

QUADRATISCHE MORPHISMEN

Dau Truong Tan
ETHZ

20. März 2002

Vorwort

Ich bin allen Leuten sehr dankbar, die mir geholfen haben, diese Diplomarbeit zu erstellen, insbesondere den Doktoranden Francis Gardeyn und Matthias Traulsen, und zu Prof. Richard Pink, die mit viel Geduld mit mir gearbeitet haben.

DANKE!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Der abstrakte binäre Baum	3
2.1	Definition des abstrakten binären Baumes T^a	3
2.2	Die Automorphismengruppe von T^a	5
3	Quadratische Morphismen	5
3.1	Vorbereitung	5
3.2	Der binäre Baum T^{Gal}	7
3.3	Das Ziel der Diplomarbeit	8
3.4	Der geometrische binäre Baum T_{x_0}	8
3.4.1	Die Fundamentalgruppe π_1	10
3.4.2	Operation von π_1 auf T_{x_0}	11
3.5	Zusammenhang zwischen T^{Gal} , T_{x_0} und T^a	11
3.5.1	Der Isomorphismus $t_{x_0}^G$ von T_{x_0} nach T^{Gal}	11
3.5.2	Der Isomorphismus $t_{x_0}^a$ von T^a nach T_{x_0}	13
3.6	Übersetzung Galoisgruppe—Fundamentalgruppe	15
3.7	Rekursive Beschreibung der Gruppe \mathcal{G}	15
3.8	Explizite Berechnungen der Gruppe \mathcal{G}	20
3.8.1	Beispiel	20
3.8.2	Beispiel	22
3.8.3	Tabellen	25
3.9	Weitere Untersuchung des Graphen $\Gamma_{4.7}$	49

3.10 Unendliche Verzweigungsgraphen	57
4 Anhang	62
4.1 Die Fundamentalgruppe	62
4.2 Überlagerungen	63

1 Einleitung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist.

Ein quadratischer Morphismus ist ein Morphismus $f : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ vom Grad 2. Da es eine Entsprechung zwischen algebraischen irreduziblen Kurven und Funktionenkörpern in einer Variablen gibt, entspricht ein quadratischer Morphismus einer Einbettung $f_* : k(t) \hookrightarrow k(t)$ des Funktionenkörpers $k(t)$ von $\mathbb{P}^1(k)$ in sich selbst. Wir setzen $K_n := k(t)$ und betrachten eine Iteration solcher Einbettungen:

$$K_0 \xrightarrow{f_*} K_1 \xrightarrow{f_*} K_2 \xrightarrow{f_*} \dots \xrightarrow{f_*} K_n \xrightarrow{f_*} \dots$$

Sei L_n die Galoishülle von K_n über K_0 . Man kann Einbettungen $L_n \hookrightarrow L_{n+1}$ so wählen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_0 & \hookrightarrow & L_1 & \hookrightarrow & L_2 & \hookrightarrow & L_3 \hookrightarrow \dots \\
 \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 K_0 & \hookrightarrow & K_1 & \hookrightarrow & K_2 & \hookrightarrow & K_3 \hookrightarrow \dots
 \end{array} \tag{1}$$

kommutativ ist. Wir setzen $G_n := \text{Gal}(L_n, K_0)$. Hauptziel dieser Diplomarbeit ist, den inversen Limes $G := \varprojlim G_n$ für verschiedene quadratische Morphismen zu untersuchen.

Jedem quadratischen Morphismus f kann man einen *Verzweigungsgraph* $\Gamma_f = (V_{\Gamma_f}, E_{\Gamma_f})$ zuordnen, der gewisse Eigenschaften erfüllt. Wir werden dann einige (meist endliche) Graphen Γ mit diesen Eigenschaften betrachten und untersuchen, welche quadratische Morphismen f mit $\Gamma_f = \Gamma$ es gibt. Im Fall $k = \mathbb{C}$ werden wir einen Zusammenhang finden zwischen G und der *Fundamentalgruppe* $\pi_1 := \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0)$. Dieser Zusammenhang wird uns erlauben, die Gruppe G konkret zu bestimmen.

Hintergrund dieses Zusammenhangs ist die Tatsache, dass man aus dem Diagramm (1) einen *binären Baum* T^{Gal} konstruieren kann. Es stellt sich heraus, dass G in der *Automorphismengruppe* $\text{Aut}(T^{Gal})$ von T^{Gal} enthalten ist. Da der Baum T^{Gal} mathematisch wenig handlich ist, werden wir einen "sinnvollen" Isomorphismus von T^{Gal} auf einem *abstrakten binären Baum* T^a angeben (vgl. Abschnitt 3.5). Die Konstruktion dieses Isomorphismus geschieht durch Betrachtung eines dritten Baums, *des geometrischen binären*

Baums T_{x_0} (vgl. Abschnitt 3.4).

Dann besteht der Zusammenhang darin, dass man einen Gruppenhomomorphismus

$$l : \pi_1 \rightarrow \text{Aut}(T^a)$$

hat, so dass $\mathcal{G} := l(\pi_1)$ eine Untergruppe von G ist, die in der proendlichen Topologie dicht in G ist. Somit ist G vollständig bestimmt durch \mathcal{G} . Es ist bekannt, dass π_1 eine *endliche erzeugte freie Gruppe* ist, (vgl. Abschnitt 3.4.1) und somit ist \mathcal{G} eine endliche erzeugte Gruppe. Mit Hilfe expliziter Erzeugenden von π_1 können wir dann explizit Erzeugende von \mathcal{G} angeben. (Vgl. Abschnitt 3.7 und 3.8). Der Vorteil, in $\text{Aut}(T^a)$ statt in $\text{Aut}(T^{Gal})$ zu arbeiten, ist dass die Automorphismen *rekursiv* dargestellt werden können (vgl. Abschnitt 3.7).

Solche Darstellungen sind besonders nützlich in expliziten Rechnungen. Dies wird im Abschnitt “Weitere Untersuchung des Verzweigungsgraphen $\Gamma_{4.7}$ ” bestätigt, wo man drei Morphismen $f_i, f_{1+\sqrt{2}}, f_{1-\sqrt{2}}$ mit demselben Verzweigungsgraph betrachtet und die Gruppen $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{1+\sqrt{2}}, \mathcal{G}_{1-\sqrt{2}}$ untersucht. Wir werden finden, dass sie in derselben Konjugationsklasse liegen, und ein Element finden, unter dem \mathcal{G}_i und $\mathcal{G}_{1+\sqrt{2}}$ konjugiert sind.

In Abschnitt 3.10 setzen wir uns mit der Frage auseinander, wie \mathcal{G} für Morphismen mit gewissen unendlichen Verzweigungsgraphen aussieht. Leider konnten wir dies nicht vollständig beantworten.

Die Grundlagen für diese Arbeit entstammen der algebraischen Topologie, Graphentheorie, Kombinatorik, Geometrie. Wir waren bemüht, die nötigen Begriffe und Sachverhalte einzuführen

2 Der abstrakte binäre Baum

2.1 Definition des abstrakten binären Baumes T^a

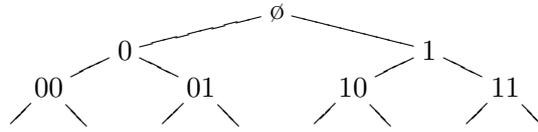
Definition 2.1 Ein *abstrakter orientierter Graph* ist ein Paar (V, E) , wobei V eine Menge ist und E eine Teilmenge von $V \times V$, so dass wenn $(v, w) \in E$ liegt, dann $(w, v) \notin E$. Elemente von V heissen *Ecken* und Elemente von E heissen *Kanten*.

Definition 2.2 Zwei Graphen (V, E) und (V', E') sind genau dann isomorph, wenn es eine Bijektion von V nach V' gibt, die E in E' überführt.

Definition 2.3 Sei V das freie Monoid erzeugt vom “Alphabet” $\{0, 1\}$ mit Einselement \emptyset , und sei

$$E = \{(x, xi) \mid i \in \{0, 1\}, x \in V\}.$$

Der Graph $T^a = (V, E)$ heisst *abstrakter binärer Baum* oder kurz *binärer Baum* und \emptyset heisst *die Wurzel von T^a* .



Bemerkung 2.4 Jeder Graph, der isomorph zu T^a ist, ist ein binärer Baum.

Auf der Eckenmenge V von T^a gibt es eine *Niveaufunktion* $|?|$, die jedem Element $v \in V$ die Anzahl seiner Buchstaben $|v|$ zuordnet. Die Wurzel \emptyset besitzt Niveau 0. Die Eckenmenge V wird ein metrischer Raum, falls man als Metrik d den normalen Abstand auf einem Graph nimmt, d.h., für alle $u, v \in V$ ist

$$d(u, v) = |u| + |v| - 2|w|,$$

wobei w das grösste gemeinsame Präfix von u und v ist. Der Baum T^a erfüllt zwei wichtige Eigenschaften:

- i) Sei $u \in V$. Dann bildet der Graph T_u^a mit Eckenmenge

$$uV := \{uv \mid v \in V\}$$

und Kantenmenge

$$uE := \{(ux, uy) \mid (x, y) \in E\}$$

einen Teilbaum, der isomorph zum ursprünglichen Baum T^a ist. Der kanonische Isomorphismus ι_u ist gegeben durch Auslöschung des Präfix u .

- ii) Der Baum T^a ist die Vereinigung der endlichen Teilbäume $T^{a,j}$ mit Eckenmenge

$$V_j := \{v \mid v \in M, |v| \leq j\}$$

und Kantenmenge

$$E_j := \{(x, y) \in E \mid |y| \leq j\}$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

2.2 Die Automorphismengruppe von T^a

Sei $\text{Aut}(T^a)$ die Automorphismengruppe von T^a . Sei $\sigma \in \text{Aut}(T^a)$ der Automorphismus, der jedes Element in V der Form $0m$ mit $1m$ vertauscht. Ein Automorphismus α von T^a mit Fixpunkten 0 und 1 ist darstellbar als ein geordnetes Paar (α_0, α_1) , wobei α_i die Einschränkung von α auf den Teilbaum T_i^a ist. Da T_0^a und T_1^a isomorph zu T^a sind, können wir via ι_0 bzw. ι_1 die Automorphismen α_0 und α_1 mit Automorphismen von T^a identifizieren. Deshalb können wir einen allgemeinen Automorphismus auf eindeutige Weise darstellen als $(\alpha_0, \alpha_1)\sigma^{i_\emptyset}$, wobei $i_\emptyset \in \{0, 1\}$. Fährt man wie oben fort, dann bekommt man für jeden Automorphismus von T^a eine Entwicklung der Form

$$\dots ((\sigma^{i_{00}}, \sigma^{i_{01}}), (\sigma^{i_{10}}, \sigma^{i_{11}}))(\sigma^{i_0}, \sigma^{i_1})\sigma^{i_\emptyset},$$

wobei jeder Exponent i_v mit $v \in V$ in $\{0, 1\}$ liegt. Insbesondere bestimmt jeder Automorphismus eine Folge

$$(i_\emptyset, i_1, i_0, i_{11}, i_{10}, i_{01}, \dots)$$

mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Umgekehrt kann jede Folge in $\{0, 1\}$ aufgefasst werden als Entwicklung eines Automorphismus von T^a . Es folgt, dass die Kardinalität von $\text{Aut}(T^a)$ gleich $2^{\mathbb{N}_0}$ ist. Die Multiplikation in $\text{Aut}(T^a)$ ist bestimmt durch

$$\sigma(\alpha_0, \alpha_1)\sigma = (\alpha_1, \alpha_0)$$

und

$$(\alpha_0, \alpha_1)(\beta_0, \beta_1) = (\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_1).$$

(Siehe [5].)

3 Quadratische Morphismen

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist.

3.1 Vorbereitung

Definition 3.1 *Ein quadratischer Morphismus* ist ein Morphismus $f : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ vom Grad 2.

Bemerkung 3.2 Jeder quadratische Morphismus f , lässt sich in der Form

$$f(x) = \frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2}$$

mit $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in k$ schreiben.

Satz 3.3 Sei $f : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ ein quadratischer Morphismus. Dann ist f über genau zwei Punkten verzweigt.

Beweis: Da $\text{Char}(k) \neq 2$ und $e_p \leq 2$ für jeden Punkt $p \in \mathbb{P}^1(k)$ ist, ist die Verzweigung zahm. Nach Hurwitz gilt

$$2g - 2 = (2g - 2) \deg(f) + \sum_{p \text{ verzweigt}} (e_p - 1). \quad (2)$$

Da $\deg(f) = 2$ und das Geschlecht von $\mathbb{P}^1(k)$ gleich 0 ist, reduziert sich (2) auf

$$\sum_{p \text{ verzweigt}} (e_p - 1) = 2. \quad (3)$$

Damit (3) gilt, muss f über genau zwei Punkten verzweigt sein. \square

Lemma 3.4 Die Gruppe $\text{PGL}_2(k)$ operiert dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$. D.h. für je zwei Tripel verschiedener Elemente aus $\mathbb{P}^1(k)$ gibt es ein Element in $\text{PGL}_2(k)$, das das eine Tripel in das andere überführt.

Beweis: Es genügt, die folgende Behauptung zu beweisen: Für je drei verschiedene Punkte $a := [a_1 : a_2]$, $b := [b_1 : b_2]$ und $c := [c_1 : c_2]$ in $\mathbb{P}^1(k)$ existiert eine invertierbare Matrix $M \in \text{PGL}_2(k)$, so dass a auf $[0 : 1]$, b auf $[1 : 0]$ und c auf $[1 : 1]$ abgebildet wird. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und sei

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Damit die Behauptung stimmt, muss es $\lambda, \mu, \nu \in k^*$ geben, so dass

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix} \quad (6)$$

Wir setzen $\nu = 1$ und bestimmen M, λ und μ so, dass die Gleichungen (4), (5) und (6) erfüllt sind. Die Gleichungen (4) und (5) können mit Hilfe der Matrix N in der folgenden Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix N nach Voraussetzung invertierbar ist, folgt, dass die Zeilen von M eindeutig bestimmt sind bis auf skalare Multiplikation. Wieder nach Voraussetzung sind $(-a_2c_1 + a_1c_2)$ und $(b_2c_1 - b_1c_2)$ von 0 verschieden, deswegen können wir

$$\lambda = \det(N)\nu/(-a_2c_1 + a_1c_2) \quad \text{und} \quad \mu = \det(N)\nu/(b_2c_1 - b_1c_2)$$

wählen. Mit dieser Wahl gilt auch Gleichung (6). □

Aus Satz (3.3) und Lemma (3.4) folgt sofort, dass wir einen quadratischen Morphismus f mit einem Element von $\text{PGL}_2(k)$ so konjugieren können, dass f genau über 0 und ∞ verzweigt ist. Dann impliziert Bemerkung 3.2 folgenden Satz:

Satz 3.5 *Ein quadratischer Morphismus $f : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ besitzt die Normalform*

$$f(x) = \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^2$$

mit $a, b, c, d \in k$ bis auf Konjugation mit einem Element aus $\text{PGL}_2(k)$. □

Bemerkung 3.6 Wegen Satz 3.5 werden wir stets annehmen, dass unsere quadratischen Morphismen in Normalform sind.

