D–MATH

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-2604-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. [22 Punkte]

Kreuzen Sie bei den folgenden Fragen die richtigen Antworten an; Sie müssen Ihre Wahl nicht begründen. Es können mehrere Antworten richtig sein.

Bitte verwenden Sie für Ihre Antworten das ausgedruckte Formular. *Bei jeder Teilaufgabe gibt es 2 Punkte für jedes richtig gesetzte Kreuz und für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 2 Punkte abgezogen. Pro Teilaufgabe können insgesamt höchstens 2 Punkte abgezogen werden. Die minimale Anzahl Punkte für die gesamte Aufgabe ist 0.*

(a) Sei $\alpha \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art, und β die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn die Alternative richtig ist,

i. $1-\beta$.
ii. $1-\alpha$.
iii. β.
iv. α.

(b) Seien T_1 und T_2 unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt

i. $\min\{T_1, T_2\}$ ist exponentialverteilt mit Parameter 2λ.
ii. $\min\{T_1, T_2\}$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda/2$.
iii. $\min\{T_1, T_2\}$ ist nicht exponentialverteilt.

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Für alle $i \in \mathbb{N}$ entspricht $A_i \in \mathcal{A}$ dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf". Welche der folgenden Mengen drücken das Ereignis "Ψ tritt eine gerade Anzahl mal auf"?

i. $$\bigcap_{\substack{J\subseteq\mathbb{N} \\ |J|\in\{2,4,6,\dots\}}} \left(\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus J} A_i^c\right)\right)$$

ii. $$\bigcup_{\substack{J\subseteq\mathbb{N} \\ |J|\in\{2,4,6,\dots\}}} \left(\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}\setminus J} A_i^c\right)\right)$$

iii. $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\le k_1<\dots<k_{2n}} (A_{k_1}\cap\dots\cap A_{k_{2n}}) \cap \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k_1,\dots,k_{2n}\}} A_j^c\right)$$

iv. $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{1\le k_1<\dots<k_{2n}} (A_{k_1}\cup\dots\cup A_{k_{2n}}) \cup \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k_1,\dots,k_{2n}\}} A_j^c\right)$$

(d) Betrachten Sie zwei Ereignisse A, B. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B)$
ii. $\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A|B^c)(1-\mathbb{P}(B))$
iii. $\mathbb{P}(A\cap B^c) = 1-\mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B)$
iv. $\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$

(e) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

i. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$
ii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$
iii. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X < n)$
iv. $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$

(f) Wir betrachten ein Aquarium mit 8 Fischen, 3 davon sind Forellen, 5 sind Barsche. Wir fangen zufällig 3 Fische aus dem Aquarium. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir zuerst einen Barsch, dann eine Forelle, und dann wieder ein Barsch fangen?

i. $\frac{4}{28}$
ii. $\frac{5}{28}$
iii. $\frac{6}{28}$
iv. $\frac{7}{28}$

(g) Sei X eine Poi(λ)-verteilte Zufallsvariable für ein $\lambda > 0$ und sei $Y = 4X - 2$. Was ist die Momenterzeugende Funktion von Y?

i. $M_Y(t) = e^{2t}e^{-\lambda(e^{4t}-1)}$
ii. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{e^{4t\lambda}}$
iii. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{\lambda(e^{4t}-1)}$
iv. $M_Y(t) = e^{-2t}e^{-\lambda(e^{4t}-1)}$

(h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{\sigma^2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu)$?

i. $\mathcal{N}(0, 1)$
ii. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$
iii. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma^2})$
iv. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n\sigma^2})$

(i) Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\mathrm{Bin}(4, p)$ verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter $p \in (0, 1)$ und sei $T_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_n}{4}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i. T_n ist ein erwartungstreuer Schätzer für p.
ii. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konsistent für p.
iii. Weder i. noch ii. sind wahr.

2. [**9 Punkte**]

Wir betrachten eine Urne, in der sich drei Würfel befinden. Würfel 1 und 2 sind gezinkt, während Würfel 3 fair ist. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten der beiden gezinkten Würfel an:

	1	2	3	4	5	6
Würfel 1	1/18	2/9	1/6	1/18	1/3	1/6
Würfel 2	2/9	0	1/2	1/9	1/18	1/9

Ein Würfel wird zufällig gezogen und 2 mal nacheinander geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an, um dieses Zufallsexperiment zu beschreiben.

Der Würfel zeigt 3 und 5. Gegeben dieser Beobachtung bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass

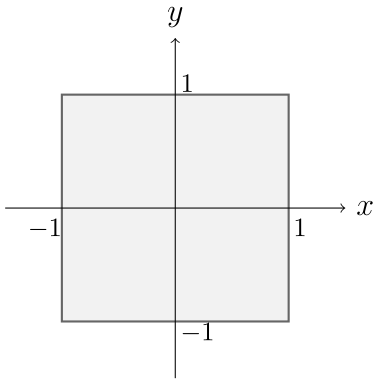
(b) Würfel 1 gezogen wurde.

(c) Würfel 2 gezogen wurde.

(d) der faire Würfel (d.h. Würfel 3) gezogen wurde.

3. [16 Punkte]

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X,Y}$. Die Dichtefunktion sei konstant gleich c auf dem grauen Bereich und 0 ausserhalb.



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie Randdichte f_X von X und die Randdichte f_Y von Y.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

4. [8 Punkte]

Betrachten Sie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von i.i.d. exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1. Sei $\alpha > 0$ und

$$A_n = \{X_n > \alpha \ln(n)\}.$$

(a) Im Fall, dass $\alpha \leq 1$, zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass unendliche viele A_n eintreten gleich 1 ist.

(b) Im Fall, dass $\alpha > 1$, zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nur endlich viele A_n eintreten gleich 1 ist.

5. [22 Punkte]

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit uniformer Verteilung auf $[0, \theta]$ für ein unbekanntes $\theta > 0$. Wir setzen $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von M_n in Abhängigkeit von θ.

(b) Zeigen Sie, dass M_n der Maximum-Likelihood Schätzer für θ basierend auf den Beobachtungen $(X_1, \dots, X_n)$ ist.

(c) Ist der Schätzer M_n erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie, dass für alle θ gilt $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}_\theta(M_n) = 0$.

(e) Ist der Schätzer M_n konsistent für θ? Begründen Sie Ihre Antwort.