Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. [**22 Punkte**]

Beantworten sie die folgenden Multiple Choice Fragen auf dem beigelegten Antwortformular.

Es können mehrere Antworten pro Frage richtig sein. Jedes richtig gesetzte Kreuz gibt 2 Punkte und für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 2 Punkte abgezogen. Die minimale Anzahl Punkte für die gesamte Aufgabe ist 0.

(a) Ein statistischer Test für die Nullhypothese $\Theta_0 \subset \Theta$ hat an der Stelle $\theta \in \Theta_0^c$ die Macht 0.4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art gleich 0.6.
ii. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art gleich 0.4.
iii. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art gleich 0.6.
iv. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art gleich 0.4.

Lösung:

iii.

(b) Seien T_1 und T_2 i.i.d. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilt für ein $\lambda > 0$. Dann gilt

i. $\max\{T_1, T_2\} \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$.
ii. $\max\{T_1, T_2\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda/2)$.
iii. Weder i. noch ii. sind wahr.

Lösung:

iii.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i. Wenn X_1 und X_2 Bernoulli-verteilt sind mit dem gleichen Parameter $p \in (0,1)$, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2, p)$.
ii. Wenn X_1 und X_2 unabhängig und identisch Poisson-verteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$, dann ist $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt mit Parameter 2λ.
iii. Wenn $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(m, p_2)$ unabhängig sind, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n + m, p_1 + p_2)$.
iv. Wenn X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen sind mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Lösung:

ii. und iv.

(d) Betrachten Sie zwei Ereignisse A, B mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
ii. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
iii. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$
iv. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c)$

Lösung:

i. und iii.

(e) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$
ii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$
iii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X < n)$
iv. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$

Lösung:

i.

(f) Wir betrachten ein Aquarium mit 8 Fischen, 3 davon sind Forellen, 5 sind Barsche. Wir fangen zufällig 3 Fische aus dem Aquarium. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer davon eine Forelle ist?

i. $\frac{16}{28}$
ii. $\frac{15}{28}$
iii. $\frac{14}{28}$
iv. $\frac{13}{28}$

Lösung:

ii.

(g) Sei X eine $\mathrm{Ber}(p)$ verteilte Zufallsvariable für ein $p \in (0, 1)$ und sei $Y = 2X - 1$. Was ist die charakteristische Funktion von Y?

i. $\varphi_Y(u) = pe^{-iu} + (1-p)e^{iu}$
ii. $\varphi_Y(u) = pe^{iu} + (1-p)e^{-iu}$
iii. $\varphi_Y(u) = e^{-iu(p-(1-p))}$
iv. $\varphi_Y(u) = e^{-iu(-p+(1-p))}$

Lösung:

ii.

(h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{\sigma^2}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i - \mu)$?

i. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{n-1}, \frac{n^2}{(n-1)^2\sigma^2})$
ii. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{n-1}, \frac{n}{(n-1)^2\sigma^2})$
iii. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{(n-1)\sigma^2}, \frac{n}{(n-1)^2\sigma^2})$
iv. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{(n-1)\sigma^2}, \frac{n^2}{(n-1)^2\sigma^2})$

Lösung:

iii.

(i) Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, sei $m = \mathbb{E}[X_1]$, und bezeichne $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\mathbb{P}(\cap_{k\geq n_0}\{|\frac{S_k}{k} - m| < \varepsilon\}) = 1$.
ii. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} \{|\frac{S_k}{k} - m| < \varepsilon\}) = 1$.
iii. Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m$.

Lösung:

ii.

2. [15 Punkte]

In zwei Urnen befinden sich je vier faire Würfel in den Farben: Blau, Grün, Rot, Schwarz. Aus jeder Urne wird zufällig ein Würfel gezogen und damit gewürfelt.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an, um dieses Zufallsexperiment zu beschreiben.

Lösung:

Aus jeder Urne kann man vier verschiedene Farben ziehen, und mit jeder Farbe 6 Zahlen würfeln. Der Grundraum ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(f_1, x_1, f_2, x_2)\colon f_i \in \{\text{b, g, r, s}\}, x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \\ &= \{\text{b, g, r, s}\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \times \{\text{b, g, r, s}\} \times \{1,2,3,4,5,6\}.\end{aligned}$$

(b) Unter der Annahme, dass wir das Zufallsexperiment durch ein Laplace-Modell modellieren können, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfel die gleiche Farbe haben aber unterschiedliche Zahlen aufzeigen.

Lösung:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) \in \Omega :\ f_1 = f_2, x_1 \neq x_2\}$$

berechnen.
Es gilt $|A| = 4 \cdot 6 \cdot 5$.
Die Anzahl aller möglichen Ergebnisse lautet: $|\Omega| = 4^2 \cdot 6^2$.
Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{4^2 \cdot 6^2} = \frac{5}{24}.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Sechsen geworfen wurden,

(c) wenn man keine weiteren Angaben hat.

