Probability and Statistics
FS 2018
Prüfung
23.01.2019
Dauer: 180 Minuten

Name: ________________________

Legi-Nummer: ________________________

- Diese Prüfung enthält 16 Seiten (zusammen mit dem Deckblatt) und 10 Aufgaben. Das Formelblatt wird separat verteilt.
- Begründen Sie ihre Lösungen sorgsam. Ergebnisse ohne Rechenwege und Begründungen geben KEINE Punkte.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Punktetabelle (wird von den Korrektoren beschriftet)

Aufgabe	Punkte	erreichte Punktzahl
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10 ($*$)	10	
Gesamt	90	

Die maximal erreichbare Punktzahl ist 90. Aufgabe 10 ist eine **Bonusaufgabe**.

Viel Erfolg

1. (10 points) Franz und Peter lassen sich im Fach Stochastik prüfen. Jede Prüfung wird mit einer der drei Noten A, B oder C bewertet. Die beiden schätzen den Ausgang ihrer Prüfungen folgendermassen ein: Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter ein B bekommt, ist 0.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Franz ein B erhält, ist 0.4. Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der beiden ein A, jedoch mindestens einer der beiden ein B bekommt, ist 0.1. Wie gross ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der beiden ein B und keiner ein C erhält? Definieren Sie zur Beantwortung dieser Frage zunächst einen geeigneten Grundraum.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{A, B, C\} \times \{B\} = \{(A, B), (B, B), (C, B)\} \\
E_2 &= \{B\} \times \{A, B, C\} = \{(B, A), (B, B), (B, C)\} \\
E_3 &= \{(C, B), (B, C), (B, B)\} \\
E_4 &= \{(A, B), (B, A), (B, B)\}
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung gilt

$$P[E_1] = 0.3, \ P[E_2] = 0.4, \ P[E_3] = 0.1.$$

Wir wollen $P[E_4]$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
P[E_4] &= P[\{(A, B), (B, B)\}] + P[\{(B, A)\}] \\
&= P[E_1 \setminus \{(C, B)\}] + P[E_2 \setminus \{(B, B), (B, C)\}] \\
&= P[E_1] - P[\{(C, B)\}] + P[E_2] - P[\{(B, B), (B, C)\}] \\
&= P[E_1] + P[E_2] - P[E_3] \\
&= 0.6
\end{aligned}
$$

2. (10 points) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir definieren die *charakteristische Funktion von X* durch

$$\begin{aligned} \phi_X &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \phi_X(t) := E\left[e^{itX}\right] = \int e^{itx}\,\mu(dx), \end{aligned}$$

wobei μ die Verteilung von X ist (die letzte Gleichung folgt aus dem Transformationssatz für Masse). Sie stellt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel dar, welches die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt (charakterisiert).

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, falls X und $-X$ dieselbe Verteilung haben,
b) $|\phi_X(t)| \leq 1$,
c) ϕ_X ist stetig,
d) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,
e) $\phi'_X(0) = iE[X]$, falls $E[|X|] < \infty$, wobei Sie ohne Begründung Integration und Differentiation vertauschen dürfen.

Lösung:

a) Da X und $-X$ die gleiche Verteilungen besitzen, folgt

$$\phi_X(t) = \phi_{-X}(t) = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)} \Rightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R}.$$

b) $|\phi_X(t)| = \left|E[e^{itX}]\right| \leq E[\left|e^{itX}\right|] = E[1] = 1.$

c) Stetigkeit von ϕ_X: sei (t_n) ein Folge in $\mathbb{R}$ die gegen $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := e^{it_nx}$ punktweise gegen $f(x) := e^{itx}$. Da die konstante Funktion 1 eine integrierbare Majorante für (f_n) darstellt, können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \phi_X(t_n) &= \int e^{it_nx}\,\mu(dx) \\ &= \int f_n(x)\,\mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\,\mu(dx) = \int e^{itx}\,\mu(dx) = \phi_X(t). \end{aligned}$$

d) Schliesslich gilt noch

$$\phi_{aX+b}(t) = E[e^{it(aX+b)}] = e^{itb}E[e^{itaX}] = e^{itb}\phi_X(at).$$

e) Nach Ableiten gilt

$$\phi'_X(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mu(dx) = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}\mu(dx),$$

folglich ist

$$\phi'(0) = i\int_{-\infty}^{\infty} x\mu(dx) = iE[X].$$

3. (10 points) Berechnen Sie jeweils die charakteristische Funktion ϕ_X der Zufallsvariablen X, falls ...