Wir betrachten einen quadratischen Morphismus $f : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Dieser Morphismus entspricht einer separablen Einbettung vom Grad 2 des Funktionenkörpers $k(t)$ von $\mathbb{P}^1(k)$ in sich selbst:

$$\begin{aligned} f^* : k(t) &\hookrightarrow k(t) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Wir setzen $K_n = k(t)$ für alle n in \mathbb{N} und betrachten folgende Inklusionen von Funktionenkörpern:

$$K_0 \xrightarrow{f^*} K_1 \xrightarrow{f^*} K_2 \xrightarrow{f^*} \dots \xrightarrow{f^*} K_n \xrightarrow{f^*} \dots$$

Mit Hilfe dieser Inklusionen können wir einen binären Baum konstruieren:

3.2 Der binäre Baum T^{Gal}

Sei L_n die Galoishülle von K_n über K_0 für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm der Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} L_0 & \hookrightarrow & L_1 & \hookrightarrow & L_2 & \hookrightarrow & L_3 & \hookrightarrow & \dots \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ K_0 & \hookrightarrow & K_1 & \hookrightarrow & K_2 & \hookrightarrow & K_3 & \hookrightarrow & \dots \end{array} \quad (7)$$

Setze $T_n^{Gal} = \text{Hom}_{K_0}(K_n, L_n)$. Die Menge T_n^{Gal} besitzt 2^n Elemente, und es gibt eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} T_n^{Gal} &\rightarrow T_{n-1}^{Gal} \\ \iota &\mapsto \iota|_{K_{n-1}}, \end{aligned}$$

wobei $\iota|_{K_{n-1}}$ die Einschränkung von ι auf K_{n-1} ist. Ausserdem operiert die Gruppe $G_n := \text{Gal}(L_n/L_0)$ auf T_n^{Gal} wie folgt :

$$\begin{aligned} G_n \times T_n^{Gal} &\rightarrow T_n^{Gal} \\ (g, \iota) &\mapsto g \circ \iota. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den binären Baum T^{Gal} mit Eckenmenge

$$V := \bigcup_n T_n^{Gal}$$

und Kantenmenge

$$E := \{ (a, b) \in V \times V \mid \exists n \in \mathbb{N} : a \in T_n^{Gal}, b \in T_{n+1}^{Gal} \text{ und } b|_{K_n} = a \}.$$

Dann operiert $G := \varprojlim G_n$ auf T^{Gal} auf natürliche Weise.

3.3 Das Ziel der Diplomarbeit

Unser Ziel ist es, G_n und $G \subset \text{Aut}(T^{Gal})$ zu beschreiben. Dazu werden wir im nächsten Abschnitt eine geometrische Beschreibung des binären Baums T^{Gal} , der Gruppe G_n und der Gruppe G kennenlernen.

3.4 Der geometrische binäre Baum T_{x_0}

Ab jetzt beschränken wir uns auf $k = \mathbb{C}$ und verwenden folgende Notation:

- $f^0 := id$.
- $f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.7 Sei $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein quadratischer Morphismus, der über 0 und ∞ verzweigt ist. Der Graph Γ_f mit Eckenmenge

$$V_{\Gamma_f} := \{ f^n(0) \mid n \in \mathbb{N}_0 \} \cup \{ f^n(\infty) \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

und Kantenmenge

$$E_{\Gamma_f} := \{ (a, b) \in V_{\Gamma_f} \times V_{\Gamma_f} \mid f(a) = b \}$$

heisst *der Verzweigungsgraph von f* .

Bemerkung 3.8 Nach Konstruktion gilt:

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (f^n)^{-1}(V_{\Gamma_f}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$.
- Die Abbildung

$$f_n : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (f^n)^{-1}(V_{\Gamma_f}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$$

ist eine unverzweigte Überlagerung. (vgl. Definition ?? in Anhang 4.2.)

Bemerkung 3.9 Da f genau über 0 und ∞ verzweigt ist, besitzt Γ_f folgende Eigenschaften:

- Es gibt höchstens einen Punkt $a \in V_{\Gamma_f}$, so dass $(a, 0) \in E_{\Gamma_f}$.
- Es gibt höchstens einen Punkt $b \in V_{\Gamma_f}$, so dass $(b, \infty) \in E_{\Gamma_f}$.
- Für $c \in V_{\Gamma_f}$ gibt es höchstens zwei Punkte $a, b \in V_{\Gamma_f}$ mit der Eigenschaft:

$$(a, c) \in E_{\Gamma_f} \quad \text{und} \quad (b, c) \in E_{\Gamma_f}.$$

Sei $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein quadratischer Morphismus mit Verzweigungsgraph $\Gamma_f = (V_{\Gamma_f}, E_{\Gamma_f})$. Wir wählen einen Punkt x_0 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$. Das Urbild $T_{x_0, n}$ von x_0 unter f^n besteht aus genau 2^n verschiedenen Elementen, die nicht in V_{Γ_f} liegen. Der geometrische binäre Baum T_{x_0} sei der Graph mit Eckenmenge

$$V_{x_0} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} T_{x_0, n}$$

und Kantenmenge

$$E_{x_0} := \{ (a, b) \in V_{x_0} \times V_{x_0} \mid \exists n \in \mathbb{N} : a \in T_{x_0, n}, b \in T_{x_0, n+1} \text{ und } f(b) = a \}.$$

Der Punkt x_0 ist dann die Wurzel des geometrischen binären Baums.

Es gilt folgende Proposition:

Proposition 3.10 *Sei τ ein Weg von x_0 nach z_0 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$. Für $y \in T_{x_0, n}$ sei $i_\tau(y)$ der Endpunkt des Lifts von τ unter f^n mit Anfangspunkt y . Dann ist $i_\tau : V_{x_0} \rightarrow V_{z_0}$ ein Isomorphismus von T_{x_0} nach T_{z_0} .*

Beweis: Da der Morphismus

$$f^n : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (f^n)^{-1}(V_{\Gamma_f}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$$

eine unverzweigte Überlagerung ist, folgt aus Satz 4.9 in Anhang 4.2, dass $f(i_\tau(b)) = i_\tau(a)$ für jedes Element $(a, b) \in V_{x_0}$, d.h. die Abbildung $i_\tau : T_{x_0} \rightarrow T_{z_0}$ ist wohldefiniert. Wegen Satz 4.9 folgt $i_{\tau^{-1}} i_\tau = id_{T_{x_0}}$ und $i_\tau i_{\tau^{-1}} = id_{T_{z_0}}$. \square

Bemerkung 3.11 Da der geometrische binäre Baum T_{x_0} von f und x_0 abhängt, werden wir ihn mit $T_{x_0}^f$ bezeichnen, wenn Unklarheiten entstehen können.

3.4.1 Die Fundamentalgruppe π_1

Sei Σ eine nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Wir bezeichnen mit π_1 die Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$ bezüglich eines festen Basispunkts x_0 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$ (vgl. die Definition in Anhang 4.1). Wir können dann folgenden Satz über die Struktur der Gruppe π_1 formulieren:

Satz 3.12 *Die Gruppe π_1 ist eine freie Gruppe auf $|\Sigma| - 1$ Elementen.*

Beweis: Sei $\Sigma = \{y_0, \dots, y_n\}$. Wir wählen ein $A \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ mit $Ay_0 = [1 : 0]$. Da die Fundamentalgruppe topologisch invariant und da A ein Homöomorphismus ist, folgt $\pi_1 \cong \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus A\Sigma, Ax_0)$. Dabei gilt $[1, 0] \in A\Sigma$ und $|A\Sigma| = |\Sigma|$. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y_0 = [1 : 0]$ und damit $y_0 \in \Sigma$ liegt. Wir setzen

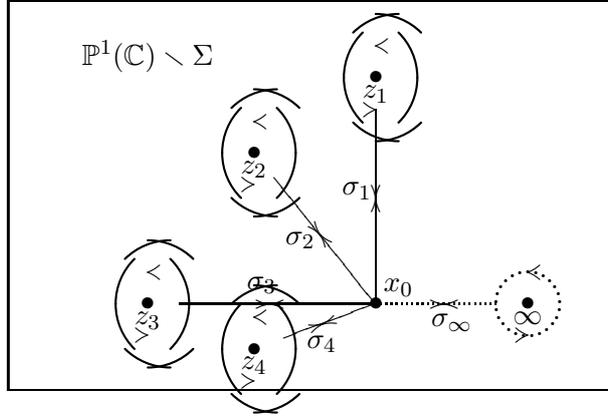
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{y_0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ [a_1 : a_2] &\mapsto a_1/a_2. \end{aligned}$$

Dann ist ϕ ein Homöomorphismus und $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$ ist via ϕ homöomorph zu $\mathbb{C} \setminus S_\Sigma$ für eine Menge $S_\Sigma \subset \mathbb{C}$ mit $|S_\Sigma| = |\Sigma| - 1$ Elementen. Durch Anwendung des Satzes von Seifert und Van Kampen (siehe Abschnitt 3 “First application of Theorem (2.1)” in [2]) erhält man, dass $\pi_1(\mathbb{C} \setminus S_\Sigma, \phi(x_0))$ eine freie Gruppe auf $|S_\Sigma|$ Elementen ist. Aus der topologischen Invarianz der Fundamentalgruppe folgt nun die Behauptung. \square

Für das Folgende ist es sehr wichtig zu wissen, wie man ein freies Erzeugendensystem der freien Gruppe π_1 findet. Zum Beispiel betrachten wir $\Sigma = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ mit $z_0 := \infty$. Für alle i sei U_i eine offene Umgebung von z_i , so dass für $i \neq j$ gilt: $U_i \cap U_j = \emptyset$. Sei γ_i ein positiv orientierter geschlossener Weg in U_i mit Anfangspunkt z'_i , der Umlaufzahl 1 um z_i hat, und sei β_i ein Weg in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$ von x_0 nach z'_i . Mit σ_i bezeichnen wir den Weg $\beta_i^{-1}\gamma_i\beta_i$ um z_i . Dann bildet die Menge $\{[\sigma_1], \dots, [\sigma_n]\}$ ein freies Erzeugendensystem der Gruppe π_1 . Durch geeignete Wahl der Wege β_i können wir erreichen, dass

$$[\sigma_0][\sigma_n] \dots [\sigma_1] = 1.$$

Wir skizzieren ein Bild dieser σ_i für $n = 4$, wobei $[\sigma_\infty] := [\sigma_0]$:



Definition 3.13 Sei $\Sigma = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $z_0 := \infty$ und $z_1 := 0$ die Eckenmenge des Verzweigungsgraphen eines quadratischen Morphismus. Die oben definierten Äquivalenzklassen $[\sigma_i] \in \pi_1$ heissen *Verzweigung bei z_i* .

3.4.2 Operation von π_1 auf T_{x_0}

Genauso wie die Gruppe G auf T^{Gal} operiert (siehe Abschnitt (3.2)), operiert die Gruppe π_1 auf T_{x_0} , und zwar wie folgt: Sei α ein Repräsentant von $[\alpha] \in \pi_1$ und sei $y \in T_{x_0, n}$. Sei $l_{[\alpha]}(y)$ der Endpunkt des Lifts von α unter f^n mit Anfangspunkt y . Da

$$f^n : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (f^n)^{-1}(V_{\Gamma_f}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$$

eine Überlagerung ist, hängt diese Operation nicht von der Wahl des Repräsentanten ab (siehe Satz 4.9 in Anhang 4.2).

Wir werden in Abschnitt 3.6 sehen, welche Beziehung zwischen π_1 und $G = \varprojlim G_n$ besteht.

3.5 Zusammenhang zwischen T^{Gal} , T_{x_0} und T^a

3.5.1 Der Isomorphismus $t_{x_0}^G$ von T_{x_0} nach T^{Gal}

Sei i_n die Einbettung von K_n in L_n (siehe das kommutative Diagramm (7)). Wir wählen eine Folge x_n mit Einträgen in T_{x_0} , so dass x_n in $T_{x_0, n}$ liegt und $f(x_n) = x_{n-1}$ ist.

Die Angabe eines Isomorphismus $t_{x_0}^G$ von T_{x_0} nach T^{Gal} ist äquivalent zur Angabe einer Familie von Bijektionen $t_{x_0, n}^G : T_{x_0, n} \rightarrow T_n^{Gal}$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
T_{x_0, n-1} & \xleftarrow{f} & T_{x_0, n} \\
t_{x_0, n-1}^G \downarrow & & \downarrow t_{x_0, n}^G \\
T_{n-1}^{Gal} & \xleftarrow{\text{res}_{K_{n-1}}} & T_n^{Gal}
\end{array} \tag{8}$$

Wir werden einen Isomorphismus $t_{x_0}^G$ konstruieren, so dass $t_{x_0}^G(x_n) = i_n$.

Konstruktion der $t_{x_0, n}^G$: Der Körper L_n ist der Funktionenkörper $K(Y_n)$ einer irreduziblen algebraischen Kurve Y_n , und das kommutative Diagramm (7) ist äquivalent zum folgenden:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{h} & Y_1 & \xleftarrow{h} & Y_2 & \xleftarrow{h} & Y_3 & \xleftarrow{h} & \dots \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{f} & \dots
\end{array} \tag{9}$$

Die Abbildung

$$h^n : Y_n \setminus (h^n)^{-1}(V_{\Gamma_f}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$$

ist eine zusammenhängende Galois-Überlagerung (siehe Definition 4.12 in Anhang 4.2). Deswegen bestimmt jedes $z_n \in (h^n)^{-1}(x_0)$ über x_n einen surjektiven Homomorphismus ψ_{z_n} von π_1 in die Gruppe \mathcal{D}_n der Deckbewegungen von $Y_n \setminus (h^n)^{-1}(V_{\Gamma_f})$ (siehe Definition 4.10 und Bemerkung 4.15 in Anhang 4.2). Wir wählen eine Folge y_n , so dass $y_n \in (h^n)^{-1}(x_n)$ und $h(y_n) = y_{n-1}$. Da es eine Entsprechung zwischen algebraischen irreduziblen Kurven und Funktionenkörpern in einer Variablen gibt, und nach der Theorie der Galois-Überlagerung ist \mathcal{D}_n zu $G_n = \text{Gal}(L_n, K_0)$ isomorph. Sei ϕ_n der Isomorphismus von \mathcal{D}_n nach G_n . Dann ist $s_n := \phi_n \psi_{y_n}$ die entsprechende surjektive Abbildung von π_1 nach G_n . Das Bild des Stabilisators $S_{\pi_1}(x_n)$ unter s_n ist $\text{Gal}(L_n, K_n)$. Mit Hilfe des ersten Isomorphiesatzes und da sowohl G_n auf T_n^{Gal} als auch π_1 auf $T_{x_0, n}$ transitiv operiert, haben wir Bijektionen:

$$T_{n, x_0} \xleftarrow{1:1} \pi_1 / S_{\pi_1}(x_n) \xleftarrow{1:1} G_n / \text{Gal}(L_n, K_n) \xleftarrow{1:1} T_n^{Gal}. \tag{10}$$

Sei $t_{x_0, n}^G$ die Bijektion von $T_{x_0, n}$ nach T_n^{Gal} . Dann erfüllen die $t_{x_0, n}^G$ das kommutative Diagramm (8) und die Gleichung $t_{x_0, n}^G(x_n) = i_n$.

Lemma 3.14 *Die Bijektionen $t_{x_0, n}^G$ sind bis auf Konjugation unabhängig von der Wahl von y_n .*

Beweis: Seien y_n und y'_n zwei Punkte über x_n . Bezeichnen wir mit \tilde{f} die Deckbewegung $\tilde{f}(y_n, y'_n)$ (siehe Satz 4.13 in Anhang 4.2), dann gilt $\psi_{y'_n} = \tilde{f} \psi_{y_n} \tilde{f}^{-1}$. Somit folgt, dass s'_n und s_n konjugiert sind. \square

3.5.2 Der Isomorphismus $t_{x_0}^a$ von T^a nach T_{x_0}

Seien \tilde{x}_0 und \tilde{x}'_0 die Urbilder von x_0 unter f . Wir wählen Wege τ bzw. τ' in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$ von x_0 nach \tilde{x}_0 bzw. von x_0 nach \tilde{x}'_0 . Diese Wege induzieren einen Automorphismus $\sigma_{\tau\tau'}$ von T_{x_0} :

$$\sigma_{\tau\tau'}(x) = \begin{cases} \text{Endpunkt des Lifts von } \tau'\tau^{-1} \text{ unter } f^n \text{ mit Anfangspunkt} \\ \quad x, \text{ falls } x \in T_{\tilde{x}_0, n} \\ \\ \text{Endpunkt des Lifts von } \tau\tau'^{-1} \text{ unter } f^n \text{ mit Anfangspunkt} \\ \quad x, \text{ falls } x \in T_{\tilde{x}'_0, n} \\ \\ x_0, \text{ falls } x = x_0. \end{cases}$$

Wir suchen einen Isomorphismus $t_{x_0}^a$ von T^a nach T_{x_0} , so dass folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

- i) $t_{x_0}^a$ induziert Isomorphismen von T_0^a nach $T_{\tilde{x}_0}$ und von T_1^a nach $T_{\tilde{x}'_0}$,
- ii) $t_{x_0}^a \sigma(t_{x_0}^a)^{-1} = \sigma_{\tau\tau'}$.

