Eine explizite Konstruktion der algebraischen Gruppe vom Typ G_2

Egon Rütsche

30. 7. 03

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wie in der Theorie der Lie-Algebren gibt es bei den algebraischen Gruppen vier Familien, nämlich $\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{D}_l$. Diese können einfach realisiert werden. Darüber hinaus gibt es noch die vier exzeptionellen Typen $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ und G_2. Für diese ist es schwieriger, explizite Beispiele zu konstruieren

In dieser Semesterarbeit soll explizit eine algebraische Gruppe vom Typ G_2 konstruiert werden. Es wird immer über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0 gearbeitet. Sei $V := \mathrm{Sym}^6(k^2)$. Dies ist eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{SL}_2(k)$ der Dimension 7. Definiere

$$W := \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2)).$$

Die Dimension von W ist 35, und $\mathrm{SL}_2(k)$ operiert auf W. Mit Hilfe von Gewichten lässt sich dieser Vektorraum zerlegen in eine direkte Summe von irreduziblen $\mathrm{SL}_2(k)$-Moduln. Aus der Zerlegung folgt, dass es in W einen unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invarianten Vektor w gibt. Definiere die Gruppe

$$G := \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w).$$

Diese Gruppe wird in der Semesterarbeit untersucht. Das Ziel ist, folgenden Satz zu beweisen.

Satz. *Die Gruppe G ist eine einfache, zusammenhängende algebraische Gruppe vom Typ* G_2.

Die Konstruktion scheint recht speziell. Es wird sich aber am Schluss herausstellen, dass der $\mathrm{SL}_7(k)$-Stabilisator für jedes hinreichend generische Element aus W eine einfache, zusammenhängende algebraische Gruppe vom Typ G_2 liefert.

2 Grundbegriffe aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen

Sei G eine Varietät, die eine Gruppenstruktur besitzt.

Definition. Die Gruppe G heisst *algebraische Gruppe*, wenn die beiden Abbildungen

$$\mu : G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy \text{ und } \iota : G \to G, x \mapsto x^{-1}$$

Morphismen von Varietäten sind.

Satz 2.1. *Sei G eine algebraische Gruppe. Dann gibt es genau eine irreduzible Komponente, die das Einselement e enthält. Sie ist eine normale Untergruppe von endlichem Index in G.*

Beweis. Siehe [4, 7.3] □

Definition. Die irreduzible Komponente, welche e enthält, wird mit G^o bezeichnet und heisst Einskomponente.

Bemerkung. In dieser Semesterarbeit werden nur algebraische Gruppen betrachtet, deren zugrundeliegende Varietät affin ist. Deshalb wird die Bezeichnung *affin* oft weggelassen.

Beispiele.

1. Die *additive Gruppe* $\mathbb{G}_a$ ist der affine Raum $\mathbb{A}^1$ mit den Abbildungen $\mu(x, y) = x + y$ und $\iota(x) = -x$.

2. Die *multiplikative Gruppe* $\mathbb{G}_m$ ist die affine offene Teilmenge $k^* \subset \mathbb{A}^1$ mit den Abbildungen $\mu(x, y) = xy$ und $\iota(x) = x^{-1}$.

3. Bezeichne mit $\mathrm{GL}_n(k)$ die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen über dem Körper k. Die Bedingung $\det(M) \neq 0$ definiert eine bezüglich der Zariski-Topologie offene Teilmenge in $\mathbb{A}^{n^2}$, und somit ist $\mathrm{GL}_n(k)$ eine affine Varietät. Die Formeln für die Multiplikation und Inversenbildung von Matrizen zeigen, dass die Gruppe algebraisch ist.

4. Die Gruppe $\mathrm{D}_n(k)$ der diagonalen $n \times n$ Matrizen ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ und somit algebraisch. Sie kann als direktes Produkt von n Kopien von $\mathbb{G}_m$ aufgefasst werden.

5. Es gibt vier wichtige Familien von algebraischen Gruppen.

(a) A_l: Die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}_{l+1}(k)$ besteht aus den Matrizen mit Determinante 1. Weil die Bedingung $\det(M) = 1$, für $M \in \mathrm{GL}_{l+1}$ algebraischer Natur ist, ist $\mathrm{SL}_{l+1}(k)$ eine algebraische Gruppe.

(b) B_l: Die *spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}_{2l+1}(k) := \mathrm{O}_{2l+1}(k) \cap \mathrm{SL}_{2l+1}(k)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von GL_{2l+1} und somit algebraisch.

(c) C_l: Die *symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}_{2l}(k)$ besteht aus allen $x \in \mathrm{GL}_{2l}(k)$ mit:

$$x^t \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{J} \\ -\mathrm{J} & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{J} \\ -\mathrm{J} & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mathrm{J} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Auch dies ist natürlich eine algebraische Bedingung und macht $\mathrm{Sp}_{2l}(k)$ zu einer algebraischen Gruppe.

