{aligned} P(Z_n > t) =& P(n \min(U_1, \dots, U_n) > t) \\ &= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i > t/n\}) \\ &\overset{*}{=} \prod_{i=1}^{n} P(U_i > t/n) \\ &= (1 - t/n)^n, \end{aligned}$$

where we used the independence of $U_1, \dots, U_n$ in $(*)$.

2.A5 [2 Punkte] Sei $n \geq 1$. Berechne $E(Z_n)$.

Lösung:

If X is random variable that is non-negative almost surely, we have

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t) dt.$$

Applying this formula to Z_n, which is indeed non-negative almost surely, and using the previous part we get

$$\begin{aligned} E(Z_n) = \int_0^\infty P(Z_n > t) dt &= \int_0^n (1 - t/n)^n dt \\ &= \left[\frac{-n}{n+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right]_0^n \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

2.A6 [2 Punkte] Sei $Z \sim \text{Exp}(1)$. Zeige, dass $(Z_i)_{i \geq 1}$ in Verteilung gegen Z konvergiert.

Lösung:

The cumulative distribution function of Z is given by

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = (1 - e^{-t})1_{t \in [0,\infty)},$$

which is continuous for all t. So we need to show that for all $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t)$ converges to $\mathbb{P}(Z \leq t)$. First, for $t \leq 0$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 0$ for all n and $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0$, so the convergence follows trivially in this case. Second, fix $t \in [0, \infty)$ and note for $n \geq t$ we have

$$\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 1 - (1 - t/n)^n,$$

which converges to $1 - e^{-t}$, as required.

2.A7 [2 Punkte] Zeige, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Z_n}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

Lösung:

We use the criterion in the formula sheet for almost sure convergence with $X_n = Z_n$ and $X = 0$. Fix $\epsilon > 0$. Then

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|Z_n|/n \geq \epsilon) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z_n \geq n\epsilon) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} (1 - \epsilon)^n < \infty.\end{aligned}$$

So Z_n/n converges almost surely to 0.

Aufgabe 3

Sei $\Theta = [0, \infty)$, und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen die durch Θ parametrisiert sind. Sei $n \geq 1$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ nicht-negative Zufallsvariablen, so dass unter P_θ gilt

- $X_1, \ldots, X_n$ uiv. und
- X_i hat die Dichte gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\theta(x) = \exp(\theta - x)1_{\theta \leq x}.$$

3.A1 [2 Punkte] Überprüfe, dass f_θ für jedes $\theta \in \Theta$ eine Dichter definiert.

Lösung:

Let $\theta \in [0, \infty)$. Note that $f_\theta(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ and

$$\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)dx = \int_\theta^\infty \exp(\theta - x)dx = [-\exp(\theta - x)]_\theta^\infty = 1.$$

This shows that f_θ defines a density.

3.A2 [3 Punkte] Beweise, dass der Maximum-Likelihood Schätzer durch $T = \min(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben ist.

Lösung:

Fix $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Then because $X_1, \ldots, X_n$ are independent we have

$$L_\theta(x) = \prod_{i=1}^n \exp(\theta - x_i)1_{x_i \geq \theta} = \exp(\theta n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right) 1_{\min(x_1,\ldots,x_n)\geq\theta}.$$

Let $\theta^* = \min(x_1, \ldots, x_n)$. Then for all $\theta < \theta^*$ we have

$$L_{\theta*}(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right) \exp(\theta^* n) > \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right) \exp(\theta n) = L_\theta(x) > 0.$$

For all $\theta > \theta^*$, $L_\theta(x) = 0$. Also, for all $\theta > \theta^*$ we have $L_\theta(x) = 0$. This shows that $\theta = \theta^*$ maximises $L_\theta(x)$, completing the proof.

3.A3 [1 Punkt] Sei $a \geq 0$. Berechne

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 \geq \theta + a).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(X_1 \geq \theta + a) &= \int_{\theta+a}^{\infty} f_\theta(t)dt \\ &= \int_{\theta+a}^{\infty} \exp(\theta - t)dt \\ &= \exp(-a).\end{aligned}$$

3.A4 [2 Punkte] Zeige, dass $\forall a \in [0, \infty)$ gilt

$$\mathrm{P}_\theta(T \geq \theta + a) = \exp(-an).$$

Lösung:

Let $a \in [0, \infty)$. Then

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(T \geq \theta + a) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > \theta + a) \\ &= \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n \{X_i > \theta + a\}\right) \\ &\overset{*}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > \theta + a) \\ &= \exp(-an),\end{aligned}$$

where we used the independence of $X_1, \ldots, X_n$ in $(*)$.

3.A5 [2 Punkte] Ist T erwartungstreu?