Wir identifizieren die binären Bäume T_0^a und T_1^a mit T^a mittels der Isomorphismen ι_0 und ι_1 . Ferner identifizieren wir die binären Bäume $T_{\tilde{x}_0}$ und $T_{\tilde{x}'_0}$ mit T_{x_0} via i_τ und i'_τ .

Seien $A_1 := T^a, A_2 := T^a, B_1 := T_{x_0}$ und $B_2 := T_{x_0}$. Wir bezeichnen mit g^a den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} \sqcup A_1 \sqcup A_2 &\rightarrow T^a \\ x &\mapsto \begin{cases} \iota_0^{-1}(x) & , \text{ falls } x \in A_1 \\ \iota_1^{-1}(x) & , \text{ falls } x \in A_2 \\ \emptyset & , \text{ falls } x = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

und mit g_{x_0} den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \{x_0\} \sqcup B_1 \sqcup B_2 &\rightarrow T_{x_0} \\ x &\mapsto \begin{cases} i_\tau(x) & , \text{ falls } x \in B_1 \\ i_{\tau'}(x) & , \text{ falls } x \in B_2 \\ x_0 & , \text{ falls } x = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.15 Sei $r : T^a \rightarrow T_{x_0}$ ein Isomorphismus. Dann induziert r auf natürliche Weise ein Isomorphismus

$$\underline{r} : \{\emptyset\} \sqcup A_1 \sqcup A_2 \rightarrow \{x_0\} \sqcup B_1 \sqcup B_2$$

so, dass $\underline{r}(A_i) = B_i$ und $\underline{r}(\emptyset) = x_0$.

Proposition 3.16

(1) *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus t von T^a nach T_{x_0} , so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccc} \{\emptyset\} & \sqcup & T^a & \sqcup & T^a & \xrightarrow[\sim]{g^a} & T^a \\ & & \downarrow \underline{t} & & & & \downarrow t \\ \{x_0\} & \sqcup & T_{x_0} & \sqcup & T_{x_0} & \xrightarrow[\sim]{g_{x_0}} & T_{x_0} \end{array} \quad (11)$$

(2) *t erfüllt die obigen Eigenschaften i) und ii).*

Beweis: Existenz (mit Induktion): Wir setzen

$$\begin{cases} t(\emptyset) = x_0 \\ t(0) = \tilde{x}_0 \\ t(1) = \tilde{x}'_0 \end{cases}$$

Dann ist t bestimmt bis Niveau $n = 1$. Sei nun t bestimmt bis Niveau n . Für

$$x \in T_{n+1}^a := \{v \in V \mid |v| = n + 1\}$$

ist $(g^a)^{-1}(x) \in T_n^a$, und wir definieren rekursiv

$$t(x) = g_{x_0} \circ t \circ (g^a)^{-1}(x) \in T_{n+1}^a.$$

Somit erfüllt t nach Konstruktion das kommutative Diagramm (11). Eine ähnliche Konstruktion zeigt, dass es einen Morphismus $t' : T_{x_0} \rightarrow T^a$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} \{\emptyset\} & \sqcup & T^a & \sqcup & T^a & \xrightarrow[\sim]{g^a} & T^a \\ & & \uparrow \underline{t'} & & & & \uparrow t' \\ \{x_0\} & \sqcup & T_{x_0} & \sqcup & T_{x_0} & \xrightarrow[\sim]{g_{x_0}} & T_{x_0} \end{array} \quad (12)$$

Da

$$t \circ t' = id_{T_{x_0}} \quad \text{und} \quad t' \circ t = id_{T^a}$$

gilt, ist t ein Isomorphismus von T^a nach T_{x_0} . Die Eindeutigkeit von t folgt aus der Kommutativität des Diagramms (11).

Die Behauptung (2) des Lemmas folgt sofort aus (1). \square

Ab jetzt identifizieren wir die Bäume T^a, T^{Gal}, T_{x_0} auf diese Weise. Somit sind auch $\text{Aut}(T^a), \text{Aut}(T^{Gal}), \text{Aut}(T_{x_0})$ identifiziert.

Bemerkung 3.17 Mit Hilfe dieser Identifikation können wir alle Fragestellungen zum binären Baum T^{Gal} in Fragestellungen zum binären Baum T^a übersetzen. Der Baum T^a hat den Vorteil, dass er mathematisch handlicher als T^{Gal} ist.

3.6 Übersetzung Galoisgruppe—Fundamentalgruppe

Da der quadratische Morphismus

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus f^{-1}(V_{\Gamma_f}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$$

eine Überlagerung ist, induziert $[\alpha] \in \pi_1$ einen Automorphismus $l_{[\alpha]}$ von T_{x_0} (vgl. 3.10 und beachte, dass $x_0 = z_0$ und $\tau = \alpha$). Somit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} l : \pi_1 &\rightarrow \text{Aut}(T_{x_0}) \\ [\alpha] &\mapsto l_{[\alpha]}. \end{aligned}$$

Da l ein Gruppenhomomorphismus ist, ist das Bild \mathcal{G} von π_1 eine Untergruppe von $\text{Aut}(T_{x_0})$.

Von dem Abschnitt 3.5.1 wissen wir, dass $s_n : \pi_1 \rightarrow G_n$ ein surjektiver Homomorphismus ist. Somit gilt

$$G_n \simeq \pi_1 / \ker(s_n).$$

Nach Konstruktion des Isomorphismus $t_{x_0}^G$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 & \xrightarrow{l} & \mathcal{G} \hookrightarrow \text{Aut}(T_{x_0}) \\ & \searrow s_n & \parallel \wr l \\ & & G_n \hookrightarrow \text{Aut}(T^{Gal}) \end{array} \quad (13)$$

kommutativ. Wir bezeichnen mit g_n den Gruppenhomomorphismus $\mathcal{G} \rightarrow G_n$. Die Gruppenhomomorphismen g_n sind verträglich mit dem inversen System G_n , und wegen der universellen Eigenschaft des inversen Limes gibt es einen Gruppenhomomorphismus von \mathcal{G} nach $G = \varprojlim G_n$. Da sowohl \mathcal{G} als auch G in $\text{Aut}(T^a)$ liegen, folgt $\mathcal{G} \subset G$. Die Surjektivität von g_n impliziert, dass \mathcal{G} in G dicht liegt. Somit ist G der Abschluss von \mathcal{G} in der proendlichen Topologie.

Bemerkung 3.18 Da die Gruppe \mathcal{G} von f und x_0 abhängt, werden wir sie mit \mathcal{G}_{f,x_0} bezeichnen, wenn Unklarheiten entstehen können.

3.7 Rekursive Beschreibung der Gruppe \mathcal{G}

Ein Automorphismus in $\text{Aut}(T^a)$ kann auf verschiedene Weise dargestellt werden. Besonders nützlich für explizite Rechnungen ist es, Automorphismen rekursiv darzustellen, zum Beispiel $a = (1, a)\sigma$. Rekursive Darstellungen eines Automorphismus sind nicht eindeutig, wie folgende Proposition zeigt:

Proposition 3.19 *Wir betrachten die Automorphismen $a = (1, a)$ und $b = ((b, b), 1)$ in $\text{Aut}(T_{x_0})$. Dann gilt $a = b = id$.*

Beweis:

- $a = (1, a) = id$ (mit Induktion): Sei $n = 1$. Nach Definition ist $a\emptyset = \emptyset$ und $a|T_1^a = id_{T_1^a}$. Nehmen wir also an, dass $a|T_n^a = id_{T_n^a}$ für $n > 1$. Sei $x \in T_{0,n}^a$, dann gilt $ax = (1, a)x = x$. Für $x \in T_{1,n}^a$, ist $\iota_1 x \in T_n^a$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$ax = (1, a)x = \iota_1^{-1} a \iota_1 x = x.$$

Da $T_{n+1}^a = T_{0,n}^a \sqcup T_{1,n}^a$, gilt $a|T_{n+1}^a = id_{T_{n+1}^a}$.

- $b = ((b, b), 1) = id$: Der Beweis geht ähnlich wie oben. □

Nun entwickeln wir eine Methode, die uns erlaubt, eine rekursive Darstellung für jeden Automorphismus in \mathcal{G} zu finden.

Wir wählen ein Erzeugendensystem $\{[\alpha_1], \dots, [\alpha_n]\}$ der Gruppe π_1 und betrachten ein Element $[\alpha] \in \pi_1$. Seien $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\alpha}'$ die Lifts von α unter f mit Anfangspunkten \tilde{x}_0 und \tilde{x}'_0 . Es können zwei Fälle auftreten:

- 1) Die Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\alpha}'$ sind geschlossen.
- 2) Die Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\alpha}'$ sind nicht geschlossen.

Sei $\tilde{\pi}_1 := \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, \tilde{x}_0)$ und sei $\tilde{\pi}'_1 := \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, \tilde{x}'_0)$. Wir betrachten $a = l_{[\alpha]}$. Seien

$$\tilde{l} : \tilde{\pi}_1 \rightarrow \text{Aut}(T_{\tilde{x}_0})$$

und

$$\tilde{l}' : \tilde{\pi}'_1 \rightarrow \text{Aut}(T_{\tilde{x}'_0}).$$

die Gruppenhomomorphismen aus Abschnitt 3.6. Wir wählen τ und τ' wie im Abschnitt 3.5.2.

Lemma 3.20 *Im Fall (1) gilt*

$$a = (i_\tau^{-1} \tilde{l}_{[\tilde{\alpha}]} i_\tau, i_{\tau'}^{-1} \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}']} i_{\tau'}).$$

Beweis (mit Induktion): Sei

$$b := (i_\tau^{-1} \tilde{l}_{[\tilde{\alpha}]} i_\tau, i_{\tau'}^{-1} \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}']} i_{\tau'}).$$

Sei $n = 1$. Dann gilt nach Definition von a und b , dass

$$a\emptyset = \emptyset = b\emptyset \quad \text{und} \quad a|T_{x_0,1} = b|T_{x_0,1}.$$

Nehmen wir an, dass $a|T_{x_0,n} = b|T_{x_0,n}$ für $n > 1$.

Sei $x \in T_{\tilde{x}_0,n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} bx &= \tilde{l}_{[\tilde{\alpha}]}x \\ &= \text{Endpunkt des Lifts von } \tilde{\alpha} \text{ unter } f_n \text{ mit Anfangspunkt } x \\ &= \text{Endpunkt des Lifts von } \alpha \text{ unter } f_{n+1} \text{ mit Anfangspunkt } x \\ &= ax. \end{aligned}$$

Analog gilt $ax = bx$ für $x \in T_{\tilde{x}'_0,n}$.

Da $T_{x_0,n+1} = T_{\tilde{x}_0,n} \cup T_{\tilde{x}'_0,n}$, folgt, dass $a|T_{x_0,n+1} = b|T_{x_0,n+1}$. \square

Lemma 3.21 *Im Fall (2) gilt*

$$a = (\tilde{l}_{[\tilde{\alpha}'\tau'\tau^{-1}]}, \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}\tau\tau^{-1}]})\sigma_{\tau\tau'}.$$

Beweis (mit Induktion): Sei

$$b := (\tilde{l}_{[\tilde{\alpha}'\tau'\tau^{-1}]}, \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}\tau\tau^{-1}]})\sigma_{\tau\tau'}.$$

Sei $n = 1$. Dann gilt nach Definition von a und b , dass

$$a\emptyset = \emptyset = b\emptyset \quad \text{und} \quad a|T_{x_0,1} = \sigma_{\tau\tau'}|T_{x_0,1} = b|T_{x_0,1}.$$

Nehmen wir an, dass $a|T_{x_0,n} = b|T_{x_0,n}$ für $n > 1$. Sei $x \in T_{\tilde{x}_0,n}$. Dann gilt $\sigma_{\tau\tau'}x \in T_{\tilde{x}'_0,n}$ und

$$\begin{aligned} bx &= \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}\tau\tau^{-1}]}x \\ &= \text{Endpunkt des Lifts von } \tilde{\alpha}\tau\tau'^{-1} \text{ unter } f_n \text{ mit Anfangspunkt } \sigma_{\tau\tau'}x \\ &= \text{Endpunkt des Lifts von } \tilde{\alpha} \text{ unter } f_n \text{ mit Anfangspunkt } x \\ &= \text{Endpunkt des Lifts von } \alpha \text{ unter } f_{n+1} \text{ mit Anfangspunkt } x \\ &= ax. \end{aligned}$$

Analog gilt $ax = bx$ für $x \in T_{\tilde{x}'_0,n}$.

Da $T_{x_0,n+1} = T_{\tilde{x}_0,n} \cup T_{\tilde{x}'_0,n}$, folgt, dass $a|T_{x_0,n+1} = b|T_{x_0,n+1}$. \square

Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [\tilde{\beta}] & \longmapsto & [\tau^{-1}\tilde{\beta}\tau] \\ \tilde{\pi}_1 & \longrightarrow & \pi_1 \\ \tilde{i} \downarrow & & \downarrow i \\ \text{Aut}(T_{\tilde{x}_0}) & \longrightarrow & \text{Aut}(T_{x_0}) \\ & \tilde{b} \longmapsto & i_{\tau^{-1}}\tilde{b}i_{\tau} \end{array} \quad (14)$$

kommutativ ist, gilt in beiden Fällen

$$i_{\tau}^{-1} \tilde{l}_{[\tilde{\alpha}]} i_{\tau} = l_{[\tau^{-1} \tilde{\alpha} \tau]} \quad \text{und} \quad i_{\tau}^{-1} \tilde{l}_{[\tilde{\alpha}' \tau' \tau^{-1}]} i_{\tau} = l_{[\tau^{-1} \tilde{\alpha}' \tau']}.$$

Indem man im kommutativen Diagramm (14) $\tilde{\pi}_1, \tau, \tilde{l}$ durch $\tilde{\pi}'_1, \tau', \tilde{l}'$ ersetzt, findet man analog, dass

$$i_{\tau'}^{-1} \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha}']} i_{\tau'} = l_{[\tau'^{-1} \tilde{\alpha}' \tau']} \quad \text{und} \quad i_{\tau'}^{-1} \tilde{l}'_{[\tilde{\alpha} \tau \tau'^{-1}]} i_{\tau'} = l_{[\tau'^{-1} \tilde{\alpha} \tau]}.$$

Seien p, p' bzw. q, q' nichtkommutative Monome in n Variablen, so dass in Fall (1)

$$\begin{aligned} [\tau^{-1} \tilde{\alpha} \tau] &= p([\alpha_1], \dots, [\alpha_n]), \\ [\tau'^{-1} \tilde{\alpha}' \tau'] &= p'([\alpha_1], \dots, [\alpha_n]) \end{aligned}$$

bzw. in Fall (2)

$$\begin{aligned} [\tau'^{-1} \tilde{\alpha} \tau] &= q([\alpha_1] \dots [\alpha_n]), \\ [\tau^{-1} \tilde{\alpha}' \tau'] &= q'([\alpha_1] \dots [\alpha_n]) \end{aligned}$$

gilt. Dann finden wir durch Anwendung von l auf die Gleichungen die rekursive Darstellung von a in Fall (1):

$$a = (p(l_{[\alpha_1]}, \dots, l_{[\alpha_n]}), p'(l_{[\alpha_1]}, \dots, l_{[\alpha_n]}))$$

bzw. in Fall (2):

$$a = (q'(l_{[\alpha_1]}, \dots, l_{[\alpha_n]}), q(l_{[\alpha_1]}, \dots, l_{[\alpha_n]})) \sigma_{\tau \tau'}.$$

Bemerkung 3.22

Falls f einen Fixpunkt x_0 besitzt, setzen wir $\tilde{x}_0 = x_0$. Dann vereinfacht sich die Rechnung, falls man für τ einen Repräsentanten des Einselementes in π_1 wählt.