(d) D_l: Dies ist die *spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}_{2l}(k)$. Der Unterschied zu B_l besteht darin, dass im Falle von D_l gerade Zahlen auftreten.

Der Parameter l entspricht jeweils der Dimension der Untergruppe der diagonalen Matrizen in den entsprechenden Gruppen. Dabei muss man beachten, dass die Familien vom Typ B_l und D_l mit der symmetrischen Bilinearform, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ gegeben ist, realisiert werden.

Die vier Familien von algebraischen Gruppen haben dieselben Bezeichnungen wie die Familien von irreduziblen Wurzelsystemen in der Theorie der Lie-Algebren. Die beiden Theorien sind eng miteinander verknüpft. Zu einer algebraischen Gruppe gehört eine Lie-Algebra.

Sei also G eine algebraische Gruppe. Definiere $A := k[G]$. Die Gruppe G operiert auf A via Links- bzw. Rechtstranslation. Für $x \in G$ sind diese definiert durch

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y) \text{ bzw. } (\rho_x f)(y) = f(yx), \text{ für } y \in G \text{ und } f \in A.$$

Bezeichne mit $\mathrm{Der}\, A$ die Menge aller Derivationen von A. Für zwei Derivationen δ und ε ist auch $[\delta, \varepsilon] := \delta\epsilon - \epsilon\delta$ eine Derivation. Mit dieser Klammer wird $\mathrm{Der}\, A$ zu einer Lie-Algebra.

Definition. Die Menge $\mathcal{L}(G) := \{\delta \in \mathrm{Der}\, A \mid \delta\lambda_x = \lambda_x\delta, \text{ für alle } x \in G\}$ heisst *Lie-Algebra von G*.

Bemerkung. Weil die Klammer von zwei Derivationen, die mit allen λ_x kommutieren, auch wieder mit λ_x kommutiert, ist $\mathcal{L}(G)$ eine Lie-Algebra.

Wie bei jeder Varietät kann auch bei einer algebraischen Gruppe von Tangentialräumen gesprochen werden. Da eine algebraische Gruppe G reguläre Punkte enthält und transitiv auf sich selbst operiert, ist jeder Punkt regulär. Insbesondere ist das Einheitselement e von G ein regulärer Punkt. Der Tangentialraum von G im Punkt e wird mit $\mathcal{T}(G)_e$ bezeichnet. Er hat dieselbe Dimension wie die Gruppe selbst.

Theorem 2.2. *Sei G eine algebraische Gruppe. Dann sind $\mathcal{L}(G)$ und $\mathcal{T}(G)_e$ isomorphe Vektorräume.*

Beweis. Siehe [4, 9.1] □

Affine algebraische Gruppen heissen auch *lineare algebraische Gruppen*. Diese Bezeichnung ist eine Konsequenz des folgenden wichtigen Resultats.

Theorem 2.3. *Sei G eine (affine) algebraische Gruppe. Dann ist G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Siehe [4, 8.6] □

Notation und Konvention. Mit k wird immer ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 bezeichnet. Mit den gotischen Buchstaben werden die Lie-Algebren der entsprechenden Gruppen bezeichnet. Beispielsweise bezeichnet $\mathfrak{sl}_2(k)$ die Lie-Algebra von $\mathrm{SL}_n(k)$. Mit einer algebraischen Gruppe ist immer eine lineare algebraische Gruppe gemeint.

3 Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(k)$

In diesem Abschnitt werden die endlich dimensionalen irreduziblen Moduln für $\mathfrak{sl}_2(k)$ beschrieben. Dies wird im nächsten Abschnitt wichtig sein, um eine spezielle Darstellung zerlegen zu können. Als Basis für $\mathfrak{sl}_2(k)$ wählt man

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für diese Basis gilt

$$[h, x] = 2x, [h, y] = -2y, [x, y] = h$$

Sei nun V ein endlich dimensionaler irreduzibler Modul für $\mathfrak{sl}_2(k)$. Da eine endlich dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra mit der Jordanzerlegung verträglich ist, operiert h diagonalisierbar auf V. Also kann V zerlegt werden in eine direkte Summe von Unterräumen der Form

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\},\ \text{für } \lambda \in k.$$

Definition. Wenn $V_\lambda \neq 0$ ist, dann heisst λ ein *Gewicht von h in V* und V_λ der zugehörige *Gewichtsraum*.

Als nächstes muss die Operation von x und y auf den Gewichtsräumen untersucht werden.