   a) X Laplace-verteilt (mit Parameter $\lambda > 0$) ist, also die Dichte f besitzt mit
$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

   b) X eine Dreiecksverteilung hat, also die Dichte g besitzt mit
$$g(x) = (1 - |x|)1_{[-1,1]}(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

   c) X normalverteilt ist mit Erwartungsewert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 > 0$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E[e^{itX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \cdot e^{itx} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+\lambda)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-x(it-\lambda)} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{it+\lambda} + \frac{1}{\lambda - it} \right) \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.
\end{aligned}$$

b) Für $t \neq 0$ ist:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E[e^{itX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(1 - |x|)1_{[-1,1]}(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} e^{itx} dx + \int_{-1}^{0} x e^{itx} dx - \int_{0}^{1} x e^{itx} dx \\
&= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \right) + \left(\frac{1}{t^2} + \frac{e^{-it}}{it} - \frac{e^{-it}}{t^2} \right) - \left(\frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) \\
&= \frac{2}{t^2}(1 - \cos(t)).
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist $\phi_X(0) = 1$.

c)

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E[e^{itX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(itx) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2 + 2\sigma^2 it}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x - \sigma^2 it)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma^2}\right) dz}_{=1} \\
&= \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

4. (10 points) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$, $E[Y^2] < \infty$ und $\operatorname{Var}[X] > 0$. Die Korrelation von X und Y sei mit $\rho := \rho(X,Y)$ bezeichnet. Wir wollen Y vorhersagen, einerseits mit einer Konstanten β und andererseits mit einer linearen Funktion $\alpha X + \beta$. Dabei wollen wir, dass der mittlere quadratische Fehler $E[(Y - \text{Prognose})^2]$ minimal wird.

   a) Bestimmen Sie β so, dass $E[(Y-\beta)^2]$ minimal wird und geben Sie das zugehörige Minimum an.

   b) Bestimmen Sie α und β so, dass $E[(Y-(\alpha X+\beta))^2]$ minimal wird und geben Sie auch hier das zugehörige Minimum an.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[(Y-\beta)^2] &= E[((Y-E[Y]) + (E[Y]-\beta))^2] \\ &= E[(Y-E[Y])^2 + 2E[(Y-E[Y])(E[Y]-\beta)] + (E[Y]-\beta)^2] \\ &= E[(Y-E[Y])^2] + 2\underbrace{E[(Y-E[Y])(E[Y]-\beta)]}_{=(E[Y]-\beta)\,E[Y-E[Y]]=0} + (E[Y]-\beta)^2, \end{aligned}$$

also ist $E[(Y-\beta)^2]$ minimal, wenn der letzte Term oben verschwindet, also wenn $\beta = E[Y]$. Das Minimum ist dann $E[(Y-\beta)^2] = \operatorname{Var}[Y]$.
Alternativ kann man direkt

$$E[(Y-\beta)^2] = \operatorname{Var}[Y-\beta] + (E[Y-\beta])^2 = \operatorname{Var}[Y-\beta] + (E[Y]-\beta)^2$$

verwenden, was wiederum für $\beta = E[Y]$ minimal ist, welches $E[(Y-\beta)^2] = \operatorname{Var}[Y]$ als Minimum ergibt.

b) Gesucht sind nun α und β, die den Ausdruck

$$\begin{aligned} E[(Y-(\alpha X+\beta))^2] &= \operatorname{Var}[Y-(\alpha X+\beta)] + E[Y-(\alpha X+\beta)]^2 \\ &= \operatorname{Var}[Y-\alpha X] + E[Y-(\alpha X+\beta)]^2 \end{aligned}$$

minimieren. Da der erste Term unabhängig von β ist, braucht β nur den zweiten Summanden zu minimieren. Offensichtlich ist

$$\beta = E[Y] - \alpha E[X]$$

die richtige Wahl, da dann $E[Y-(\alpha X+\beta)]^2\ (\geq 0)$ verschwindet. Um den anderen Term zu minimieren formen wir zunächst um, aus der Bilinearität der Kovarianz folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[Y-\alpha X] &= \operatorname{Cov}(Y-\alpha X, Y-\alpha X) \\ &= \operatorname{Var}[Y] + \alpha^2 \operatorname{Var}[X] - 2\alpha \operatorname{Cov}(X,Y), \end{aligned}$$

Ableiten nach α und Nullsetzen

$$\frac{d}{d\alpha}\operatorname{Var}[Y-\alpha X] = 2\alpha \operatorname{Var}[X] - 2\operatorname{Cov}(X,Y) = 0,$$

ergibt $\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}[X]}$. Mit dieser Wahl von α und β ergibt sich dann das Minimum zu

$$\begin{aligned}
&E[(Y - (\alpha X + \beta))^2] \\
&= \mathrm{Var}[Y] + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]^2}\mathrm{Var}[X] - 2\,\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}[X]}\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\
&= \mathrm{Var}[Y] - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]} = \mathrm{Var}[Y]\left(1 - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}\right) \\
&= \mathrm{Var}[Y](1 - \rho^2).
\end{aligned} \tag{1}$$