Proposition 3.23 *Die Konjugationsklasse der Gruppe \mathcal{G} in $\text{Aut}(T^a)$ ist unabhängig von der Wahl von x_0 .*

Beweis: Sei π'_1 die Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$ bezüglich x'_0 , und sei \mathcal{G}' das Bild von π'_1 in $\text{Aut}(T^a)$. Wir müssen zeigen, dass \mathcal{G} und \mathcal{G}' konjugiert sind. Sei τ' ein Weg in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$ von x_0 nach x'_0 . Wir wissen, dass \mathcal{G} gleich

$$t_{x_0}^g \{ l_{\alpha} \mid \alpha \in \pi_1 \} (t_{x_0}^g)^{-1}$$

in $\text{Aut}(T^{Gal})$ ist, und das kommutative Diagramm (14) für $\tilde{x}_0 = x'_0$ und $\tau = \tau'$, sagt uns, dass \mathcal{G}' gleich

$$t_{x_0}^g i_{\tau'} \{ l_{\alpha} \mid \alpha \in \pi_1 \} i_{\tau'}^{-1} (t_{x_0}^g)^{-1}$$

in $\text{Aut}(T^{Gal})$ ist. Wählt man $r = t_{x_0}^g i_{\tau'} (t_{x_0}^g)^{-1} \in \text{Aut}(T^{Gal})$, dann sind \mathcal{G} und \mathcal{G}' in $\text{Aut}(T^{Gal})$ konjugiert unter r .

Bemerkung 3.24 Wir bezeichnen mit \mathcal{G}_f die Konjugationklasse von \mathcal{G}_{f,x_0} .

Definition 3.25 Sei

$$\begin{aligned} j : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

der Morphismus, der durch die komplexe Konjugation induziert ist, wobei $\overline{\infty} = \infty$.

Proposition 3.26 *Seien $f, g : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zwei quadratische Morphismen, so dass $\overline{f(x)} = g(\bar{x})$ für alle $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gilt. Dann sind Γ_f und Γ_g isomorph und $\mathcal{G}_f = \mathcal{G}_g$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $f = j \circ g \circ j$, oder allgemein $f^n = j \circ g^n \circ j$. Das impliziert, dass $V_{\Gamma_g} = j(V_{\Gamma_f})$ und

$$j|_{V_{\Gamma_f}} : V_{\Gamma_f} \rightarrow V_{\Gamma_g}$$

ein Isomorphismus, der zu $j|_{V_{\Gamma_g}}$ invers ist. Sei $x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}$, dann ist $\bar{x}_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_g}$. Betrachten wir die geometrischen binären Bäume $T_{x_0}^f = (V_{x_0}^f, E_{x_0}^f)$ und $T_{\bar{x}_0}^g = (V_{\bar{x}_0}^g, E_{\bar{x}_0}^g)$. Dann ist $j_{x_0} := j|_{V_{x_0}^f}$ ein Isomorphismus von $T_{x_0}^f$ nach $T_{\bar{x}_0}^g$, der zu $j_{\bar{x}_0} := j|_{V_{\bar{x}_0}^g}$ invers ist. Wir zeigen $j_{\bar{x}_0} \mathcal{G}_{g, \bar{x}_0} j_{x_0} = \mathcal{G}_{f, x_0}$.

Seien

$$l : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0) \rightarrow \text{Aut}(T_{x_0}^f)$$

und

$$\bar{l} : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_g}, \bar{x}_0) \rightarrow \text{Aut}(T_{\bar{x}_0}^g).$$

die Gruppenhomomorphismen aus Abschnitt 3.6. Da $V_{\Gamma_g} = j(V_{\Gamma_f})$, ist

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0) &\rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_g}, \bar{x}_0) \\ [\beta] &\mapsto [\bar{\beta}] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Sei $x \in T_{x_0, n}^f$ und sei α ein Repräsentant von $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0)$. Unter der Benutzung der Symbol $L_{f^n}(\alpha, x)$ (vgl. Satz 4.9 in Anhang 4.2) gilt

$$\begin{aligned} j_{\bar{x}_0} \bar{l}_{[\bar{\alpha}]} j_{x_0}(x) &= j_{\bar{x}_0} L_{g^n}(\bar{\alpha}, \bar{x})(1) \\ &= j_{\bar{x}_0} L_{j f^n j}(\bar{\alpha}, \bar{x})(1) \\ &= j_{\bar{x}_0} j L_{f^n}(\alpha, x)(1) \\ &= L_{f^n}(\alpha, x)(1) = l_{[\alpha]}(x). \end{aligned}$$

□

3.8 Explizite Berechnungen der Gruppe \mathcal{G}

Wir werden in diesem Abschnitt explizit die rekursive Beschreibung von \mathcal{G} für einige quadratische Morphismen angeben. Genauer werden wir folgendem Programm folgen:

- 1) Auflisten der möglichen Graphen Γ wie in Bemerkung 3.9 aus Abschnitt 3.4 und mit $|V_\Gamma| \leq 5$.
- 2) Für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper k mit $\text{Char}(k) \neq 2$ und für Verzweigungsgraphen Γ mit $|V_\Gamma| \leq 4$ werden wir untersuchen, welche quadratische Morphismen es bis auf Konjugation mit Elementen von $\text{PGL}_2(k)$ gibt, deren Verzweigungsgraph isomorph zu Γ ist.
- 3) Berechnung von \mathcal{G} für jeden Morphismus, der in Punkt 2) auftritt, im Fall $k = \mathbb{C}$.

Am besten erklären wir die Punkte 2) und 3) anhand von Beispielen:

3.8.1 Beispiel

Wir betrachten folgenden Verzweigungsgraph Γ :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \circ^0 & \rightleftarrows & \bullet_1 \\
 & \text{---} & \\
 & \text{---} &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \circ^\infty \\
 \downarrow \\
 \circ^\infty
 \end{array}
 \end{array} \tag{15}$$

Aus dem Graphen können wir drei Gleichungen herleiten, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1 = f(0) = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 \\
 0 = f(1) = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 \\
 \infty = f(\infty) = \left(\frac{a}{c}\right)^2
 \end{array} \right.$$

Aus dem Gleichungssystem folgt, dass $f(x) = (x-1)^2$. Um die Gruppe \mathcal{G} rekursiv zu beschreiben, brauchen wir ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\pi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0)$, wobei der Punkt $x_0 = 3/2 + \sqrt{5}/2$ ein Fixpunkt von f ist. Wir wählen zum Beispiel folgende Erzeugende $[\alpha]$ und $[\beta]$:

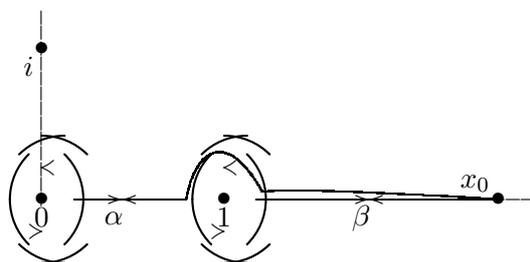


Bild 1

Bemerkung 3.27 Die Funktionen der Form $f(x) = (ax+b)^2/(cx+d)^2$ mit $ad-bc \neq 0$ sind analytische Funktionen, und da die Ableitung

$$f'(x) = 2 \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

ist, ist $f'(x) \neq 0$ für $x \in f^{-1}\{0, \infty\}$. Deswegen sind diese Funktionen orientierungstreu und winkeltreu ausserhalb einer Umgebung U des Nullpunktes. Durch Verkleinern von U wird die Funktion $f(x)$ durch $g(x) = (ax+b)^2$ approximiert. Nach einer Variablensubstitution der Form $x = y/a - b/a$ hat g die Gestalt $g(y) = y^2$. Das impliziert folgende Aussage: Wenn man einen Weg α in U um den Punkt 0 um den Winkel 2π durchläuft, wird der Lift $\tilde{\alpha}$ um den Punkt $f^{-1}(0)$ um den Winkel π durchlaufen.

Die Lifts $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}$ und $\tilde{\beta}'$ werden bestimmt mit Hilfe von Bemerkung (3.27):

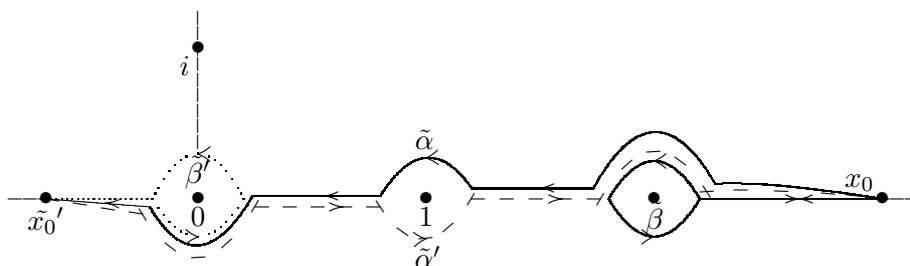


Bild 2

Sei $\tau = 1$ und $\tau' = (\tilde{\alpha}')^{-1}$. Dann können wir aus Bild 1) und 2) folgende Gleichungen ablesen:

- $[\tau'^{-1}\tilde{\alpha}\tau] = [\beta]$
- $[\tau^{-1}\tilde{\alpha}'\tau'] = 1$
- $[\tilde{\beta}] = 1$

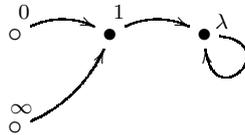
$$- [\tau'^{-1}\tilde{\beta}'\tau'] = [\beta][\alpha][\beta]^{-1}$$

Nun können wir $\mathcal{G} \subset \text{Aut}(T^a)$ rekursiv beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \langle a, b \rangle, \quad \text{wobei} \\ - a &= (1, b)\sigma \\ - b &= (1, bab^{-1}) \end{aligned}$$

3.8.2 Beispiel

Wir betrachten folgenden Verzweigungsgraph Γ :



Aus dem Verzweigungsgraphen können wir folgende Gleichungen ableiten:

$$1 = f(0) = \left(\frac{b}{d}\right)^2 \tag{16}$$

$$1 = f(\infty) = \left(\frac{a}{c}\right)^2. \tag{17}$$

Daraus schliessen wir, dass $d = \pm b$ und $c = \pm a$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $d = b$ ist, und da f nicht konstant ist, folgt $c = -a$. Somit hat f folgende Gestalt:

$$f(x) = \left(\frac{x + \frac{b}{a}}{x - \frac{b}{a}}\right)^2, \quad b, a \neq 0$$

oder nach Substitution $h = \frac{b}{a}$

$$f(x) = \left(\frac{x + h}{x - h}\right)^2, \quad h \neq 0.$$

Aus dem Verzweigungsgraphen lesen wir zwei weitere Gleichungen ab, nämlich

$$\lambda = f(1) = \left(\frac{1 + h}{1 - h}\right)^2 \tag{18}$$

$$\lambda = f(\lambda). \tag{19}$$

Gleichung (18) impliziert

$$\lambda \neq 0, 1, \infty \iff h \neq -1, 1, 0$$

und Gleichung (19) ist wegen $\lambda \neq 1$ äquivalent zu

$$-\frac{1+h}{1-h} = \frac{\lambda+h}{\lambda-h} \quad (20)$$

$$\iff p(h) = (h^2+1)(h^2-2h-1) = 0. \quad (21)$$

Aus obiger Überlegung folgt, dass die möglichen quadratischen Morphismen f mit Verzweigungsgraph Γ bis auf Konjugation mit Elementen von $\mathrm{PGL}_2(k)$ die folgenden sind:

$$f_h(x) = (x+h)^2/(x-h)^2$$

mit

$$P(h) = (h^2+1)(h^2-2h-1) = 0 \quad \text{und} \quad h \neq 0, 1, -1.$$

Im Fall $k = \mathbb{C}$ sind $h = 1 \pm \sqrt{2}$, $h = \pm i$ die Nullstellen von P . Für $h = 1 + \sqrt{2}$ bestimmen wir die rekursive Beschreibung der Gruppe $\mathcal{G}_h := \mathcal{G}_{f_h} \subset \mathrm{Aut}(T^a)$. Wir wählen ein freies Erzeugendensystem $\{[\alpha], [\beta], [\gamma]\}$ der Gruppe $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0)$, wobei $x_0 = i$ ein Fixpunkt von f ist, wie folgt:

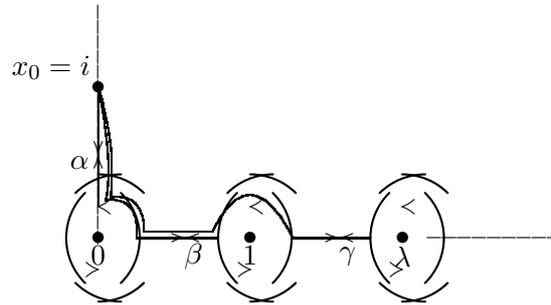


Bild 1

Die Lifts $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}, \tilde{\beta}', \tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ werden im nächsten Bild dargestellt :

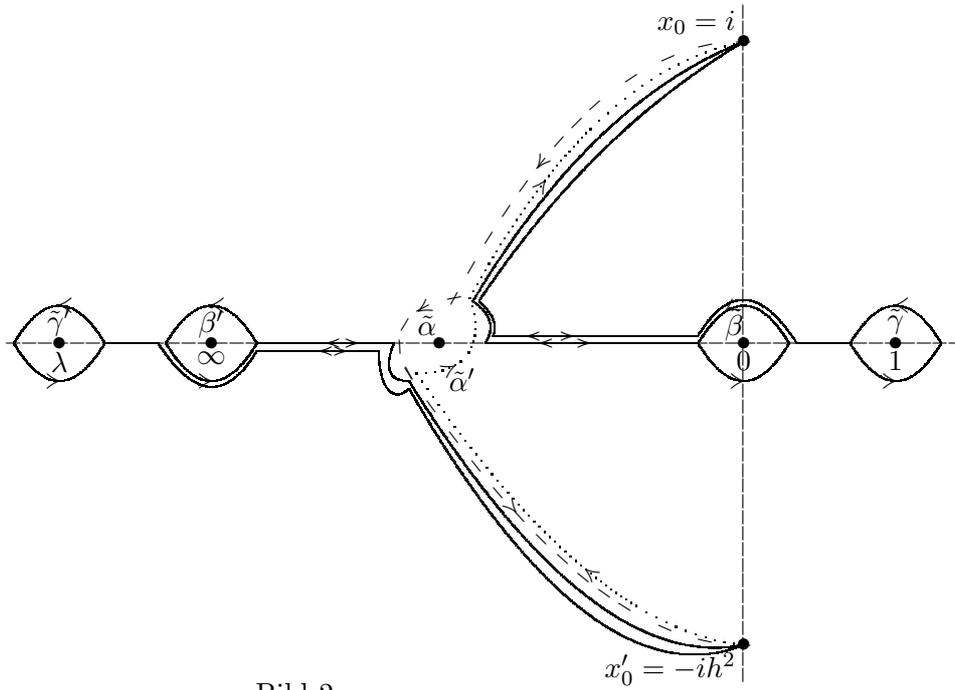


Bild 2

Sei $\tau = 1$ und $\tau' = (\tilde{\alpha}')^{-1}$. Dann können wir aus Bild 1) und 2) folgende Gleichungen ablesen:

- $[\tau^{-1}\tilde{\alpha}'\tau'] = 1$
- $[\tau'^{-1}\tilde{\alpha}\tau] = 1$
- $[\tilde{\beta}] = [\alpha]$
- $[\tilde{\gamma}] = [\beta]$
- $[\tau'\tilde{\beta}'\tau'^{-1}] = [\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}[\gamma]^{-1}$
- $[\tau'\tilde{\gamma}'\tau'^{-1}] = [\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}[\gamma][\beta][\alpha]$

Jetzt können wir $\mathcal{G}_h \subset \text{Aut}(T^a)$ rekursiv beschreiben:

$\mathcal{G}_{1+\sqrt{2}} = \langle a, b, c \rangle,$ <p>wobei</p> <ul style="list-style-type: none"> - $a = \sigma$ - $b = (a, a^{-1}b^{-1}c^{-1})$ - $c = (b, a^{-1}b^{-1}cba)$

Die Berechnung der Gruppe \mathcal{G}_h für die anderen Fälle geht ähnlich. Die Ergebnisse sind in den untenstehenden Tabellen angegeben.