Lemma 3.1. *Sei $v \in V_\lambda$. Dann gilt $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ und $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

Beweis. $h \cdot (x \cdot v) = x \cdot (h \cdot v) + [h, x] \cdot v = x \cdot (\lambda \cdot v) + 2x \cdot v = (\lambda + 2)x \cdot v$;
$h \cdot (y \cdot v) = y \cdot (h \cdot v) + [h, y] \cdot v = y \cdot (\lambda \cdot v) - 2y \cdot v = (\lambda - 2)y \cdot v$ □

Sei n ein maximales Gewicht, d.h., es gilt $V_n \neq 0$ und $V_{n+2} = 0$. A priori ist n ein beliebiges Element aus k. Es wird sich aber zeigen, dass n eine natürliche Zahl ist. Sei nun v ein beliebiges von Null verschiedenes Element aus V_n. Da V endlich dimensional ist, gilt $y^k \cdot v = 0$, für $k \in \mathbb{N}$ gross genug. Definiere

$$m := min\{k \in \mathbb{N} \mid y^k \cdot v = 0\}$$

Lemma 3.2. *Die Vektoren $\{v, y \cdot v, y^2 \cdot v, \dots, y^{m-1} \cdot v\}$ spannen V auf.*

Beweis. Da V irreduzibel ist, genügt es zu zeigen, dass der von diesen Vektoren aufgespannte Unterraum $W \subseteq V$ invariant ist unter $\mathfrak{sl}_2(k)$. Es ist klar, dass W invariant ist unter y. Nach Lemma 2.1 gilt $y^m \cdot v \in V_{n-2m}$ und somit $h \cdot (y^m \cdot v) = (n-2m)y^m \cdot v$. Folglich lässt auch h den Unterraum W invariant. Weil $V_{n+2} = 0$ ist, gilt $x \cdot v = 0$. Berechne

$$x \cdot (y \cdot v) = [x, y] \cdot v + y \cdot (x \cdot v) = h \cdot v + y \cdot 0 = n \cdot v.$$

Analog berechnet man

$$x \cdot (y^2 \cdot v) = (n-2)y \cdot v + ny \cdot v$$

und

$$x \cdot (y^k \cdot v) = k(n-k+1)y^{k-1} \cdot v.$$

$\square$

Aus dem Lemma folgt, dass die in der Zerlegung auftretenden λ die Form $\mu, \mu+2, \dots, \mu+2l$ für ein $\mu \in k$ und ein $l \in \mathbb{N}$ haben und dass $n = \mu + 2l$ ist. Ausserdem folgt, dass alle auftretenden Gewichtsräume eindimensional sind. Zudem gilt

$$x \cdot (y^m \cdot v) = m(n-m+1)y^{m-1} \cdot v = 0.$$

Nach Definition von m ist $y^{m-1} \cdot v \neq 0$, woraus $n - m + 1 = 0$ folgt. Alles in allem folgt der

Satz 3.3. *Sei V ein irreduzibler Modul für $\mathfrak{sl}_2(k)$ der Dimension $n+1$. Dann ist V die direkte Summe von Gewichtsräumen V_λ für die Gewichte $\lambda = n, n-2, \dots, -(n-2), -n$, und es gilt $dim V_\lambda = 1$ für alle auftretenden λ.*

Bezeichne mit $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Standardbasis von k^2. Dann gilt $h \cdot x = x, h \cdot y = -y$, d.h. x hat Gewicht 1 und y hat Gewicht -1.

Zum Schluss dieses Abschnittes sollen die irreduziblen Moduln explizit beschrieben werden. Dazu bezeichne $\mathrm{Sym}^n(k^2)$ die n-te symmetrische Potenz der Standarddarstellung. Dieser Modul hat Dimension $n+1$. Der Einfachheit halber bezeichnet man das Bild von $\underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{m} \otimes \underbrace{y \otimes \ldots \otimes y}_{n-m}$ in $\mathrm{Sym}^n(k^2)$ mit $x^m y^{n-m}$.

Wähle als Basis $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n\}$. Nach der Leibnizregel gilt für die induzierte Operation

$$h \cdot x^{n-k}y^k = (n-k)(x^{n-k-1}y^k)h \cdot x + k(x^{n-k}y^{k-1})h \cdot y = (n-2k)x^{n-k}y^k$$

Also sind die Gewichte von h auf $\mathrm{Sym}^n(k^2)$ genau $n, n-2, \dots, -n$. Da dies nach Satz 3.3 bereits alle Gewichte sind, muss die Darstellung irreduzibel sein. Also ist $V(n) := \mathrm{Sym}^n(k^2)$ der irreduzible Modul der Dimension $n+1$.

Eine allgemeine Darstellung von $\mathrm{SL}_2(k)$ bzw. $\mathfrak{sl}_2(k)$ lässt sich zerlegen in irreduzible Darstellungen. Um diese Zerlegung explizit zu bestimmen, müssen alle Gewichte und deren Vielfachheiten berechnet werden. Aus diesen Daten kann man dann die irreduziblen Komponenten bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass das Gewicht eines Vektors der Form $v \otimes w$ gleich der Summe der Gewichte der Vektoren v und w ist.