5. (10 points) Hundert Würfe einer Münze haben sechzigmal Kopf ergeben. Wir wollen analysieren, ob diese Münze fair sein kann. **Hinweis: Benutzen Sie die Normalapproximation bei dieser Aufgabe.**

   a) Führen Sie einen zweiseitigen Test zum 1%-Niveau durch. Wird die Nullhypothese verworfen?

   b) Wie oft darf Kopf in hundert Würfen höchstens auftreten, so dass wir die Annahme, dass die Münze fair ist, auf einem 1%-Niveau nicht verwerfen müssen? Führen Sie hier einen einseitigen Test durch.

   c) Geben Sie ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit an, in einem einzigen Wurf dieser Münze Kopf zu erhalten.

   Hinweis: Runden Sie geeignet. Die Werte $\Phi(x)$ einer Standardnormalverteilung sind:

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Ablesebeispiel: $\Phi(1.02) = 0.8461$.

Lösung:

a) zweiseitiger Test:

$$H_0 : p = p_0 = 1/2,$$
$$H_1 : p \neq p_0.$$

Unter H_0 ist $E[X] = np_0 = 50$ und $\sigma_X = \sqrt{np_0(1-p_0)} = 5$. Bestimmen des Verwerfungsbereiches: Für c_1, c_2 soll

$$\begin{aligned} 0.01 &\geq P_{H_0}[X \notin [c_1, c_2]] = 1 - P_{H_0}[X \in [c_1, c_2]] \\ &= 1 - P_{H_0}\left[\frac{c_1 - 50}{5} \leq \frac{X - E_{H_0}[X]}{\sigma_X} \leq \frac{c_2 - 50}{5}\right] \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right) + \Phi\left(\frac{c_1 - 50}{5}\right). \end{aligned}$$

Um den Verwerfungsbereich gross zu machen, muss das Intervall $[c_1, c_2]$ möglichst kurz werden. Wähle daher

$$\frac{c_1 - 50}{5} = -\frac{c_2 - 50}{5}.$$

Dann

$$0.01 \geq 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right)$$

also $\Phi\left(\frac{c_2-50}{5}\right) \geq 0.995$ und $c_2 \geq 62.9$. Der Verwerfungsbereich ist also durch

$$K_{1\%} = [0, 37] \cup [63, 100]$$

gegeben und die Nullhypothese wird zum Signifikanzniveau 1% nicht verworfen.

b) Einseitiger Test:

$$H_0 : p = p_0 = 1/2,$$
$$H_1 : p \geq p_0.$$

Der Verwerfungsbereich durch die Ungleichung

$$0.01 \geq P_{H_0}[X > c] = 1 - \Phi\left(\frac{c - 50}{5}\right)$$

bestimmt. Also $c \geq 61.5$ und $K_{1\%} = [62, 100]$. Damit der Test auf einem 1%-Niveau die Annahme einer fairen Münze nicht verwirft, darf höchstens 61 mal Kopf fallen.

c)

$$\frac{x}{n} \pm \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{x}{n}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)\frac{1}{n}} \approx 0.5 \quad \text{oder} \quad 0.7$$

also $[0.5, 0.7]$.

6. (10 points) Es seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2 y} & \text{für } x \geq 1,\ y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f_{X,Y}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Berechnen Sie die Randdichte von X.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq \frac{1}{nX^2})$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx &= \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-x^2 y} dydx \\ &= \int_{x=1}^{\infty} \left[\frac{-e^{-x^2 y}}{x^2} \right]_{y=0}^{\infty} dx = \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1. \end{aligned}$$

b)

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{1}{x^2}.$$

c)

$$\begin{aligned} P\left[Y \leq \frac{1}{nX^2}\right] &= \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{1}{nx^2}} e^{-x^2 y} dydx = \int_{x=1}^{\infty} \left[\frac{-e^{-x^2 y}}{x^2} \right]_{y=0}^{\frac{1}{nx^2}} dx \\ &= (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 - e^{-\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

7. (10 points) Die Anzahl Y defekter Stellen auf einem Chip sei poissonverteilt mit Parameter λ. Sei X die Anzahl der Fehler in einem bestimmten Teilgebiet des Chips. Wir nehmen an, dass sich jeder der insgesamt Y Fehler unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ in diesem Teilgebiet befindet.

   a) Bestimmen Sie die Verteilung von X und die von $Y - X$.

   b) Sind X und $Y - X$ unabhängig voneinander?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
P[X = j] &= \sum_{k \geq j} P[X = j | Y = k] \cdot P[Y = k] \\
&= \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$.