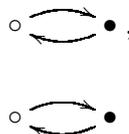
3.8.3 Tabellen

Folgende Bemerkungen sind hilfreich, um die folgenden Tabellen zu verstehen:

Bemerkung 3.28

Im folgende bedeutet das Symbol “ \circ ” den Punkt 0 oder ∞ und das Symbol “ \bullet ” bedeutet alle weiteren Punkte in V_{Γ_f} .

- 1) Für einen gegebenen Graph Γ in unserer Liste (siehe unten) mit $|V_{\Gamma}| = 4$ und verschieden vom Graph $\Gamma_{4.6}$,

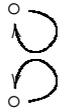
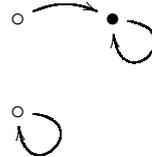
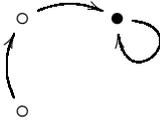
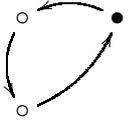


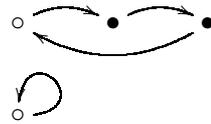
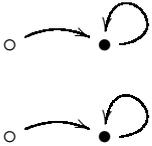
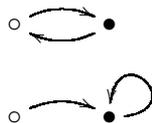
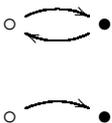
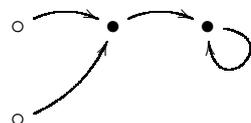
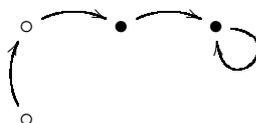
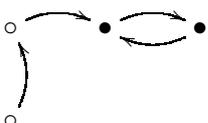
hängt die Existenz eines quadratischen Morphismus mit Verzweigungsgraph isomorph zu Γ von einem Parameter $h \in k \setminus A_h$ ab, wobei A_h eine endliche Teilmenge von k ist. Der Parameter h genügt einer Polynomgleichung $p(x)$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} , wobei $p(x)$ keinen linearen Faktor der Gestalt $(x - a_h)$ für $a_h \in A_h$ besitzt. Die Bedingung an h ist auch eine Bedingung an die Charakteristik: wir müssen alle Körper ausschliessen, in denen alle Nullstellen von $p(x)$ schon in A_h liegen.

- 3) Wir bezeichnen mit f_h den Morphismus zum Parameter h . Sei $\mathcal{G}_h := \mathcal{G}_{f_h}$ (vgl. Bemerkung 3.24 in Abschnitt 3.7). Es kann in unseren Beispielen vorkommen, dass mit h auch ihre Konjugierte \bar{h} als Nullstelle von p auftritt. Man hat in diesem Fall $\overline{f_h(x)} = f_{\bar{h}}(\bar{x})$ und deswegen gilt $\mathcal{G}_h = \mathcal{G}_{\bar{h}}$ nach Proposition 3.26. Aus diesem Grund taucht $\mathcal{G}_{\bar{h}}$ nicht in den Tabellen auf.
- 4) Wir haben keine Erklärung gefunden für die Tatsache, dass es keinen quadratischen Morphismus mit Verzweigungsgraph isomorph $\Gamma_{4.6}$ gibt.

Wir fahren jetzt mit unserem Programm (siehe Abschnitt 3.8) fort:

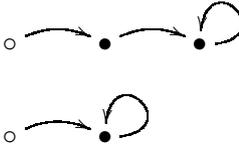
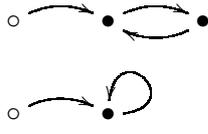
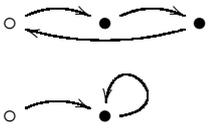
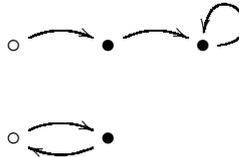
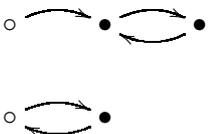
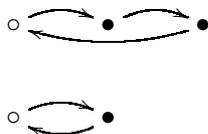
i)

Graph: $ \Gamma = 2$	
	
$\Gamma_{2.1}$	$\Gamma_{2.2}$
Graph: $ \Gamma = 3$	
	
$\Gamma_{3.1}$	$\Gamma_{3.2}$
	
$\Gamma_{3.3}$	$\Gamma_{3.4}$
	
$\Gamma_{3.5}$	

Graph: $ \Gamma = 4$	
 <p style="text-align: right;">Γ4.1</p>	 <p style="text-align: right;">Γ4.2</p>
 <p style="text-align: right;">Γ4.3</p>	 <p style="text-align: right;">Γ4.4</p>
 <p style="text-align: right;">Γ4.5</p>	 <p style="text-align: right;">Γ4.6</p>
 <p style="text-align: right;">Γ4.7</p>	 <p style="text-align: right;">Γ4.8</p>
 <p style="text-align: right;">Γ4.9</p>	 <p style="text-align: right;">Γ4.10</p>

Graph: $ \Gamma = 4$	
<p style="text-align: right;">Γ4.11</p>	<p style="text-align: right;">Γ4.12</p>
<p style="text-align: right;">Γ4.13</p>	<p style="text-align: right;">Γ4.14</p>
<p style="text-align: right;">Γ4.15</p>	<p style="text-align: right;">Γ4.16</p>

Graph: $|\Gamma| = 5$

 <p style="text-align: right;">Γ5.1</p>	 <p style="text-align: right;">Γ5.2</p>
 <p style="text-align: right;">Γ5.3</p>	 <p style="text-align: right;">Γ5.4</p>
 <p style="text-align: right;">Γ5.5</p>	 <p style="text-align: right;">Γ5.6</p>
 <p style="text-align: right;">Γ5.7</p>	 <p style="text-align: right;">Γ5.8</p>
 <p style="text-align: right;">Γ5.9</p>	 <p style="text-align: right;">Γ5.10</p>

Graph: $|\Gamma| = 5$

<p style="text-align: center;">Γ5.11</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.12</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.13</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.14</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.15</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.16</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.17</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.18</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.19</p>	

Graph: $ \Gamma = 5$	
<p style="text-align: center;">Γ5.20</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.21</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.22</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.23</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.24</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.25</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.26</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.27</p>
<p style="text-align: center;">Γ5.28</p>	<p style="text-align: center;">Γ5.29</p>

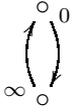
ii) und iii):

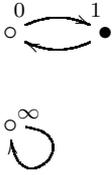
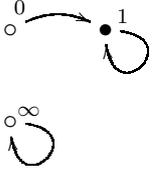
Alle Morphismen, die in den folgenden Tabellen auftreten, besitzen einen Fixpunkt x_0 ausserhalb der Eckenmenge V_{Γ_f} ihres Verzweigungsgraphen.

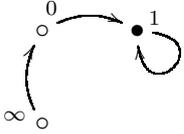
Deswegen haben wir immer den Fixpunkt als Basispunkt der Fundamentalgruppe $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Gamma, x_0)$ gewählt, um die Rechnungen zu vereinfachen. Sei $l : \pi_1 \rightarrow \text{Aut } T^a$ der Gruppenhomomorphismus aus Abschnitt 3.6.

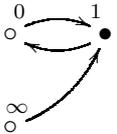
Um die nächste Tabelle klarer aufzustellen, benutzen wir folgende Notation

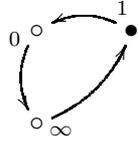
- $V_0 :=$ Bilder der Verzweigung bei 0 unter l
- $V_1 :=$ Bilder der Verzweigung bei 1 unter l
- $V_\lambda :=$ Bilder der Verzweigung bei λ unter l
- $V_\infty :=$ Bilder der Verzweigung bei ∞ unter l

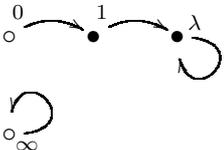
<p>$\Gamma_{2.1}$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = x^2$ 	<p>$x_0 = 1$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G} = \langle a \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, a)\sigma$</p> </div>
<p>$\Gamma_{2.2}$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 	<p>$x_0 = 1$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G} = \langle a \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, a)\sigma$</p> </div>

<p>$\Gamma 3.1$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = (x - 1)^2$ 	<p>$x_0 = 3/2 + \sqrt{5}/2$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}b^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G} = \langle a, b \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, b)\sigma$</p> <p>$b = (1, bab^{-1})$</p> </div>
<p>$\Gamma 3.2$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = (2x - 1)^2$ 	<p>$x_0 = 1/4$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\infty = b^{-1}a^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G} = \langle a, b \rangle$, wobei</p> <p>$a = \sigma$</p> <p>$b = (a, b)$</p> </div>

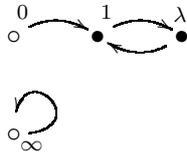
<p>$\Gamma 3.3$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$ 	<p> $x_0 = i/2$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\infty = a^{-1}b^{-1}$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p> $\mathcal{G} = \langle a, b \rangle$, wobei $a = (1, a^{-1}b^{-1})\sigma$ $b = (a, b)$ </p> </div>
--	--	---

<p>$\Gamma 3.4$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ 	<p> $x_0 \approx 0,29$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\infty = b^{-1}a^{-1}$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p> $\mathcal{G} = \langle a, b \rangle$, wobei $a = (1, b)\sigma$ $b = (a, a^{-1}b^{-1})$ </p> </div>
--	--	--

<p>$\Gamma 3.5$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ 	<p>$x_0 \approx 0,56$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\infty = b^{-1}a^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G} = \langle a, b \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, b)\sigma$</p> <p>$b = (1, a^{-1}b^{-1})$</p> </div>
--	--	--

<p>$\Gamma_{4.1}$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{h}\right)^2$ • $h \neq -1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = 2h^3 + 2h^2 + 2h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 \approx -0,64$ - $h_1 \approx -0,17 - 0,86i$ - $h_2 \approx -0,17 + 0,86i$ • $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$
<p>$h_0 \approx -0,64$</p> <p>$x_0 \approx 1,41$</p> <p>$V_0 = c^{-1}a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = b^{-1}c$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}$</p>	<p>$h_1 \approx -0,17 - 0,86i$</p> <p>$x_0 \approx 0,29 + 0,30i$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = c^{-1}a^{-1}b^{-1}$</p>
<p>$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, a)\sigma$</p> <p>$b = (1, ac^{-1})$</p> <p>$c = (b, ab^{-1})$</p>	<p>$\mathcal{G}_{h_1} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = \sigma$</p> <p>$b = (a, 1)$</p> <p>$c = (b, c)$</p>

$\Gamma 4.2$



- $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{h}\right)^2$
- $h \neq -1/2, -1$ und
$$p(h) = h^2 + 1 = 0$$

- Nullstellen:

- $h_0 = i$
- $h_1 = -i$

- $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$

$$h_0 = i$$

$$x_0 \approx -1,30 - 1,62i$$

$$V_0 = a$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

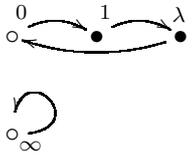
$$V_\infty = b^{-1}a^{-1}c^{-1}$$

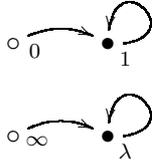
$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei

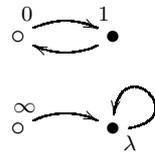
$$a = \sigma$$

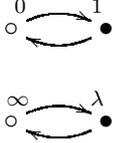
$$b = (c, cac^{-1})$$

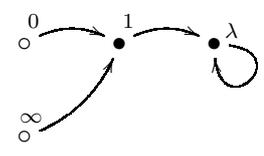
$$c = (1, cbc^{-1})$$

<p>$\Gamma 4.3$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{h}\right)^2$ • $h \neq -1/2, -1$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = h^3 + h^2 + 2h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 \approx -0,56$ - $h_1 \approx -0,21 - 1,30i$ - $h_2 \approx -0,21 + 1,30i$ • $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$
<p>$h_0 \approx -0,56$</p> <p>$x_0 \approx 1,19$</p> <p>$V_0 = c^{-1}a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = b^{-1}c$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}$</p>	<p>$h_1 \approx -0,21 - 1,30i$</p> <p>$x_0 \approx -1,63 + 2,82i$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = b^{-1}c^{-1}a^{-1}$</p>
<p>$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, a)\sigma$</p> <p>$b = (1, ac^{-1})$</p> <p>$c = (b, ac^{-1})$</p>	<p>$\mathcal{G}_{h_1} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, aca^{-1})\sigma$</p> <p>$b = (a, 1)$</p> <p>$c = (aba^{-1}, 1)$</p>

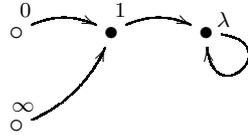
<p>$\Gamma 4.4$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{-(1+2h)x+h}\right)^2$ • $h \neq -1, 0, -1/2$ und $p(h) = 2h^2 - h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$ - $h_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}$ • $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$ 	$h_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$ $x_0 = \frac{-3}{8} + \frac{\sqrt{7}i}{8}$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = \sigma$ $b = (c^{-1}bc, a)$ $c = (c^{-1}b^{-1}a^{-1}, c)$ </div>
--	---	---

<p>$\Gamma 4.5$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x-1}{hx-1}\right)^2$ • $h \neq 0, 1, -1$ und $p(h) = h + 2 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = -2$ • $\text{Char}(k) \neq 3$ 	$h_0 = -2$ $x_0 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = b^{-1}c^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = (1, acbc^{-1}a^{-1})\sigma$ $b = (1, acbab^{-1}c^{-1}a^{-1})$ $c = (aca^{-1}, b^{-1}c^{-1}a^{-1})$ </div>
--	---	---

<p>$\Gamma 4.6$</p> 	<p>Es gibt für diesen Graph keinen Morphismus</p>
--	---

<p>$\Gamma_{4.7}$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{x-h}\right)^2$ • $h \neq -1, 1, 0$ und $p(h) = (h^2 + 1)(h^2 - 2h - 1) = 0$ <ul style="list-style-type: none"> • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = i$ - $h_1 = -i$ - $h_2 = 1 + \sqrt{2}$ - $h_3 = 1 - \sqrt{2}$ • $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$
<p>$h_0 = i$</p> <p>$x_0 \approx 1,78 + 2,27i$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = b^{-1}a^{-1}c^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = \sigma$</p> <p>$b = (cab, bab)$</p> <p>$c = (b, bacab)$</p> </div>	<p>$h_2 = 1 + \sqrt{2}$</p> <p>$x_0 = i$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = a^{-1}b^{-1}c^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G}_{h_2} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = \sigma$</p> <p>$b = (a, abc)$</p> <p>$c = (b, abcba)$</p> </div>

