Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. [22 Punkte]

Beantworten sie die folgenden Multiple Choice Fragen auf dem beigelegten Antwortformular.

Es können mehrere Antworten pro Frage richtig sein. Jedes richtig gesetzte Kreuz gibt 2 Punkte und für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 2 Punkte abgezogen. Die minimale Anzahl Punkte für die gesamte Aufgabe ist 0.

(a) Sei $\alpha \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art, und β die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn die Alternative richtig ist,

i. $1-\beta$.
ii. $1-\alpha$.
iii. β.
iv. α.

Lösung:

$\boxed{\text{i.}}$

(b) Seien T_1 und T_2 unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt

i. $\min\{T_1, T_2\}$ ist exponentialverteilt mit Parameter 2λ.
ii. $\min\{T_1, T_2\}$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda/2$.
iii. $\min\{T_1, T_2\}$ ist nicht exponentialverteilt.

Lösung:

$\boxed{\text{i.}}$

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Für alle $i \in \mathbb{N}$ entspricht $A_i \in \mathcal{A}$ dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf". Welche der folgenden Mengen drücken das Ereignis "Ψ tritt eine gerade Anzahl mal auf"?

i. $$\bigcap_{\substack{J \subseteq \mathbb{N} \\ |J| \in \{2,4,6,\dots\}}} \left(\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus J} A_i^c \right) \right)$$

ii. $$\bigcup_{\substack{J \subseteq \mathbb{N} \\ |J| \in \{2,4,6,\dots\}}} \left(\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N} \setminus J} A_i^c \right) \right)$$

iii. $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \le k_1 < \dots < k_{2n}} \left((A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_{2n}}) \cap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N} \setminus \{k_1, \dots, k_{2n}\}} A_j^c \right) \right)$$

iv. $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{1 \le k_1 < \dots < k_{2n}} \left((A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_{2n}}) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N} \setminus \{k_1, \dots, k_{2n}\}} A_j^c \right) \right)$$

Lösung:

ii. und iii.

(d) Betrachten Sie zwei Ereignisse A, B mit $\mathbb{P}(B^c) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
ii. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A|B^c)(1 - \mathbb{P}(B))$
iii. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B)$
iv. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$

Lösung:

i. und ii.

(e) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$
ii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$
iii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X < n)$
iv. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$

Lösung:

ii.

(f) Wir betrachten ein Aquarium mit 8 Fischen, 3 davon sind Forellen, 5 sind Barsche. Wir fangen zufällig 3 Fische aus dem Aquarium. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir zuerst einen Barsch, dann eine Forelle, und dann wieder ein Barsch fangen?

i. $\frac{4}{28}$
ii. $\frac{5}{28}$
iii. $\frac{6}{28}$
iv. $\frac{7}{28}$

Lösung:

ii.

(g) Sei X eine Poi(λ)-verteilte Zufallsvariable für ein $\lambda > 0$ und sei $Y = 4X - 2$. Was ist die Momenterzeugende Funktion von Y?

i. $M_Y(t) = e^{2t}e^{-\lambda(e^{4t}-1)}$
ii. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{e^{4t\lambda}}$
iii. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{\lambda(e^{4t}-1)}$
iv. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{-\lambda(e^{4t}-1)}$

Lösung:

iii.

(h) Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{\sigma^2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu)$?

i. $\mathcal{N}(0, 1)$
ii. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$
iii. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma^2})$
iv. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n\sigma^2})$

Lösung:

iv.

(i) Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\mathrm{Bin}(4, p)$ verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter $p \in (0, 1)$ und sei $T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_n}{4}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i. T_n ist ein erwartungstreuer Schätzer für p.
ii. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konsistent für p.
iii. Weder i. noch ii. sind wahr.

Lösung:

iii.

2. [9 Punkte]

Wir betrachten eine Urne, in der sich drei Würfel befinden. Würfel 1 und 2 sind gezinkt, während Würfel 3 fair ist. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten der beiden gezinkten Würfel an:

	1	2	3	4	5	6
Würfel 1	1/18	2/9	1/6	1/18	1/3	1/6
Würfel 2	2/9	0	1/2	1/9	1/18	1/9

Ein Würfel wird zufällig gezogen und 2 mal nacheinander geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an, um dieses Zufallsexperiment zu beschreiben.
Lösung:

Aus der Urne kann man drei verschiedene Würfel ziehen, und mit jedem Würfel 6 Zahlen würfeln. Der Grundraum ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(w, x_1, x_2)\colon w \in \{1,2,3\}, x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}\\ &= \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4,5,6\}^2.\end{aligned}$$

Der Würfel zeigt 3 und 5. Gegeben dieser Beobachtung bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass

(b) Würfel 1 gezogen wurde.
Lösung:

Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass eine 3 und eine 5 gewürfelt werden. Aus dem Satz von Bayes gilt

