D–MATH

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-2604-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. **[22 Punkte]**

Beantworten sie die folgenden Multiple Choice Fragen auf dem beigelegten Antwortformular.

Es können mehrere Antworten pro Frage richtig sein. Jedes richtig gesetzte Kreuz gibt 2 Punkte und für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 2 Punkte abgezogen. Die minimale Anzahl Punkte für die gesamte Aufgabe ist 0.

(a) Ein statistischer Test für die Nullhypothese $\Theta_0 \subset \Theta$ hat an der Stelle $\theta \in \Theta_0^c$ die Macht 0.4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art gleich 0.6.

ii. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art gleich 0.4.

iii. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art gleich 0.6.

iv. Unter der Annahme, dass θ der wahre Parameter ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art gleich 0.4.

(b) Seien T_1 und T_2 i.i.d. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilt für ein $\lambda > 0$. Dann gilt

i. $\max\{T_1, T_2\} \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$.

ii. $\max\{T_1, T_2\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda/2)$.

iii. Weder i. noch ii. sind wahr.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i. Wenn X_1 und X_2 Bernoulli-verteilt sind mit dem gleichen Parameter $p \in (0, 1)$, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2, p)$.

ii. Wenn X_1 und X_2 unabhängig und identisch Poisson-verteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$, dann ist $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt mit Parameter 2λ.

iii. Wenn $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(m, p_2)$ unabhängig sind, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n + m, p_1 + p_2)$.

iv. Wenn X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen sind mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

(d) Betrachten Sie zwei Ereignisse A, B mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

ii. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

iii. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

iv. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c)$

(e) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$
ii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$
iii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X < n)$
iv. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$

(f) Wir betrachten ein Aquarium mit 8 Fischen, 3 davon sind Forellen, 5 sind Barsche. Wir fangen zufällig 3 Fische aus dem Aquarium. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer davon eine Forelle ist?

i. $\frac{16}{28}$
ii. $\frac{15}{28}$
iii. $\frac{14}{28}$
iv. $\frac{13}{28}$

(g) Sei X eine Ber(p) verteilte Zufallsvariable für ein $p \in (0,1)$ und sei $Y = 2X - 1$. Was ist die charakteristische Funktion von Y?

i. $\varphi_Y(u) = pe^{-iu} + (1-p)e^{iu}$
ii. $\varphi_Y(u) = pe^{iu} + (1-p)e^{-iu}$
iii. $\varphi_Y(u) = e^{-iu(p-(1-p))}$
iv. $\varphi_Y(u) = e^{-iu(-p+(1-p))}$

(h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{\sigma^2}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu)$?

i. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{n-1}, \frac{n^2}{(n-1)^2\sigma^2})$
ii. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{n-1}, \frac{n}{(n-1)^2\sigma^2})$
iii. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{(n-1)\sigma^2}, \frac{n}{(n-1)^2\sigma^2})$
iv. $\mathcal{N}(\frac{\mu}{(n-1)\sigma^2}, \frac{n^2}{(n-1)^2\sigma^2})$

(i) Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, sei $m = \mathbb{E}[X_1]$, und bezeichne $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\mathbb{P}(\cap_{k \geq n_0}\{|\frac{S_k}{k} - m| < \varepsilon\}) = 1$.
ii. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} \cap_{k \geq n} \{|\frac{S_k}{k} - m| < \varepsilon\}) = 1$.
iii. Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m$.

2. [15 Punkte]

In zwei Urnen befinden sich je vier faire Würfel in den Farben: Blau, Grün, Rot, Schwarz. Aus jeder Urne wird zufällig ein Würfel gezogen und damit gewürfelt.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an, um dieses Zufallsexperiment zu beschreiben.

(b) Unter der Annahme, dass wir das Zufallsexperiment durch ein Laplace-Modell modellieren können, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfel die gleiche Farbe haben aber unterschiedliche Zahlen aufzeigen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Sechsen geworfen wurden,

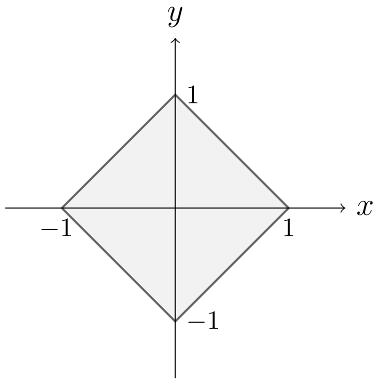
(c) wenn man keine weiteren Angaben hat.

(d) bedingt auf das Ereignis, dass mindestens eine Sechs geworfen wurde.

(e) bedingt auf das Ereignis, dass mindestens eine Sechs mit einem roten Würfel geworfen wurde.

3. [16 Punkte]

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X,Y}$. Die Dichtefunktion sei konstant gleich c auf dem grauen Bereich und 0 ausserhalb.



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie Randdichte f_X von X und die Randdichte f_Y von Y.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = \frac{1}{1-X}$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

4. [9 Punkte]

Betrachten Sie unabhängige Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0) = p_k.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) \in \{0, 1\}$$

und geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, so dass $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) = 1$. Untersuchen Sie die Fälle $p_k = \frac{1}{k}$ und $p_k = \frac{1}{k^2}$.

5. [16 Punkte]

Zufällig aus einer Population auszuwählende Individuen haben unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ eine interessierende Eigenschaft "Erfolg". Wir schätzen den Erfolgsparameter p mit zwei verschiedenen Experimenten:

A : n Individuen, X = Anzahl Erfolge,
B : n Gruppen mit jeweils $c \geq 2$ Individuen, X = Anzahl Gruppen mit mindestens 1 Misserfolg.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X bei Experiment A und B.

(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p in beiden Experimenten A und B.

(c) Sind die Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu in beiden Experimenten A und B? Begründen Sie Ihre Antwort.