Lösung:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) \in \Omega :\ x_1 = x_2 = 6\}$$

berechnen. Es gilt $|A| = 4 \cdot 4$ und $|\Omega| = 4^2 \cdot 6^2$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot 4}{4^2 \cdot 6^2} = \frac{1}{36}.$$

(d) bedingt auf das Ereignis, dass mindestens eine Sechs geworfen wurde.

Lösung:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) \in \Omega : \; x_1 = x_2 = 6\}$$

berechnen, gegeben das Auftreten des Ereignisses

$$B = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) \in \Omega : \; x_1 = 6, x_2 \neq 6 \text{ oder } x_1 \neq 6, x_2 = 6 \text{ oder } x_1 = x_2 = 6\}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Wir haben $|A \cap B| = 4 \cdot 4$ und $|B| = 16 \cdot (5 + 5 + 1) = 16 \cdot 11$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{11}.$$

(e) bedingt auf das Ereignis, dass mindestens eine Sechs mit einem roten Würfel geworfen wurde.
Lösung:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) \in \Omega : \; x_1 = x_2 = 6\}$$

berechnen, gegeben das Auftreten des Ereignisses

$$B = \{\text{mindestens eine Sechs mit einem roten Würfel geworfen wurde}\}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\text{genau zwei Sechsen, wovon mindestens eine Sechs mit einem roten Würfel}\} \\ &= \{(f_1, x_1) = (r, 6), x_2 = 6, f_2 \neq r\} \sqcup \{x_1 = 6, f_1 \neq r, (f_2, x_2) = (r, 6)\} \\ &\quad \sqcup \{(f_1, x_1, f_2, x_2) = (r, 6, r, 6)\}, \end{aligned}$$

somit ist $|A \cap B| = 3 + 3 + 1 = 7$.
Analog haben wir

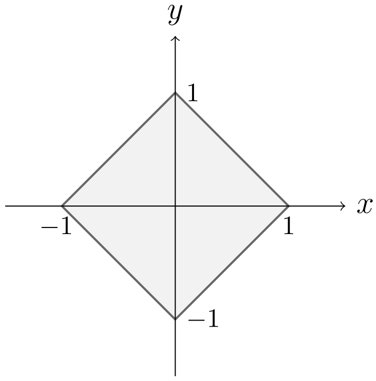
$$\begin{aligned} B &= \{\text{mindestens eine Sechs mit einem roten Würfel geworfen wurde}\} \\ &= \{(f_1, x_1) = (r, 6), x_2 \neq 6\} \sqcup \{(f_2, x_2) = (r, 6), x_1 \neq 6\} \\ &\quad \sqcup \{(f_1, x_1) = (r, 6), x_2 = 6, f_2 \neq r\} \sqcup \{x_1 = 6, f_1 \neq r, (f_2, x_2) = (r, 6)\} \\ &\quad \sqcup \{(f_1, x_1, f_2, x_2) = (r, 6, r, 6)\}, \end{aligned}$$

somit ist $|B| = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3 + 3 + 1 = 47$.
Also ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{7}{47}.$$

3. [16 Punkte]

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X,Y}$. Die Dichtefunktion sei konstant gleich c auf dem grauen Bereich und 0 ausserhalb.



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

Lösung:

Wir bezeichnen das Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$ mit Q, wobei

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, |x| + |y| \leq 1\}.$$

Dann ist laut Angabe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{falls } (x, y) \in Q, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Fläche von Q ist 2, daraus folgt

$$\int \int_Q c \, dxdy = 2c.$$

Wegen der Normierungseigenschaft wollen wir also, dass 1=2c und somit gilt $c = \frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie Randdichte f_X von X und die Randdichte f_Y von Y.

Lösung:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \begin{cases} \int_{|x|-1}^{1-|x|} \frac{1}{2} \, dy = 1 - |x|, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \begin{cases} \int_{|y|-1}^{1-|y|} \frac{1}{2} \, dx = 1 - |y|, & \text{falls } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\operatorname{Var}(X)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x-x^2)\,dx \\
&= -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2-x^3)\,dx \\
&= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6}$.

(d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Da $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, gilt $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{Q} xy\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1+|y|}^{1-|y|} xy\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-1+|y|}^{1-|y|} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} y((1-|y|)^2 - (-1+|y|)^2)\,dy = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, d.h. X und Y sind unkorreliert.
X und Y sind aber nicht unabhängig, denn $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

(e) Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = \frac{1}{1-X}$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

Lösung:

Der Erwartungswert von $Z = \frac{1}{1-X}$ lautet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-x} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1-|x|}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1-x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \frac{x+1-1}{1+x}\,\mathrm{d}x + 1 \\
&= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x + 1 \\
&= 2\log(1+x)\Big|_{0}^{1} = 2\log(2) = \log(4).
\end{aligned}$$

4. [9 Punkte]

Betrachten Sie unabhängige Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0) = p_k.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) \in \{0,1\}$$

und geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, so dass $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) = 1$. Untersuchen Sie die Fälle $p_k = \frac{1}{k}$ und $p_k = \frac{1}{k^2}$.