Lösung:

Note that $T \geq \theta$ almost surely and $\mathbb{P}(T > \theta + 1) = \exp(-n) > 0$. So $\mathrm{E}[T] > \theta$, which shows that T is not unbiased.

3.A6 [2 Punkte] Zeige, dass

$$\mathrm{P}_\theta(\theta \leq T \leq \theta + a) = 1 - \exp(-an).$$

Lösung:

$$\mathbb{P}(\theta \leq T \leq \theta + a) = 1 - \mathbb{P}(\theta > T) - \mathbb{P}(T > \theta + a) = 1 - \exp(-an).$$

3.A7 [1 Punkt] Konstruiere ein 95% Konfidenzintervall für θ von der Form $[T - c/n, T)$, wobei $c > 0$ eine explizite Konstante ist, die bestimmt werden muss.

Lösung:

For $c > 0$,

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in [T - c/n, T]) = \mathbb{P}_\theta(\theta \leq T \leq \theta + c/n) = 1 - e^{-c}.$$

Let $c = -\ln(0.05)$. Then $\mathbb{P}_\theta(\theta \in [T - c/n, T]) = 1 - 0.05 = 0.95$, as required.

Aufgabe 4

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X definiert als

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < -1, \\ 1/3 & \text{wenn } -1 \leq a < 2, \\ 1/2 & \text{wenn } 2 \leq a < 3, \\ 3/4 & \text{wenn } 3 \leq a < 6, \\ 1 & \text{wenn } a \geq 6. \end{cases} \tag{1}$$

Erinnerung: $F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a)$.

4.MC1 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

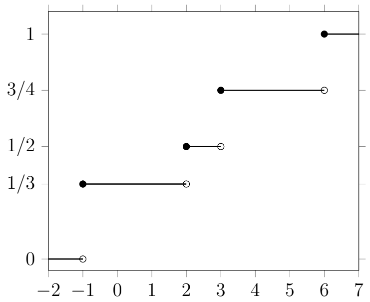
(A) **TRUE:** X^2 ist diskret
(B) **TRUE:** X ist diskret
(C) X ist stetig
(D) X^2 ist stetig
(E) X ist weder stetig noch diskret

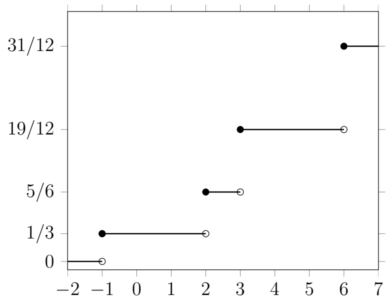
4.MC2 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

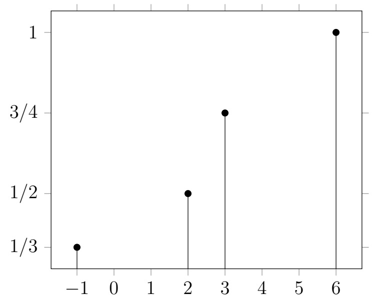
(A) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/2$
(B) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/3$
(C) $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(X = -1)$
(D) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(-1 < X < 3)$
(E) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 2) = 1/6$

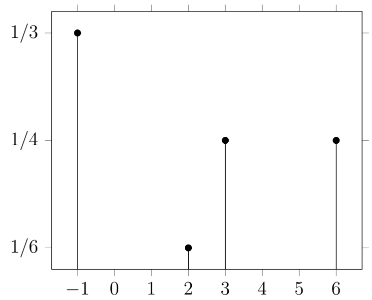
4.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Diagramme ist die Gewichtsfunktion von X?

(A) Keine der anderen Optionen.

(B)


(C)


(D)


(E) **TRUE:**


4.MC4 [2 Punkte] Was ist $E[X]$?

(A) 43/12

(B) 5/2

(C) **TRUE:** 9/4

(D) 35/12

(E) 1

Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 1, \\ 1 - 1/a^3 & \text{wenn } a \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

4.MC5 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{E}(Y)$?

(A) $1/2$

(B) 2

(C) **TRUE:** $3/2$

(D) $7/2$

(E) -1

4.MC6 [2 Punkte] Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\mathrm{Var}(Y)$?

(A) $\mathrm{E}(Y^2)$

(B) 0

(C) **TRUE:** $\mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^2\Big)$

(D) **TRUE:** $\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2$

(E) -1

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X definiert als (5) und sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_Y definiert als (6). Wir nehmen an, dass X und Y unabhängig sind.

4.MC7 [2 Punkte] Welche(r) der folgenden Ausdrücke ist/sind gleich $\mathrm{P}(X + Y \leq 1)$?

