РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том 37

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1992

*ШВЕЙЦЕР М.**

ПОЛУМАРТИНГАЛЫ И СТРАХОВАНИЕ ОТ ПОТЕРЬ НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ

0. Введение. Рассмотрим стохастический процесс (X_t), моделирующий эволюцию стоимостей активов с колеблющимся курсом (например акций). Пусть случайная величина H описывает выплату, которая должна быть сделана в фиксированный момент $T>0$ (например, в случае заключения опциона или контракта, возмещающего потери при его расторжении $H=(X_t-K)^+$). Возникают два важных вопроса:

1) Какова приемлемая цена или (страховой взнос) за H в начальный момент времени?

2) Какая стратегия выгоднее при страховании от потерь?

В этой статье предлагается некоторый подход к решению второго вопроса в очень широких рамках по отношению к определенного рода критерию среднее – дисперсия. По-видимому стоит отметить, что ответ на первый вопрос в этом общем случае остается открытым.

---

* Universität Bonn, Institut für Angewandte Mathematik, Wegelerstrasse 6, D-5300, Bonn 1, Germany

Schweizer M. Semimartingales and Hedging in Incomplete Markets

1. Задача страхования от потерь. Предполагается, что процесс, моделирующий изменение стоимости наших акций, $X=X_0+M+A$ является специальным *семимартингалом. Стратегия заключения сделок* — это пара процессов (ξ_t), (η_t). Здесь ξ — предсказуемый процесс, описывающий число акций, имеющихся у нас в момент t, а η — адаптивный процесс, описывающий средства, вложенные в ценные бумаги, не подверженные риску, при этом цена одной бумаги нормирована к единице. Каждая стратегия индуцирует процесс накопления капитала $V_t=\xi_t X_t+\eta_t$ и процесс, описывающий совокупную стоимость страхования $C_t=V_t-\int\limits_0^t \xi_n\, dX_n$, т. е. капитал минус прибыль от сделки. Для того чтобы измерить риск некоторой стратегии, введем процесс $R_t:=\mathrm{E}[(C_T-C_t)^2|\mathcal{F}_t]$. Задачу страхования от потерь при заданном возможном требовании выплат H можно грубо сформулировать следующим образом:

(HP) Найти стратегию (ξ, η) с итоговым капиталом $V_T=H$, имеющую минимальные локальные дисперсии.

Сформулируем приведенные выше рассуждения точнее.

Определение. Стратегия $\varphi=(\xi, \eta)$ называется *оптимальной*, если $V_T=H$ P-почти наверное и

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{t_i\in\tau_n}\frac{R_{t_i}(\varphi+\Delta|_{(t_i,\,t_{i+1}]})-R_{t_i}(\varphi)}{\mathrm{E}[\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i}\,|\,\mathcal{F}_{t_i}}\, I_{(t_i,\,t_{i+1})}\geqslant 0$$

справедливо $P\times\langle M\rangle$-п. н. на $\Omega\times[0, T]$ для всех малых возмущений Δ и каждой возрастающей последовательности (τ_n) разбиений отрезка $[0, T]$, такой, что $|\tau_n|\to 0$.

Более подробное изложение и обоснование см. в [5].

2. Характеризация оптимальных стратегий.

Теорема. *Предположим, что процесс M квадратично интегрируем, процесс A непрерывен, $A\ll\langle M\rangle$ и $\frac{dA}{d\langle M\rangle}\in\mathscr{C}\log^+\mathscr{C}(\mathrm{P}\times\langle M\rangle)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) (ξ, η) — *оптимальная стратегия для H;*

2) *процесс стоимости $C(\xi, \eta)$ является мартингалом и ортогонален к M;*

3) *$C(\xi, \eta)$ является мартингалом, а ξ удовлетворяет уравнению оптимальности $\xi+\mu^{\xi,A}=\mu^H$. (Здесь μ^H и $\mu^{\xi,A}$ обозначают соответственно интегранды от проекции H и $\int\limits_0^T \xi_u\, dA_u$ на устойчивое подпространство, порожденное M.)*

Схема доказательства (подробное доказательство см. в [5]):

a) Если C — не мартингал, то можно построить лучшую стратегию, используя тот факт, что R является условной средне-квадратичной ошибкой. Как следствие, процесс η определяется через процесс ξ и достаточно изменить ξ.

b) Если сравнить ξ с некоторым процессом $\xi+\delta$, то мы получим выражение вида $\left(C-\int\delta\, dX\right)^2-C^2=-2C\int\delta\, dX+\left(\int\delta\, dX\right)^2$. Деля его на $\langle M\rangle$ и используя технику дифференцирования семимартингалов (см. [4]), получим условие $C\int\delta dM=0$, что и обеспечивает ортогональность.

Для реального нахождения оптимальной стратегии (что эквивалентно решению уравнения оптимальности) более полезна следующая лемма (доказательство см. в [1]).