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 1 wurde gezogen}|A) = \frac{\mathbb{P}(A|\text{Würfel 1 wurde gezogen})\mathbb{P}(\text{Würfel 1 wurde gezogen})}{\mathbb{P}(A)}.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(A|\text{Würfel 1 wurde gezogen}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}, \quad \textbf{(1P)}$$

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 1 wurde gezogen}) = \frac{1}{3}, \quad \textbf{(1P)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A|\text{Würfel } i \text{ wurde gezogen})\mathbb{P}(\text{Würfel } i \text{ wurde gezogen})\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{108} = \frac{1}{27}. \quad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 1 gezogen wurde}|A) = \frac{\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{2}. \quad \textbf{(1P)}$$

(c) Würfel 2 gezogen wurde.
Lösung:

Wir benutzen wieder den Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 2 wurde gezogen}|A) = \frac{\mathbb{P}(A|\text{Würfel 2 wurde gezogen})\mathbb{P}(\text{Würfel 2 wurde gezogen})}{\mathbb{P}(A)}.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(A|\text{Würfel 2 wurde gezogen}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18} = \frac{1}{36}, \quad \textbf{(1P)}$$

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 2 wurde gezogen}) = \frac{1}{3}.$$

Somit ist

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 2 gezogen wurde}|A) = \frac{\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{4}. \quad \textbf{(1P)}$$

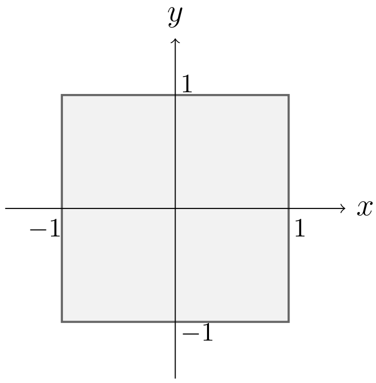
(d) der faire Würfel (d.h. Würfel 3) gezogen wurde.
Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der faire Würfel gezogen wurde ist

$$\mathbb{P}(\text{Würfel 3 wurde gezogen wurde}|A)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{Würfel 1 wurde gezogen}|A) - \mathbb{P}(\text{Würfel 2 wurde gezogen}|A) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \quad \textbf{(2P)}$$

3. [16 Punkte]

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X,Y}$. Die Dichtefunktion sei konstant gleich c auf dem grauen Bereich und 0 ausserhalb.



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

Lösung:

Wir bezeichnen das Quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ mit Q, wobei

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

Dann ist laut Angabe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{falls } (x,y) \in Q, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Fläche von Q ist 4, daraus folgt

$$\int\int_Q c\,dxdy = 4c. \quad \textbf{(1P)}$$

Wegen der Normierungseigenschaft wollen wir also, dass $1 = 4c$ und somit gilt $c = \frac{1}{4}$. **(1P)**

(b) Bestimmen Sie Randdichte f_X von X und die Randdichte f_Y von Y.

Lösung:

$$f_X(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{2}, & \text{falls } -1 \le x \le 1 \quad \textbf{(1P)} \\ 0, & \text{sonst} \quad \textbf{(1P)} \end{cases}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{2}, & \text{falls } -1 \le y \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad \textbf{(1P)}$$

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

Lösung:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y\, dy = 0. \quad \textbf{(1P)}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2\, dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad \textbf{(1P)}$$

Somit gilt $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{3}$. **(1P)**
Alternativ können $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathrm{Var}(Y)$ auch direkt aus der Formelsammlung abgelesen werden.

(d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Da $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$. **(1P)**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = \frac{1}{4}\int\int_Q xy\, dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\, dxdy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, dx \int_{-1}^{1} y\, dy = 0. \quad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, d.h. X und Y sind unkorreliert. Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, denn $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ **(1P)** :

$$\begin{aligned}f_X(x)f_Y(y) &= \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\right)\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y) \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{1}_Q(x, y) = f_{X,Y}(x, y).\end{aligned}$$

(e) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1) &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \mathbb{P}((X, Y) \in B_1(0)) \\ &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \int_{B_1(0)} f_{X,Y}(x, y) d(x, y) = \tfrac{1}{4}\lambda(B_1(0)) = \tfrac{\pi}{4}. \quad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

4. [8 Punkte]

Betrachten Sie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von i.i.d. exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1. Sei $\alpha > 0$ und

$$A_n = \{X_n > \alpha \ln(n)\}.$$

(a) Im Fall, dass $\alpha \leq 1$, zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass unendliche viele A_n eintreten gleich 1 ist.

Lösung:

Die Ereignisse A_n sind unabhängig. Es gilt

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n > \alpha \ln(n)) = \int_{\alpha\ln(n)}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-\alpha \ln(n)} = n^{-\alpha}. \quad \textbf{(1P)}$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty, \quad \textbf{(1P)}$$

falls $\alpha \leq 1$. Aus der zweiten Aussage des Borel-Cantelli-Lemmas folgt

$$\mathbb{P}(\text{unendlich viele } A_n \text{treten ein}) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 1. \quad \textbf{(1P)}$$

(b) Im Fall, dass $\alpha > 1$, zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nur endlich viele A_n eintreten gleich 1 ist.