Für die Zufallsvariable $Y - X$ gilt, da

$$P[Y - X = j] = \sum_{k \geq j} P[Y - X = j, Y = k] = \sum_{k \geq j} P[X = k - j | Y = k] \cdot P[Y = k],$$

dass alle weiteren Rechenschritte identisch zu denen oben sind, jedoch müssen wir überall p und $(1-p)$ vertauschen, wodurch als Verteilung

$$P[Y - X = j] = e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j}$$

herauskommt. Mit anderen Worten, $Y - X$ ist poissonverteilt mit Parameter $(1 - p)\lambda$.

b) Für $k, j \geq 0$

$$
\begin{aligned}
P[Y - X = k, X = j] &= P[Y = k + j, X = j] = P[X = j | Y = k + j] \cdot P[Y = k + j] \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
&= \left(e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!} \right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \right) \\
&= P[X = j] \cdot P[Y - X = k],
\end{aligned}
$$

woraus die Unabhängigkeit von X und $Y - X$ folgt.

8. (10 points) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, entspreche dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf".

   a) Drücken Sie mit Hilfe der A_i die folgenden Ereignisse als Mengen $A \in \mathcal{A}$ aus:

      (i) Ψ tritt nie auf

      (ii) Ψ tritt immer wieder auf

      (iii) Ψ tritt schliesslich nicht mehr auf

      (iv) Ψ tritt genau zweimal auf

      (v) Ψ tritt höchstens in ungeraden Zeitpunkten auf

   b) Welche der Ereignisse aus (i)–(v) gehören stets zur asymptotischen σ-Algebra

$$\mathcal{A}^* := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma(\{A_k; k \geq i\})?$$

Lösung:

i)

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c$$

ii)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

iii)

$$\left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \right]^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c \right)$$

iv)

$$\bigcup_{j \neq k} \left[(A_j \cap A_k) \bigcap_{i \notin \{j,k\}} A_i^c \right]$$

v)

$$\bigcap_{k \text{ gerade}} A_k^c = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2k} \right)^c$$

Nur die Ereignisse in ii) und iii) gehören zu $\mathcal{A}^*$.

9. (10 points) Sei $C \in (0, \infty)$ und $0 \leq \lambda_n \leq C$. Ferner seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_n, d.h. $P(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}$ für $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Zeigen Sie, dass

$$P(X_n \geq n \text{ für unendlich viele } n) = 0$$

gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C^k}{k!} = Ce^C < \infty.
\end{aligned}$$

Daher folgt nach dem ersten Teil des Lemmas von Borel-Cantelli die Behauptung.

10. (10 points) $(*)$ Seien $X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n \log n}$ und $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ das schwache, aber nicht das starke Gesetz der grossen Zahlen erfüllt.

Hinweis: Das Integral $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c, c \in \mathbb{R}$ kann hilfreich sein.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass das starke Gesetz der grossen Zahlen nicht gilt. Betrachte die Ereignisse $A_n = \{|X_n| \geq n\}, n \geq 2$. Dann gilt

$$P[A_n] = 1/(n \log n) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} P[A_n] = \infty.$$

Dies folgt z.B. aus:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \geq \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = [\log|\log x|]_2^{\infty} = \infty,$$

da die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x \log x}$ für $x > 2$ positiv und monoton fallend ist.

Aus der Divergenz der Reihe und der Unabhängigkeit der X_i folgt mit dem zweiten Teil des Borel-Cantelli Lemmas, dass die Ereignisse A_n unendlich oft eintreten mit Wahrscheinlichkeit 1. Wenn das starke Gesetz gelten würde, müsste $S_n/n \to 0, P$-f.s. Dann müsste es zu fast jedem ω und jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\omega, \epsilon)$ geben, so dass wenn $n \geq n_0$, dann $|S_n(\omega)| \leq n\epsilon$. Dann folgt aber für $n \geq n_0$: $|X_{n+1}| \leq |S_{n+1}| + |S_n| \leq (n+1)\epsilon + n\epsilon \leq 2(n+1)\epsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zu dem unendlich oft Eintreten der A_n.

Wir zeigen jetzt, dass das schwache Gesetz der grossen Zahlen gilt. Es gilt: $\mathrm{Var}(X_k) = k/\log k$. Da die Funktion $x/\log x$ ein lokales Minimum bei $x = e$ hat, erhalten wir mit der Chebychev Ungleichung für $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P[|S_n/n| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(X_k) &\leq \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \Big(\frac{2}{\log 2} + \sum_{k=3}^{n} (k/\log k) \Big) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2 n^2 \log 2} + \frac{(n-3)n}{\epsilon^2 n^2 \log(n)} \to 0, \ n \to \infty. \end{aligned}$$