(A) $7/24$

(B) $\displaystyle\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z},\\ x+y\leq 1}} \mathrm{P}(X = x, Y = y)$

(C) 0

(D) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = -1) \cdot \mathrm{P}(Y \leq 2)$

(E) $\displaystyle\int_{\substack{x,y\in\mathbb{R},\\ x+y\leq 1}} \mathrm{P}(X = x, Y = y)dxdy$

Aufgabe 5

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

5.MC1 [2 Punkte] Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, mit $\mathrm{P}(X = 1) = 1/2$ und $\mathrm{P}(Y = 1) = 1/3$. Welche der folgenden Zufallsvariablen hat/haben die gleiche Verteilung wie X?

(A) **TRUE:** $X \cdot Y$

(B) **TRUE:** $-X \cdot Y$

(C) Y

(D) **TRUE:** $-X$

(E) $X + Y$

5.MC2 [2 Punkte] Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von uiv. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$ und $\mathrm{E}(X_1) = 1$. Für jede ganze Zahl $n \geq 1$, definieren wir

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 2X_n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

und

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) **TRUE:** $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 3/2$ fast-sicher

(B) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 1$ fast-sicher

(C) **TRUE:** $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}[S_n]}{n}$ fast-sicher

(D) $\frac{S_n}{n}$ konvergiert nicht fast-sicher

(E) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{2n} = 2$ fast-sicher

5.MC3 [2 Punkte]

Sei $\Theta = (0,1]$ und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen indiziert durch Θ. Betrachte die folgenden Hypothesen:

$$H_0 : \theta = 0.1,$$
$$H_1 : \theta = 0.01.$$

Seien $X_1, \dots, X_{10}$ uiv. $\mathrm{Geo}(\theta)$ Zufallsvariablen unter P_θ. Wir betrachten den Test

$$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \min(X_1, \dots, X_{10}) < 5, \\ 1 & \text{wenn } \min(X_1, \dots, X_{10}) \geq 5. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) Der Test hat das Niveau $(0.99)^{40}$ und Macht $(0.9)^{40}$.

(B) **TRUE:** Der Test hat das Niveau $(0.9)^{40}$ und Macht $(0.99)^{40}$.

(C) Der Test hat das Niveau $(0.9)^{50}$ und Macht $(0.99)^{50}$.

(D) Der Test hat das Niveau $1 - (0.9)^{40}$ und Macht $(0.99)^{40}$.

(E) **TRUE:** Wenn wir $(7, 10, 18, 11, 31, 89, 104, 11, 7, 202)$ beobachten, dann verwerfen wir H_0.

5.MC4 [2 Punkte] Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ uiv. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{E}(X_1^2) = 1$, und $\mathrm{E}(X_1^4) = 2$. Sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

(A) **TRUE:** $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(B) $\frac{X_1^2+\dots+X_n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(C) $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(D) $\frac{X_1^2+\dots+X_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

(E) **TRUE:** $\frac{X_1^2+\dots+X_n^2-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z$

Formelsammlung

Wir erinnern an die folgenden Definitionen und Aussagen. Diese müssen nicht zwingend benutzt werden.

Diskrete Zufallsvariablen

1. Sei $p \in (0,1]$. Eine Zufallsvariable (Z.V.) X heisst geometrisch mit Parameter p ($X \sim \mathrm{Geo}(p)$), falls
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

2. Sei $p \in (0,1]$, $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.
$$\forall k \geq 1 \quad \mathrm{P}(X \geq k) = (1-p)^{k-1}.$$

Stetige Zufallsvariablen

1. Seien $a < b$. Eine stetige Z.V. heisst gleichverteilt auf $[a,b]$ ($X \sim \mathcal{U}([a,b])$), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_{a,b}(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & y \in [a,b] \\ 0 & y \notin [a,b] \end{cases}.$$

2. Sei $\lambda > 0$. Eine Z.V. X heisst Exponential mit Parameter λ ($X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), falls sie eine Dichte hat, gegeben durch
$$f_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}.$$

Erwartungswert

1. Sei X eine Z.V., $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \int X d\mathrm{P}.$$

2. Sei $X \geq 0$ Z.V.
$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)\, dt.$$

3. Sei X eine diskrete Z.V. mit $X \in W$ f.s., $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{y \in W} y \cdot \mathrm{P}(X = y).$$

4. Sei X eine Z.V. mit Dichte f, $X \geq 0$ f.s. oder $X \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.
$$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\, dy.$$

Tchebyscheff Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, $m = \mathrm{E}(X)$.
$$\forall a \geq 0 \quad \mathrm{P}(|X - m| > a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Kriterium für f.s. Konvergenz

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$, X Zufallsvariablen. Falls
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon) < \infty,$$
dann gilt
$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad f.s.$$