$\Gamma 4.7$



$$h_3 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_0 = i$$

$$V_0 = a$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

$$V_\infty = a^{-1}c^{-1}b^{-1}$$

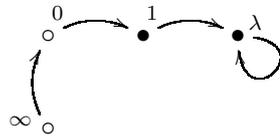
$\mathcal{G}_{h_3} = \langle a, b, c \rangle$, wobei

$$a = \sigma$$

$$b = (bac, a)$$

$$c = (b, c)$$

$\Gamma 4.8$



- $f_h(x) = \left(\frac{1}{hx+1}\right)^2$

- $h \neq -2, -1, 0$ und

$$p(h) = h^3 + 4h^2 + 6h + 2 = 0$$

- Nullstellen:

- $h_0 \approx -0,45$

- $h_1 \approx -1,77 + 1,11i$

- $h_2 \approx -1,77 - 1,11i$

- $\text{Char}(k) \neq 5$

$$h_0 \approx -0,45$$

$$x_0 \approx 0,50 + 1,08i$$

$$V_0 = a$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

$$V_\infty = a^{-1}c^{-1}b^{-1}$$

$$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$$

$$a = (1, a^{-1}c^{-1}b^{-1})\sigma$$

$$b = (a, 1)$$

$$c = (a^{-1}ba, a^{-1}ca)$$

$$h_1 \approx -1,77 + 1,11i$$

$$x_0 \approx 0,86 + 0,42i$$

$$V_0 = a$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

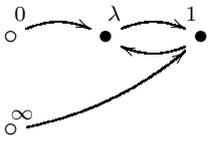
$$V_\infty = c^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

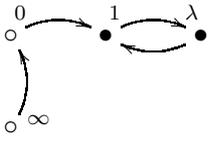
$$\mathcal{G}_{h_1} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$$

$$a = (1, c^{-1}a^{-1}b^{-1})\sigma$$

$$b = (1, c^{-1}ac)$$

$$c = (b, c)$$

<p>$\Gamma 4.9$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x - \frac{h}{1+2h}}{x+h} \right)^2$ • $h \neq -1, -1/2, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = 2h^2 - h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$ - $h_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$ • $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$ 	$h_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$ $x_0 = \frac{-3}{8} + \frac{\sqrt{7}i}{8}$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = \sigma$ $b = (aca, c^{-1}b^{-1}a^{-1})$ $c = (a, aba)$ </div>
--	---	--

<p>$\Gamma 4.10$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{1}{hx+1} \right)^2$ • $h \neq -2, -1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = 2h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = -\frac{1}{2}$ • $\text{Char}(k) \neq 3$ 	$h_0 = -\frac{1}{2}$ $x_0 \approx 3, 13$ $V_0 = ab^{-1}$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = c^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = (1, b^{-1})\sigma$ $b = (c, b^{-1}a)$ $c = (1, b)$ </div>
---	---	--

$\Gamma 4.11$



- $f_h(x) = \left(\frac{x-1}{x+h}\right)^2$
- $h \neq -1, 1, 0$ und
$$p(h) = h^2 - 2h + 2 = 0$$

- Nullstellen:

- $h_0 = 1 + i$
- $h_1 = 1 - i$

- $\text{Char}(k) \neq 5$

$$h_0 = 1 + i$$

$$x_0 \approx -0,31 - 2,68i$$

$$V_0 = ac^{-1}$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

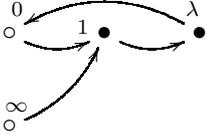
$$V_\infty = b^{-1}a^{-1}$$

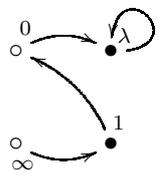
$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei

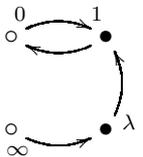
$$a = (1, c^{-1}ab)\sigma$$

$$b = (b^{-1}a^{-1}, c)$$

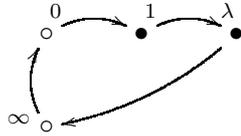
$$c = (1, c^{-1}a)$$

<p>$\Gamma 4.12$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x+h}{x-h}\right)^2$ • $h \neq 1, -1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = h^3 - h^2 + 3h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 \approx -0,295$ - $h_1 \approx 0,64 - 1,72i$ - $h_2 \approx 0,64 + 1,72i$ • $\text{Char}(k)$ beliebig
<p>$h_0 \approx -0,295$</p> <p>$x_0 \approx 0,136$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = b^{-1}c^{-1}a^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, c)\sigma$</p> <p>$b = (a, cb^{-1}c^{-1}a^{-1}c^{-1})$</p> <p>$c = (1, cbc^{-1})$</p> </div>	<p>$h_1 \approx 0,64 - 1,72i$</p> <p>$x_0 \approx 3,20 - 3,16i$</p> <p>$V_0 = a$</p> <p>$V_1 = b$</p> <p>$V_\lambda = c$</p> <p>$V_\infty = c^{-1}a^{-1}b^{-1}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei</p> <p>$a = (1, baca^{-1}b^{-1})\sigma$</p> <p>$b = ((bac)^{-1}, baca(bac)^{-1})$</p> <p>$c = (1, bacb(bac)^{-1})$</p> </div>

<p>$\Gamma 4.13$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x-1}{x+h}\right)^2$ • $h \neq -1, 1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = 2h^2 - 2h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ - $h_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ • $\text{Char}(k) \neq 5$ 	$h_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ $x_0 \approx 0,39 - 0,14i$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = b^{-1}a^{-1}c^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = (1, b)\sigma$ $b = (1, a^{-1}c^{-1}b^{-1})$ $c = (a, bcb^{-1})$ </div>
---	---	---

<p>$\Gamma 4.14$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x-1}{hx-1}\right)^2$ • $h \neq -1, 1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = 2h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = -\frac{1}{2}$ • $\text{Char}(k) \neq 3$ 	$h_0 = -\frac{1}{2}$ $x_0 \approx 0,33$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = (1, b)\sigma$ $b = (a, bcb^{-1})$ $c = (1, bc^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1})$ </div>
---	--	---

$\Gamma 4.15$



- $f_h(x) = \left(\frac{1}{hx+1}\right)^2$

- $h \neq -1, -2, 0$ und

$$p(h) = h^2 + 3h + 1 = 0$$

- Nullstellen:

- $h_0 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

- $h_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

- $\text{Char}(k) = \text{beliebig}$

$$h_0 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_0 \approx 3,93$$

$$V_0 = b^{-1}a$$

$$V_1 = c^{-1}b$$

$$V_\lambda = c$$

$$V_\infty = a^{-1}$$

$\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle$, wobei

$$a = (1, c^{-1})\sigma$$

$$b = (1, c^{-1}a)$$

$$c = (1, c^{-1}b)$$

$$h_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$x_0 \approx 0,81$$

$$V_0 = ac^{-1}$$

$$V_1 = b$$

$$V_\lambda = c$$

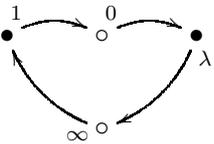
$$V_\infty = b^{-1}a^{-1}$$

$\mathcal{G}_{h_1} = \langle a, b, c \rangle$, wobei

$$a = (1, a^{-1})\sigma$$

$$b = (1, c^{-1}a)$$

$$c = (b, 1)$$

<p>$\Gamma 4.16$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • $f_h(x) = \left(\frac{x-1}{x+h}\right)^2$ • $h \neq -1, 1, 0$ und <ul style="list-style-type: none"> $p(h) = h^2 - h + 1 = 0$ • Nullstellen: <ul style="list-style-type: none"> - $h_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ - $h_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ • $\text{Char}(k) \neq 3$ 	$h_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ $x_0 \approx -0,50 + 0,87i$ $V_0 = a$ $V_1 = b$ $V_\lambda = c$ $V_\infty = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\mathcal{G}_{h_0} = \langle a, b, c \rangle, \text{ wobei}$ $a = (1, aba^{-1})\sigma$ $b = (1, c^{-1}b^{-1}a^{-1})$ $c = (a, 1)$ </div>
---	---	--

3.9 Weitere Untersuchung des Graphen $\Gamma 4.7$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Gruppen $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{1-\sqrt{2}}, \mathcal{G}_{1+\sqrt{2}}$, die aus Graph $\Gamma 4.7$ entstehen, und ihre Zusammenhänge studieren. Wir geben sie noch einmal an:

$\Gamma_{4.7}$	$\mathcal{G}_i = \langle a, b, c \rangle$, wobei $a = \sigma$ $b = (cab, bab)$ $c = (b, bacab)$
<ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{G}_{1+\sqrt{2}} = \langle a, b, c \rangle$, wobei $a = \sigma$ $b = (a, abc)$ $c = (b, abcba)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{G}_{1-\sqrt{2}} = \langle a, b, c \rangle$, wobei $a = \sigma$ $b = (bac, a)$ $c = (b, c)$

Bemerkung 3.29 Sei $h \in \{i, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ und betrachten wir $\mathcal{G}_h = \langle a, b, c \rangle$. Sei α, β, γ und δ die Verzweigung bei $0, 1, \lambda$ und ∞ . Nach Konstruktion gilt:

$$V_0 = a, V_1 = b, V_\lambda = c.$$

Aufgrund der Gestalt von Γ_{f_h} liegen die zwei Punkte $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(\infty)$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_{f_h}}$. Deswegen sind die Lifts von α^2 und δ^2 unter f_h mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0 = x_0$ bzw. \tilde{x}'_0 kontrahierbare geschlossene Kurve. Das impliziert $V_0^2 = V_\infty^2 = 1$. Da V_1 zu (V_∞, V_0) konjugiert ist, gilt $V_1^2 = 1$. Schliesslich, da V_λ zu (V_1, V_λ) konjugiert ist, folgt $V_\lambda^2 = 1$. Zusammenfassend haben wir

$$V_0^2 = V_1^2 = V_\lambda^2 = V_\infty^2 = 1.$$

Lemma 3.30 Seien h und \mathcal{G}_h wie in Bemerkung 3.29. Dann gibt es einen kommutativen Normalteiler $\mathcal{G}'_h \subset \mathcal{G}_h$, so dass $\mathcal{G}_h = \mathcal{G}'_h \rtimes \langle a \rangle$ gilt, d.h., \mathcal{G} das semidirekte Produkt von \mathcal{G}'_h und $\langle a \rangle$ ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung nur für den Fall $h = i$. Die anderen Fälle werden analog bewiesen. Wir betrachten die Elemente $e := ab$ und $f := ac$ in \mathcal{G}_i . Wegen Bemerkung 3.29 gilt

$$\begin{aligned} e f e^{-1} f^{-1} &= \sigma((cab)^{-1}, (bab)^{-1}) \sigma(b, bac(ba)^{-1}) (cab, bab) \sigma(b^{-1}, ba(bac)^{-1}) \sigma \\ &= (babcbabacab, bacbacabbabb) = (1, 1) = 1, \end{aligned}$$

d.h., kommutieren die Elemente e und f miteinander. Setzen wir $\mathcal{G}'_i := \langle e, f \rangle$, dann ist \mathcal{G}'_i eine kommutative Untergruppe von \mathcal{G}_i . Wieder wegen Bemerkung 3.29 gilt

$$\sigma e \sigma = aaba = ba = e^{-1} \quad \text{und} \quad \sigma f \sigma = aaca = ca = f^{-1}.$$

Die letzten zwei Gleichungen implizieren, dass \mathcal{G}'_i ein Normalteiler von \mathcal{G}_i ist.

Um $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}'_i \rtimes \langle a \rangle$ zu erhalten, bleibt noch $\mathcal{G}'_i \cap \langle a \rangle = \{1\}$ zu zeigen: Nehmen wir an, dass $a \in \mathcal{G}'_i$. Dann gilt

$$e = aea = e^{-1},$$

d.h., die Ordnung von e ist 2. Ebenso ist die Ordnung von f gleich 2, und insgesamt erhalten wir, dass \mathcal{G}_i eine endliche Gruppe ist. Die letzte Aussage steht aber im Widerspruch zur Aussage i) im nächsten Satz. \square

Folgender Satz gibt uns einen Zusammenhang zwischen den drei Gruppen $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{1-\sqrt{2}}$ und $\mathcal{G}_{1+\sqrt{2}}$.

Satz 3.31 Seien $h, h' \in \{i, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$.

i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Bild $(\mathcal{G}_h)_n$ von \mathcal{G}_h in $\text{Aut}(T_n^a)$ eine Gruppe der Ordnung 2^n .

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ operiert die Gruppe \mathcal{G}'_h transitiv auf T_n^a .

iii) Die Gruppen \mathcal{G}'_h und $\mathcal{G}'_{h'}$ sind konjugiert in $\text{Aut}(T^a)$.

Beweis i):

Sei $h = 1 - \sqrt{2}$. Die kommutative Gruppe $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ ist von $e = \sigma(e^{-1}f^{-1}\sigma, \sigma)$ und $f = \sigma(\sigma e, \sigma f)$ erzeugt. Wir versuchen, $(\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}})_n$ in Termen von Faktorgruppen zu beschreiben. Dazu betrachten wir den folgenden surjektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow (\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}})_n \\ (i, j) &\longmapsto e^i f^j |_{T_n}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Kern K_n der obigen Abbildung bestimmen: Für $n \geq 1$ impliziert $e^i f^j |_{T_n} = id$, dass $\sigma^i \sigma^j |_{T_n} = id$, d.h. $i \equiv j \pmod{2}$. Dann ist

$$e^i f^j |_{T_n} = (ef)^j (e^2)^k, \text{ wobei } k = \frac{(i-j)}{2}.$$

Da $ef = (e, e^{-1})$ und $e^2 = (fe, e^{-1}f^{-1})$ gilt, folgt, dass

$$e^i f^j |_{T_n} = (e^j (fe)^k |_{T_{n-1}}, e^{-j} (fe)^{-k} |_{T_{n-1}})$$

ist. Somit ist $e^j f^j |_{T_n} = id$ genau dann, wenn

$$i = j + 2k \quad \text{und} \quad e^{j+k} f^k |_{T_{n-1}} = id$$

gilt. Diese Äquivalenz erlaubt uns, K_n wie folgt zu schreiben:

$$\begin{aligned} K_n &= \{(i, j) \mid i = j + 2k, (j+k, k) \in K_{n-1}\} \\ &= \{(u+v, u-v) \mid (u, v) \in K_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Da $K_0 = \mathbb{Z}^2$ gilt, folgt

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n \mathbb{Z}^2.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt, dass

$$K_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \mathbb{Z}^2 & \text{falls } 2|n \\ 2^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 & \text{falls } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Somit bekommen wir

$$(\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}})_n \cong \mathbb{Z}^2 / K_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2^{\frac{n}{2}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^{\frac{n}{2}}\mathbb{Z} & \text{falls } 2|n \\ \mathbb{Z}/2^{\frac{n-1}{2}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^{\frac{n-1}{2}}\mathbb{Z} & \text{falls } 2 \nmid n, \end{cases}$$

und die Behauptung folgt. Die anderen Fälle beweist man analog.

ii):

Sei $h = 1 - \sqrt{2}$. Wir werden durch Induktion beweisen, dass $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ transitiv auf T_n^a für alle $n \in \mathbb{N}$ operiert. Sei $n = 1$. Dann ist $e|_{T_1^a} = \sigma = f|_{T_1^a}$, und die Behauptung gilt. Sei $n > 1$ und nehmen wir an, dass die Behauptung für $j < n$ gilt. Dann gilt

$$e^i f^j(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i + j \pmod{2}.$$

Man sieht nun aus der expliziten Darstellung von e und f , dass

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\langle e, f \rangle}(0) &= \langle e^2, ef \rangle \\ &= \langle (fe, (fe)^{-1}), (e, e^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Diese Gruppe operiert auf T_0^a durch $\langle fe, e \rangle = \langle e, f \rangle$, deswegen operiert sie nach Induktionsvoraussetzung transitiv auf $T_{0, n-1}^a \subset T_n$. Also operiert die Gruppe $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ transitiv auf $T_{1, n-1}^a \subset T_n^a$ und somit auf ganz T_n^a . Die anderen Fälle beweist man analog oder als Folge von Behauptung iii).

iii):

Wir werden zeigen, dass $\mathcal{G}'_i = \langle e, f \rangle$ und $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}} = \langle e', f' \rangle$ konjugiert sind. Um die Existenz eines Elementes $u \in \text{Aut}(T^a)$ mit der Eigenschaft

$$u\mathcal{G}'_i u^{-1} = \mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$$

zu zeigen, überlegen wir abstrakt. Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist isomorph zu $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ via

$$\begin{aligned} \phi_{1-\sqrt{2}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}} \\ (i, j) &\mapsto e^i f^j, \end{aligned}$$

und für jedes $t_n \in T_n^a$ gilt:

$$\mathcal{H}_n := \text{Stab}_{\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}}(t_n) \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n \mathbb{Z}^2.$$

Betrachten wir eine beliebige, aber feste Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Einträgen in T^a , so dass $t_n \in T_n^a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}/\mathcal{H}_n &\longrightarrow T_n^a \\ [h] &\longmapsto h(t_n) \end{aligned}$$

für jedes n eine Bijektion, weil $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ transitiv auf T_n^a operiert. Ausserdem sind die Kanten von T^a durch $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ darstellbar:

$$K = \{ (h(t_{n-1}), h(t_n)) \mid h \in \mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}, n \in \mathbb{N} \}.$$

Deswegen können wir T^a aus der Folge von Untergruppen

$$\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}} =: \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots$$

bis auf Konjugation mit $\text{Aut}(T^a)$ rekonstruieren. Die Operation von $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}$ bestimmt die Isomorphieklasse von $(\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}, (\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$.