Lösung:

Die Summe $\sum_{k\geq 1} X_k$ ist genau dann unendlich, wenn unendlich viele $X_k = 1$ sind. Dies bedeutet

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{X_k = 1\}\right).$$

Aus der ersten Aussage des Borel-Cantelli-Lemmas erhält man also, dass

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{k\geq 1} p_k < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty\right) = 0. \tag{1}$$

Da die X_k unabhängig sind, folgt aus der zweiten Aussage des Borel-Cantelli-Lemmas, dass

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{k\geq 1} p_k = \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty\right) = 1. \tag{2}$$

Kombiniert man (1) und (2), erhält man, dass

$$\sum_{k\geq 1} p_k < \infty \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty\right) = 0$$

und

$$\sum_{k\geq 1} p_k = \infty \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty\right) = 1.$$

Somit ist $\sum_{k\geq 1} p_k < \infty$ ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) = 1$.

Dies zeigt, dass $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) \in \{0,1\}$.

Falls $p_k = \frac{1}{k}$, dann ist $\sum_{k\geq 1} p_k = \infty$ und somit gilt $\mathbb{P}\left(\sum_{k\geq 1} X_k < \infty\right) = 0$.

Falls $p_k = \frac{1}{k^2}$, dann ist $\sum_{k\geq 1} p_k < \infty$ und somit gilt $\mathbb{P}\left(\sum_{k\geq 1} X_k < \infty\right) = 1$.

5. [16 Punkte]

Zufällig aus einer Population auszuwählende Individuen haben unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ eine interessierende Eigenschaft "Erfolg". Wir schätzen den Erfolgsparameter p mit zwei verschiedenen Experimenten:

A : n Individuen, X = Anzahl Erfolge,
B : n Gruppen mit jeweils $c \geq 2$ Individuen, X = Anzahl Gruppen mit mindestens 1 Misserfolg.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X bei Experiment A und B.

Lösung:

Experiment A:
$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, d.h. $\mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ für $x \in \{0,1,\dots,n\}$.

Experiment B:
Wir berechnen zuerst

$$\mathbb{P}(\text{ mindestens 1 Misserfolg in der Gruppe }) = 1 - \mathbb{P}(\text{ Kein Misserfolg }) = 1 - p^c.$$

Also ist $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1-p^c)$.

(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p in beiden Experimenten A und B.

Lösung:

Experiment A:
Die log-Likelihood-Funktion für $x \in \{0,1,\dots,n\}$ ist gegeben durch

$$l(p;x) = \log L(p;x) = \log\left(\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\right) = \log\binom{n}{x} + x\log(p) + (n-x)\log(1-p).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial p}(p;x) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} &= 0 \\ \iff \quad x - xp &= np - xp \\ \iff \quad p &= \frac{x}{n} \end{aligned}$$

Da $\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}(p;x) < 0$ gilt, ist dies ein Maximum der log-Likelihood-Funktion und wir erhalten

$$T_A(x) = \arg\max_{0<p<1} l(p;x) = \frac{x}{n}.$$

Experiment B:

Analog zum Experiment A haben wir in diesem Experiment für $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} l(p; x) = \log(L(p; x)) &= \log\left(\binom{n}{x}(1-p^c)^x (p^c)^{n-x}\right) \\ &= \log\binom{n}{x} + x\log(1-p^c) + c(n-x)\log(p), \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial p}(p; x) = x \cdot \frac{-cp^{c-1}}{1-p^c} + \frac{c(n-x)}{p} = 0 \\ \iff c(n-x)(1-p^c) - xcp^{c-1}p = 0 \\ \iff p^c\left(c(n-x) + xc\right) = c(n-x) \\ \iff p^c = \frac{n-x}{n} \\ \iff p = \sqrt[c]{\frac{n-x}{n}} \end{aligned}$$

Wieder ist $\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}(p; x) < 0$ und wir erhalten daher

$$T_B(x) = \arg\max_{0<p<1} l(p; x) = \sqrt[c]{\frac{n-x}{n}}.$$

(c) Sind die Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu in beiden Experimenten A und B? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Experiment A:

Der Schätzer T_A ist erwartungstreu, wenn für alle $p \in (0, 1)$ gilt $\mathbb{E}_p[T_A(X)] = p$.

Dies ist efüllt, denn

$$\mathbb{E}_p[T_A(X)] = \mathbb{E}_p\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{np}{n} = p.$$

Experiment B:

Der Schätzer T_B ist erwartungstreu, wenn für alle $p \in (0, 1)$ gilt $\mathbb{E}_p[T_B] = p$. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[T_B(X)] &= \mathbb{E}_p\left[\sqrt[c]{\frac{n-X}{n}}\right] < \sqrt[c]{\mathbb{E}_p\left[\frac{n-X}{n}\right]} = \sqrt[c]{1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}_p[X]} \\ &= \sqrt[c]{1 - \frac{1}{n}n(1-p^c)} \quad = p, \end{aligned}$$

wobei wir die strikte Jensen Ungleichung für die konkave Funktion $f(x) = \sqrt[c]{x}$ angewendet haben. Also ist $\mathbb{E}_p[T_B(X)] < p$ und T_B ist somit nicht erwartungstreu.