Лемма. *Для H существует оптимальная стратегия тогда и только тогда, когда справедливо разложение*

$$H=H_0+\int\limits_0^T \xi_u\, dX_u+L_T{}^H, \tag{D}$$

где мартингал L^H ортогонален к M. При этом оптимальная стратегия определяется следующим образом: $\xi=\xi^H$ *и* $C=H_0+L^H$.

Замечание. Укажем два случая, для которых разложение (D) получается непосредственно. Первый – это так называемый случай *полной модели*, когда каждая случайная величина представима в виде стохастического интеграла от X (см. [3]). Второй случай – когда $X\equiv M$ является *мартингалом*, ибо в этом случае разложение (D) получается из теоремы о проекции Кунита–Ватанабе (см. [2]). Общий случай неполного семимартингала более сложен и в следующих разделах мы наметим два возможных подхода.

3. Минимальная мартингальная мера. Первая идея – это попытаться вернуться к мартингальной ситуации. Пусть $P^*\approx P$ – любая мартингальная мера для X. Рассмотрим разложения Кунита – Ватанабе процесса H для меры P^*:

$$H=H_0^*+\int_0^T \xi_u^*\, dX_u+L_T^*,$$

где P^*-мартингалы X и L^* являются P^*-ортогональными. Тогда можно сделать два вывода:

i) Если L^* является также P-мартингалом P-ортогональным к M, то очевидно *существование* разложения (D).

(ii) Если каждый P-мартингал L, который P-ортогонален к M, является также P^*-мартингалом P^*-ортогональным к X, то мы получаем *единственность* разложения (D), поскольку разложение Кунита–Ватанабе единственно.

Таким образом задача сводится к нахождению мартингальной меры $\hat{P}\approx P$ удовлетворяющей условиям (i) и (ii). Такую меру $\hat{P}$ будем называть *минимальной мартингальной мерой*. Интуитивно ясно, что $\hat{P}$ – это мартингальная мера для X, наиболее близкая к исходной мере P. Доказательство приведенного ниже результата можно найти в сборнике [1].

Теорема. *Если процесс X непрерывен, то указанный подход применим. Более того, $\hat{P}$ определяется единственным образом и может быть найдена минимизацией некоторого функционала, зависящего от относительной энтропии $H(\cdot|P)$.*

4. Случай неполной информации. Вторая идея состоит в рассмотрении требований H, являющихся стохастическими интегралами относительно некоторой более богатой фильтрации $\tilde{\mathbf{F}}\supseteq\mathbf{F}$. Предположим, что H имеет вид

$$H=H_0+\int_0^t \tilde{\xi}_u\, dX_u$$

для некоторого $\tilde{\mathbf{F}}$-предсказуемого интегранда $\tilde{\xi}$. Поскольку искомая стратегия ξ должна быть $\mathbf{F}$-предсказуемой, $\tilde{\xi}$ не является допустимой стратегией. Однако справедлив следующий результат (см. [1], [6]):

Теорема. *Предположим, что разложение $X=X_0+M+A$ одинаково как для фильтрации $\mathbf{F}$ так и для фильтрации $\tilde{\mathbf{F}}$, и что $\langle M\rangle^{\mathbf{F}}=\langle M\rangle^{\tilde{\mathbf{F}}}$. Тогда каждое H, имеющее приведенный выше вид, допускает разложение (D), а соответствующая оптимальная стратегия ξ^H получается проектированием: $\xi^H=\mathbf{E}_M[\tilde{\xi}\,|\,\mathscr{P}(\mathbf{F})]$, где $\mathbf{E}_M$ обозначает математическое ожидание по мере $P\times\langle M\rangle$, а $\mathscr{P}(\mathbf{F})$ – предсказуемая σ-алгебра, ассоциированная с $\mathbf{F}$.*

Теорема утверждает, что структура первого и второго порядка процесса X не изменяется при расширении σ-алгебры с $\mathbf{F}$ до $\tilde{\mathbf{F}}$. Этого оказывается достаточно, поскольку, по существу, мы пользуемся критерием среднее – дисперсия. Приведенные методы могут быть использованы, например, при изучении модели типа Блека–Шула со случайной дисперсией. Подробности такого применения см. в [1].

В работах, приведенных в списке литературы, содержатся многочисленные ссылки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Föllmer H., Schweizer M.* Hedging of contingent claims under incomplete information.— In: Applied Stochastic Analysis./Ed. by M. H. A. Davis and R. J. Elliott, Gordon and Breach, London, 1990.
2. *Föllmer H., Sondermann D.* Hedging of non-redundant contingent claims.— In: Contributions to Mathematical Economics/Ed. by W. Hildenbrand, A. Mas-Colell, 1986, p. 205–223.
3. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading.— Stoch. Proc. Appl., 1981, v. 11, p. 215–260.
4. *Schweizer M.* Risk-minimality and orthogonality of martingales.— Stoch. and Stoch. Rep., 1990, v. 30, p. 123–131.
5. *Schweizer M.* Option hedging for semimartingales.— Stoch. Proc. Appl. (To appear.)
6. *Schweizer M.* Some remarks on hedging under incomplete information.— Preprint. 1990, March.