Folge: Die Konjugationsklasse von $\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}} \subset \text{Aut}(T^a)$ hängt nur von der Isomorphieklasse von $(\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}, (\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ ab und umgekehrt.

Sei

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathcal{G}'_i \\ (i, j) &\mapsto e^i f^j, \end{aligned}$$

der Isomorphismus von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach \mathcal{G}'_i .

Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_0 &:= \mathcal{G}'_i, \\ \mathcal{H}'_n &:= \text{Stab}_{\mathcal{G}'_i}(t_n) \cong \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \mathbb{Z}^2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt, dass für jedes gerade $n = 2m$

$$\mathcal{H}_n \cong 2^m \mathbb{Z}^2 \cong \mathcal{H}'_n.$$

Offensichtlich ist

$$\mathcal{H}_1 \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathcal{H}'_1.$$

Also folgt für $n = 2m + 1$

$$\mathcal{H}_n \cong 2^m \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathcal{H}'_n.$$

Somit sind $(\mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}}, (\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ und $(\mathcal{G}'_i, (\mathcal{H}'_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ isomorph via $\phi_{1-\sqrt{2}}^{-1} \phi_i$.

Die Fälle $h = i$ und $h' = 1 + \sqrt{2}$ beweist man analog. \square

Aus Satz (3.31) wissen wir, dass es ein Element u in $\text{Aut}(T^a)$ gibt, mit

$$u \mathcal{G}'_{1-\sqrt{2}} u^{-1} = \mathcal{G}'_i.$$

Genauer gesagt haben wir:

$$ueu^{-1} = e' \tag{22}$$

$$ufu^{-1} = f', \tag{23}$$

wobei

$$e = (\sigma, e^{-1} f^{-1} \sigma) \sigma,$$

$$f = (\sigma f, \sigma e) \sigma,$$

$$e' = (\sigma e'^2, \sigma e' f') \sigma,$$

$$f' = (\sigma e'^2 f', \sigma e') \sigma.$$

Um u zu bestimmen, machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} u &:= u_0 = (u_1, v_1) \\ u_i &= (u_{i+1}, v_{i+1}) \quad \text{für } i \geq 1 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (22) bekommt man nach Einsetzen von $u_0 = (u_1, v_1)$ und Koeffizientenvergleich :

$$u_1 \sigma v_1^{-1} = \sigma e'^2 \tag{24}$$

$$v_1 e^{-1} f^{-1} \sigma u_1^{-1} = \sigma e' f'. \tag{25}$$

Wir lösen (24) nach v_1 auf:

$$v_1 = (\sigma e'^2)^{-1} u_1 \sigma = e'^{-2} \sigma u_1 \sigma. \tag{26}$$

Aus der Gleichung (23) bekommt man nach Einsetzen von $u_0 = (u_1, v_1)$ und Koeffizientenvergleich:

$$u_1 \sigma f v_1^{-1} = \sigma e'^2 f' \quad (27)$$

$$v_1 \sigma e f^{-1} \sigma u_1^{-1} = \sigma e'. \quad (28)$$

Nach Einsetzen von (26) in (27) und (28) erhält man folgende Gleichungen:

$$u_1 e u_1^{-1} = e'^{-1} \quad (29)$$

$$u_1 f u_1^{-1} = f'. \quad (30)$$

Analog finden wir nach Einsetzen von (u_2, v_2) in (29) und (30):

$$u_2 e u_2^{-1} = f'^{-1} \quad (31)$$

$$u_2 f u_2^{-1} = e' \quad (32)$$

$$v_2 = e'^{-2} \sigma u_2 \sigma f e = e'^{-1} f'^{-1} \sigma u_2 \sigma. \quad (33)$$

Führt man fort mit diesem Lösungsverfahren, dann findet man sukzessive:

$$u_3 e u_3^{-1} = f' \quad (34)$$

$$u_3 f u_3^{-1} = e' \quad (35)$$

$$v_3 = \sigma e' f' u_3 e^{-1} \sigma = e'^{-1} \sigma u_3 \sigma \quad (36)$$

und

$$u_4 e u_4^{-1} = e'^{-1} \quad (37)$$

$$u_4 f u_4^{-1} = f'^{-1} \quad (38)$$

$$v_4 = \sigma e' u_4 \sigma f e = e'^{-2} f'^{-1} \sigma u_4 \sigma. \quad (39)$$

Wir bemerken nun, dass

$$e'^{-1} = \sigma e' \sigma \quad (40)$$

$$f'^{-1} = \sigma f' \sigma. \quad (41)$$

Somit erfüllt σu_4

$$\sigma u_4 e (\sigma u_4)^{-1} = e' \quad (42)$$

$$\sigma u_4 f (\sigma u_4)^{-1} = f' \quad (43)$$

d.h. genau die Gleichungen, die u erfüllt. Setzen wir $\sigma u_4 = u$, dann ergibt dies eine rekursive Beschreibung von u .

Es stellt sich nun die Frage, ob sogar die Gruppen \mathcal{G}_i und $\mathcal{G}_{1-\sqrt{2}}$ unter u konjugiert sind, oder in anderen Worten, ob $u\sigma u^{-1}\sigma \in \mathcal{G}_i$ gilt. Bevor wir eine Antwort auf diese Frage geben, formulieren wir ein Lemma, das uns erlaubt, für jedes ungerade $m \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathcal{G}_i$ dem Ausdruck $x^{1/m}$ einen Sinn zu geben.

Lemma 3.32 *Sei G_n ein inverses System von endlichen 2-Gruppen, so dass $G = \varprojlim G_n$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{Aut}(T^a)$ ist. Sei m eine ungerade natürliche Zahl, dann ist die Abbildung $G \rightarrow G, x \mapsto x^m$ bijektiv.*

Beweisskizze: Da jedes Element in G_n gerade Ordnung besitzt, folgt, dass für alle $y, y' \in G_n$ das Element $(yy')^m$ verschieden von 1 ist. Deswegen ist die Abbildung $c_n : G_n \rightarrow G_n, x \mapsto x^m$ injektiv und also auch bijektiv, weil G_n eine endliche Gruppe ist. Aus der Bijektivität von c_n folgt, dass die induzierte Abbildung $G \rightarrow G, x \mapsto x^m$ eine Bijektion ist. \square

Folge: Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ mit $\text{ord}_2(r) \geq 0$ ist die Abbildung $G \rightarrow G, x \mapsto x^r$ wohldefiniert.

Im folgenden sei G_h der proendliche Abschluss von \mathcal{G}_h .

Satz 3.33 *Die Gruppen G_i und $G_{1-\sqrt{2}}$ sind unter u konjugiert.*

Beweis: Wir zeigen, dass für geeignete $i, j \in \mathbb{Q}$ mit $\text{ord}_2(i)$ und $\text{ord}_2(j)$ grösser als 0 gilt:

$$u\sigma u^{-1}\sigma = (e')^i (f')^j. \quad (44)$$

Zunächst machen wir eine Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} (e')^i (f')^j &= (e'^2)^{\frac{i-i}{2}} (e' f')^j \\ &= (e'^{-1} f', f'^{-1} e')^{\frac{i-i}{2}} (e'^{-1}, e')^j \\ &= ((e')^{\frac{-i-j}{2}} (f')^{\frac{i-j}{2}}, (e')^{\frac{i+j}{2}} (f')^{\frac{j-i}{2}}). \end{aligned} \quad (45)$$

Um die Notation zu vereinfachen sei $\underline{a} := (a, a^{-1})$ für alle $a \in \text{Aut}(T^a)$. Dann kann man (45) so umschreiben:

$$(e')^i (f')^j = \underline{(e')^{\frac{-i-j}{2}} (f')^{\frac{i-j}{2}}}. \quad (46)$$

Nehmen wir als Ansatz

$$\begin{cases} i = 2i' & \text{mit } i' = 1 + 2i'' \\ j = 2j' & \text{mit } j' = 1 + 2j'', \end{cases}$$

dann erhalten wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
(44) \quad &\Leftrightarrow \underline{u_1 \sigma u_1^{-1} \sigma e'^2} = \underline{(e')^{\frac{-i-j}{2}} (f')^{\frac{i-j}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \underline{\sigma u_1 \sigma u_1^{-1}} = \underline{(e')^{\frac{i+j}{2}+2} (f')^{\frac{j-i}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \underline{e'^{-2} \sigma u_2 \sigma f e u_2^{-1}} = \underline{(f')^{i'+1} (e')^{-j'-1}} \\
&\Leftrightarrow \underline{\sigma u_2 \sigma u_2^{-1}} = \underline{(e')^{-j'} (f')^{i'+2}} \\
&\Leftrightarrow \underline{e'^{-1} \sigma u_3 \sigma u_3^{-1}} = \underline{(e')^{\frac{j'-i'-2}{2}} (f')^{\frac{-j'-i'-2}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \underline{\sigma u_3 \sigma u_3^{-1}} = \underline{(e')^{\frac{j'-i'}{2}} (f')^{\frac{-j'-i'-2}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \underline{e'^{-2} f'^{-1} \sigma u_4 \sigma u_4^{-1}} = \underline{(e')^{i''+1} (f')^{j''+1}} \\
&\Leftrightarrow \underline{\sigma u_4 \sigma u_4^{-1}} = \underline{\sigma u \sigma u^{-1}} = \underline{(e')^{i''+3} (f')^{j''+2}}.
\end{aligned}$$

Dies sagt uns, dass (44) genau dann gilt, wenn

$$\begin{cases} 2(1+2i'') = i = i'' + 3 \\ 2(1+2j'') = j = j'' + 2, \end{cases}$$

das heisst genau dann, wenn

$$\begin{cases} i = 10/3 \\ j = 2. \end{cases}$$

□

Bemerkung 3.34 Auf anderem Weg kann man zeigen, dass auch die Gruppen G_i und $G_{1+\sqrt{2}}$ konjugiert sind.

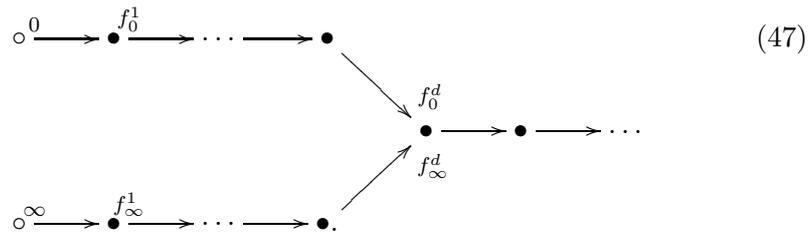
3.10 Unendliche Verzweigungsgraphen

Wir wollen uns jetzt mit unendlichen Verzweigungsgraphen beschäftigen. In diesem Abschnitt benützen wir folgende Notation:

- $f_\infty^n := f^n(\infty)$.
- $f_0^n := f^n(0)$

Unserer Ausgangspunkt ist der folgende Satz:

Satz 3.35 Sei $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein quadratischer Morphismus mit unendlichem Verzweigungsgraph verschieden von



Sei \mathcal{G} das Bild von π_1 unter l (vgl. Abschnitt 3.6). Dann ist \mathcal{G} dicht im $\text{Aut}(T^a)$.

Beweis: Siehe Prof. R.Pink

Aus diesem Satz ergibt sich auf natürliche Weise die Frage: Wie sieht \mathcal{G} für einen Morphismus mit Verzweigungsgraph (47) aus? Wir versuchen, diese Frage zu beantworten: Sei $d = 1$. Falls

$$f(x) = \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^2$$

den Verzweigungsgraph (47) besitzt, dann gilt o.B.d.A

$$f(0) = f(\infty) = 1$$

und somit $a = c$ und $b = -d$.

Proposition 3.36 Die Bedingung $0 < a < 1$ ist hinreichend dafür, dass der quadratische Morphismus

$$f(x) = \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^2$$

den unendlichem Verzweigungsgraph (47) mit $d = 1$ besitzt.