Lösung:

Falls $\alpha > 1$ ist, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty. \quad \textbf{(1P)}$$

Aus der ersten Aussage des Borel-Cantelli-Lemmas folgt

$$\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 0. \quad \textbf{(1P)}$$

Also

$$\mathbb{P}(\text{nur endlich viele } A_n \text{treten ein}) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} A_k^c) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 1. \quad \textbf{(1P)}$$

5. [22 Punkte]

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit uniformer Verteilung auf $[0, \theta]$ für ein unbekanntes $\theta > 0$. Wir setzen $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von M_n in Abhängigkeit von θ.

Lösung:

Wegen der Unabhängigkeitseigenschaft ist die Verteilungsfunktion von M_n für $x \in [0, \theta]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{\theta, M_n}(x) &= \mathbb{P}_\theta(M_n \leq x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \mathbb{P}_\theta(X_1 \leq x, \dots X_n \leq x) \\ &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_1 \leq x) = \prod_{i=1}^n \frac{x}{\theta} \\ &= \theta^{-n} x^n. \quad \textbf{(1P)} \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$F_{\theta, M_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \theta^{-n} x^n, & x \in [0, \theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}. \quad \textbf{(1P)}$$

Durch Ableiten erhält man die Dichtefunktion von M_n:

$$f_{\theta, M_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{\theta, M_n}(x) = n \theta^{-n} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x). \quad \textbf{(2P)}$$

(b) Zeigen Sie, dass M_n der Maximum-Likelihood Schätzer für θ basierend auf den Beobachtungen $(X_1, \dots, X_n)$ ist.

Lösung:

Die Likelihood-Funktion ist

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x_i) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \theta^{-n} \mathbb{1}_{[0, \max_i x_i]}(\theta).$$

Diese Funktion ist klarerweise maximiert für $\theta = \max_i x_i$. **(1P)** Somit ist M_n der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

(c) Ist der Schätzer M_n erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Der Erwartungswert von M_n ist

$$\mathbb{E}_\theta[M_n] = \int_{\mathbb{R}} x f_{\theta, M_n}(x) \, \mathrm{d}x \overset{\textbf{(1P)}}{=} \int_0^\theta x n \theta^{-n} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = n \theta^{-n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta. \quad \textbf{(1P)}$$

Da $\mathbb{E}_\theta[M_n] \neq \theta$ ist, ist M_n kein erwartungstreuer Schätzer für θ. **(1P)**

(d) Zeigen Sie, dass für alle θ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(M_n) = 0$.
Lösung:

Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[M_n^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{\theta,M_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\theta x^2 n\theta^{-n}x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= n\theta^{-n}\int_0^\theta x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}\theta^2. \quad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Wir finden

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\theta(M_n) =& \mathbb{E}_\theta[M_n^2] - \mathbb{E}_\theta[M_n]^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \\ &= \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \theta^2\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \theta^2\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}. \quad \textbf{(2P)}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(M_n) = 0. \quad \textbf{(1P)}$$

(e) Ist der Schätzer M_n konsistent für θ? Begründen Sie Ihre Antwort.
Lösung:

Beobachte zuerst, dass für alle Zufallsvariablen X, Y gilt

$$\{|X+Y| > \varepsilon\} \subseteq \{|X| + |Y| > \varepsilon\}. \quad \textbf{(1P)}$$

Daher gilt

$$\mathbb{P}(|X+Y| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X| + |Y| > \varepsilon). \quad \textbf{(1P)}$$

Für alle $\theta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, und alle $\varepsilon > 0$ haben wir somit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(|M_n - \theta| > \varepsilon) &= \mathbb{P}_\theta(|M_n - \tfrac{n}{n+1}\theta - \tfrac{1}{n+1}\theta| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}_\theta(|M_n - \tfrac{n}{n+1}\theta| + |\tfrac{1}{n+1}\theta| > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_\theta(|M_n - \tfrac{n}{n+1}\theta| > \varepsilon - |\tfrac{1}{n+1}\theta|). \quad \textbf{(1P)}\end{aligned}$$

Die Chebyshev-Ungleichung ergibt für alle genügend grosse $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{P}_\theta(|M_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}_\theta(M_n)}{(\varepsilon - \frac{\theta}{n+1})^2}. \quad \textbf{(2P)}$$

Aus Teilaufgabe d) und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon - \frac{\theta}{n+1} = \varepsilon$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(|M_n - \theta| > \varepsilon) = \tfrac{0}{1} = 0. \quad \textbf{(1P)} \tag{1}$$

Somit ist M_n ein konstistenter Schätzer für θ.