Beweis: Betrachten wir die Abbildung

$$g(\rho) = ((1 + \rho + a)/(1 + \rho - a))^2.$$

Ihre Ableitung ist

$$g'(\rho) = 2(-2a)(1 + \rho + a)/(1 + \rho - a)^3 < 0 \quad \text{für } \rho > 0.$$

Deswegen ist g monoton fallend, insbesondere auch injektiv, für $\rho > 0$. Definiere

$$\rho_0 = 0 \quad \text{und} \quad 1 + \rho_n = f(1 + \rho_{n-1}) = g(\rho_{n-1}).$$

Da nach Voraussetzung $0 < a < 1$ gilt, ist $\rho_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus

$$1 < g(\rho_1) < g(\rho_0),$$

folgt, dass

$$\rho_0 < \rho_2 < \rho_1.$$

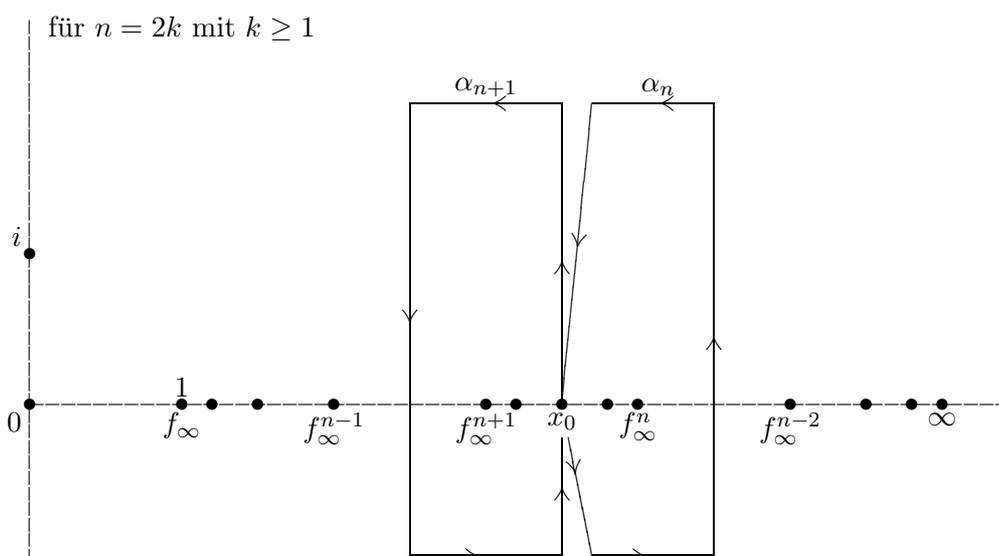
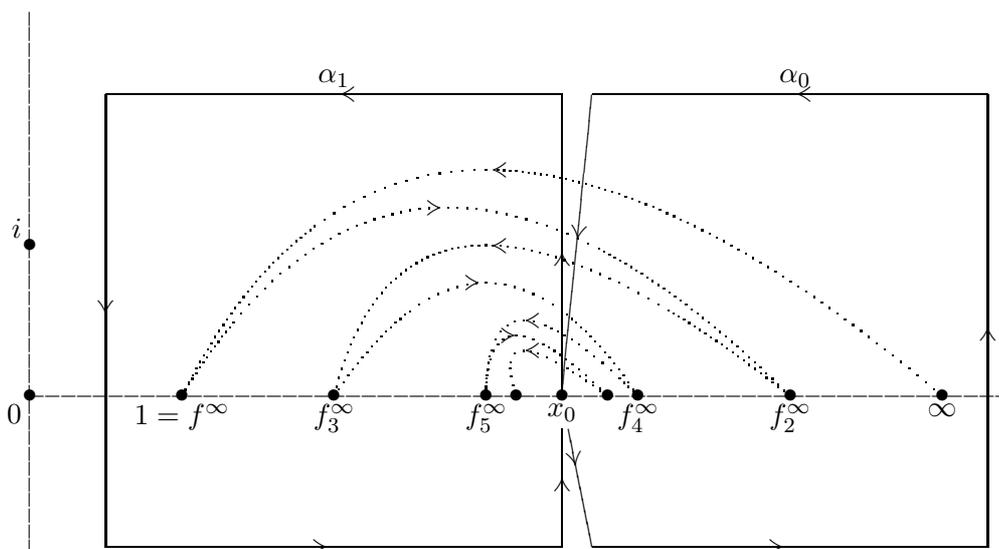
Die Monotonie von g impliziert, dass

$$g(\rho_1) < g(\rho_2) < g(\rho_0),$$

und allgemein dass $g(\rho_n)$ immer zwischen $g(\rho_{n-2})$ und $g(\rho_{n-1})$ liegt. Das bedeutet, dass f den Verzweigungsgraph (47) besitzt und f_0^n zwischen f_0^{n-2}

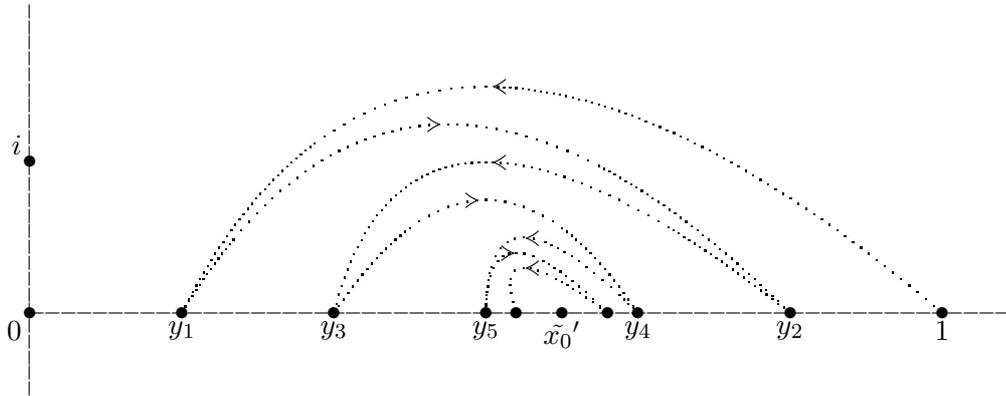
und f_0^{n-1} für $n \geq 3$ liegt. □

Für ein solches f berechnen wir \mathcal{G}_f . Da ρ_{2n+1} eine aufsteigende beschränkte Folge ist, konvergiert sie gegen eine reelle Zahl ρ . Das impliziert, dass f einen Fixpunkt $x_0 = 1 + \rho$ besitzt. Ein Erzeugendensystem $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \dots\}$ der Gruppe $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus V_{\Gamma_f}, x_0)$ wird in den folgenden Bildern dargestellt.



Seien \tilde{x}'_0 und $\tilde{x}_0 := x_0$ die Urbilder von x_0 unter f . Seien y_n und $y'_n := f_\infty^{n-1}$ die Urbilder von f_∞^n unter f . Dann erfüllen die y_n folgende

Anordnung:



Nun können wir mit Hilfe der Bemerkung (3.27) die Lifts $\tilde{\alpha}_n$ und $\tilde{\alpha}'_n$ zeichnen und somit die Gruppe \mathcal{G}_f ausrechnen:

$$\mathcal{G}_f = \langle a_0, a_1, a_3, \dots \rangle, \text{ wobei}$$

- $a_n = (a_{n-1}, 1)$ für alle $n \geq 2$
- $a_1 = (a_0, a_1^{-1} a_0^{-1})$
- $a_0 = (a_0^{-1}, a_0 a_1) \sigma$.

Sei $d=2$. Nach Konjugation mit einem Element von $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ kann man annehmen, dass $f_\infty^1 = 1$ ist, somit besitzt f folgende Gestalt:

$$f(x) = \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^2.$$

Damit f den Verzweigungsgraph (47) hat, muss gelten:

$$f^2(0) - f^2(\infty) = 0.$$

Schreibt man die obige Bedingung explizit aus, bekommt man

$$g_1 g_2 = 0,$$

wobei

$$g_1 := [(a^2 + ab^2)(1+b) - (1+a)(a^2 + b^3)]$$

und

$$g_2 := [(a^2 + ab^2)(1+b) + (1+a)(a^2 + b^3)].$$

Die Nullstellen von g_1 sind von der Form $(b, a) = (\mp t, t)$ mit $t \in \mathbb{C}$. Diese Nullstellen ergeben quadratische Morphismen mit Verzweigungsgraph (47) mit $d = 1$. Deswegen schliessen wir sie aus unsere Betrachtung aus.

Proposition 3.37 Sei (b, a) eine reelle Nullstelle von g_2 mit

$$-1 < b < 0 < a.$$

Dann besitzt der quadratische Morphismus

$$f(x) = \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^2$$

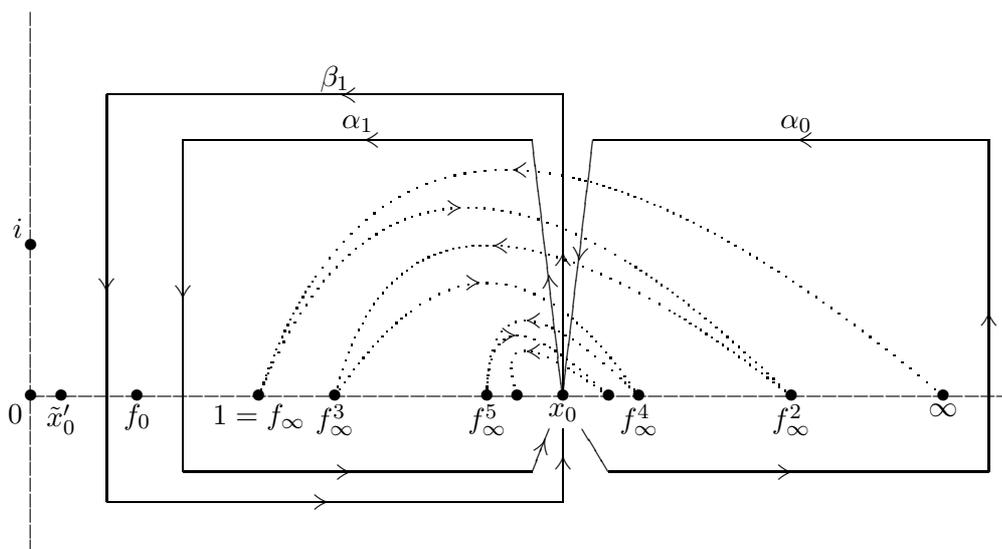
den Verzweigungsgraph (47) mit $d = 2$.

Beweis: Der Beweis läuft genauso wie bei der Proposition 3.36, nur die Hilfsfunktion ändert sich:

$$g(\rho) = \left(\frac{1 + \rho + a}{1 + \rho + b} \right).$$

Bemerkung 3.38 Die Bedingung an (a, b) garantiert, dass die Ableitung von g negative Werte für $\rho > 0$ annimmt und $g(\rho) \geq 1$ ist für $\rho \geq 0$.

Beispiel 3.39 Es gibt eine Nullstelle (a, b) in der Nähe des Punktes $(0.4, -0.5)$, die die Bedingung der Proposition 3.37 erfüllt. Für diesen Fall berechnen wir die Gruppe \mathcal{G}_f . Das gleiche Argument wie im Fall $d = 1$ zeigt, dass f einen Fixpunkt x_0 hat. Ein Erzeugendensystem $\{\beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots\}$ der Gruppe $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C} \setminus V_{\Gamma_f}, x_0))$ wird in den folgenden Bildern dargestellt.



falls eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit

$$\begin{cases} \alpha(t, 0) = \alpha_0(t) & : t \in [0, 1] \\ \alpha(t, 1) = \alpha_1(t) & : t \in [0, 1] \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \alpha(0, s) = y_0 & : s \in [0, 1] \\ \alpha(1, s) = y_1 & : s \in [0, 1] \end{cases} .$$

Bemerkung 4.3 Die Homotopie-Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 4.4 Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege, so dass der Endpunkt von α der Anfangspunkt von β ist. Dann definieren wir Wege $\beta\alpha, \alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ wie folgt:

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & : 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & : 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t) \quad : \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Satz 4.5 Sei $\pi_1(X, z_0)$ die Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen in X mit Anfangspunkt z_0 . Für $[\alpha], [\beta] \in \pi_1$ definieren wir $[\beta]\#[\alpha] = [\beta\alpha]$. Dann ist $(\pi_1, \#)$ eine Gruppe.

Beweis: siehe Theorem (2.1) in [1].

Bemerkung 4.6

- Das Einselement in $\pi_1(X, z_0)$ ist die Homotopieklasse der konstanten Kurve, die jedes $t \in [0, 1]$ nach z_0 abbildet.
- Das inverse Element zu $[\alpha] \in \pi_1(X, z_0)$ ist $[\alpha^{-1}]$.
- für $[\alpha], [\beta] \in \pi_1$ benutzen wir folgende Abkürzung: $[\alpha][\beta] := [\alpha]\#[\beta]$.
- Die Gruppe $\pi_1(X, z_0)$ heisst *die Fundamentalgruppe von X bezüglich z_0* .

4.2 Überlagerungen

Wir listen in diesem Abschnitt die wichtigen Definitionen und Sätze, die wir brauchen, auf.

Definition 4.7 Sei X ein topologischer Raum. Eine (*unverzweigte*) *Überlagerung von X* besteht aus einem topologischen Raum \tilde{X} und einer stetigen Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$, so dass es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist die Vereinigung von offenen, paarweise disjunkten Mengen $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$ für $j \in J$, wobei J eine nicht-leere Indexmenge ist.
- (b) Für alle $j \in J$ ist die eingeschränkte Abbildung $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus.

Definition 4.8 Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $w : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in X . Ein Weg $\tilde{w} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ heisst ein *Lift* von w , wenn $p \circ \tilde{w} = w$ ist.

Satz 4.9 (*Hauptlemma der Überlagerungstheorie*). Zu jedem Weg $w : [0, 1] \rightarrow X$ und zu jedem Punkt \tilde{x} über dem Anfangspunkt $w(0)$ von w gibt es genau einen Lift \tilde{w} von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$. Diesen Lift bezeichnen wir mit $L_p(w, \tilde{x})$: Lift von w bezüglich p mit Anfangspunkt \tilde{x} . Ferner gilt: Homotope Wege liften sich in homotope Wege, d.h. ist $v \simeq w$ in X und ist \tilde{x} ein Punkt über $v(0) = w(0)$, so ist $L_p(v, \tilde{x}) \simeq L_p(w, \tilde{x})$ in \tilde{X} ; Insbesondere haben die Lifts $L_p(v, \tilde{x})$ und $L_p(w, \tilde{x})$ denselben Endpunkt.

Beweis: siehe Satz 6.2.2 in [3].

Definition 4.10 Eine Deckbewegung einer Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, so dass $p \circ \tilde{f} = p$. Die sämtlichen Deckbewegungen bilden bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die *Deckbewegungsgruppe* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ der Überlagerung.

Definition 4.11 Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Wir sagen, dass zwei Punkte \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 in \tilde{X} *konjugiert* sind, wenn $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Entsprechend sagen wir, dass zwei Wege \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 konjugiert sind, wenn sie Lifts desselben Weges sind.

Definition 4.12 Eine *Galoissche Überlagerung* ist eine Überlagerung

$$p : \tilde{X} \rightarrow X,$$

so dass jedes Konjugierte eines geschlossenen Weges in \tilde{X} wieder geschlossen ist.

Satz 4.13 Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Galoissche Überlagerung. Seien \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 zwei beliebige konjugierte Punkte in \tilde{X} . Dann existiert genau eine Deckbewegung \tilde{f} , so dass $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Wir bezeichnen sie mit $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Sei

$$\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots\}$$

die Menge aller Punkte, die zu \tilde{x}_1 konjugiert sind. Dann ist

$$\mathcal{D} = \{\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1), \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3), \dots\}.$$

Beweis: siehe Theorem 11.1 in [4].

Satz 4.14 Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Galoissche Überlagerung. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und setzen wir $x := p(\tilde{x})$. Dann gilt

- (1) $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ ist eine normale Untergruppe von $\pi_1(X, x)$;
- (2) $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \cong \mathcal{D}$.

Beweis: siehe Theorem 11.2 in [4].

Bemerkung 4.15 Im Beweis von 4.14 zeigt man, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) &\rightarrow \mathcal{D} \\ [w] &\mapsto \tilde{f}(\tilde{x}, L_p(w, \tilde{x})(1)) \end{aligned}$$

folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) $\psi_{\tilde{x}}$ ist ein Homomorphismus.
- (ii) $\psi_{\tilde{x}}$ ist surjektiv.
- (iii) Der Kern von $\psi_{\tilde{x}}$ ist $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Aus dem Beweis folgt insbesondere, dass jedes Element $\tilde{x}_* \in p^{-1}(x)$ einen surjektiven Homomorphismus $\psi_{\tilde{x}_*}$ von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_*)$ nach \mathcal{D} induziert.

Literatur

- [1] Marvin J. Greenberg, John R. Harper: *Algebraic Topology, a first course*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [2] William S. Massey: *Algebraic Topology, an introduction*, Harcourt, Brace & World, 1981.
- [3] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner Stuttgart, 1988.
- [4] Michio Kuga: *Galois' Dream: Group Theory and Differential Equations*, Birkhäuser, 1993.
- [5] A. M. Brunner, Said Sidki: On the Automorphism Group of the One-Rooted Binary Tree, *Journal of Algebra* **195** (1997) S. 465-486.
- [6] Luis Ribes, Pavel Zalesskii: *Profinite Groups*, Springer, 2000.