Beispiel. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(k)$ operiert auf $V := \mathrm{Sym}^6(k^2)$ durch die induzierte Operation. Man erhält dann auch eine Operation auf

$$W := \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2)).$$

Dieser Raum hat die Dimension 35 und soll in irreduzible Komponenten zerlegt werden. Man muss also die Gewichte von einer Basis bestimmen und dann geeignete irreduzible Darstellungen finden. Aus Symmetriegründen genügt es dabei, die nicht negativen Gewichte und deren Vielfachheiten zu bestimmen. Im Fall von W kommen die folgenden Gewichte und Vielfachheiten vor:

Gewicht	Vielfachheit
12	1
10	1
8	2
6	3
4	4
2	4
0	5

Dies führt zur Zerlegung

$$W = V(12) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus V(4) \oplus V(0).$$

4 Definition der Gruppe

In diesem Abschnitt wird die Gruppe definiert, von der später gezeigt wird, dass sie vom Typ G_2 ist. Die Räume V und W seien wie im vorangehenden Abschnitt definiert. Aus der Zerlegung

$$W = V(12) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus V(4) \oplus V(0)$$

wird ersichtlich, dass die eindimensionale Darstellung mit Vielfachheit 1 auftritt. Dies gibt einen invarianten Unterraum der Dimension 1 für die Operation von $\mathrm{SL}_2(k)$ auf W. Sei $V(0)$ vom Vektor w aufgespannt.Da $V(0)$ die einzige irreduzible eindimensionale Darstellung ist, muss sie die triviale Darstellung sein. Es gilt somit $g \cdot w = w$ für alle $g \in \mathrm{SL}_2(k)$. Man erhält also den folgenden

Satz 4.1. *Sei $W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$. Dann gibt es ein von Null verschiedenes und unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invariantes $w \in W$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus den vorangehenden Ausführungen dieses Abschnitts. □

Bemerkung. Aus der obigen Zerlegung ist nicht ersichtlich, wie der Vektor w genau aussieht. Für die Konstruktion und die weiteren Berechnungen ist dies auch nicht von Bedeutung. Natürlich kann der Vektor explizit angegeben werden. Der Vektor w muss eine Linearkombination der Basisvektoren vom Gewicht 0 sein. Von diesen gibt es genau fünf in der Standardbasis von W. Die Bestimmung von w führt also auf ein lineares Gleichungssystem mit fünf Unbekannten. Man braucht die explizite Form von w für die Konstruktion der Gruppe nicht zu kennen.

Mit Hilfe des invarianten Vektors w kann nun eine algebraische Gruppe definiert werden. Dazu betrachte man die induzierte Operation von $\mathrm{SL}_7(k)$ auf W und definiere

$$G := \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w)$$

Von dieser Gruppe soll gezeigt werden, dass sie vom Typ G_2 ist. Dazu werden einige Sätze aus der Theorie der algebraischen Gruppen benötigt, welche im folgenden Abschnitt zusammengestellt sind.

5 Einige Strukturs̆atze aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen

Hier wird die Theorie bereitgestellt, die später dazu verwendet wird, die oben definierte Gruppe zu charakterisieren. Es handelt sich dabei um Aussagen aus der elementaren Theorie der algebraischen Gruppen. Deshalb werden keine Beweise gegeben. Die Sätze und die Beweise findet man in den Büchern [4] und [6].

Zunächst werden noch zwei Definitionen aus der Darstellungstheorie von Gruppen und das Lemma von Schur in Erinnerung gerufen.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Sei $y \in X$. Die Menge $G_y := \{x \in G | x \cdot y = y\}$ heisst *Isotropiegruppe* oder *Stabilisator von y.*

Definition. Seien ρ und η zwei Darstellungen der Gruppe G auf V bzw. W. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ heisst *G-äquivariant*, wenn sie mit den beiden Operationen verträglich ist, d.h., wenn für alle $g \in G$ und alle $v \in V$ gilt:

$$\eta_g(\varphi(v)) = \varphi(\rho_g(v)).$$

Lemma von Schur. *Seien ρ und η zwei irreduzible Darstellungen von G auf V bzw. W, und sei $\varphi : V \to W$ eine G-äquivariante lineare Abbildung. Dann gilt:*
(i) Entweder ist φ ein Isomorphismus oder $\varphi = 0$
(ii) Wenn $V = W$ und $\rho = \eta$ ist, dann gilt $\varphi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in k$, wobei id_V die Identität auf V bezeichnet.

Beweis. Siehe [1, 9.9] □

Satz 5.1. *Sei G eine algebraische Gruppe, die auf einer Varietät X via Morphismus operiert. Dann ist G_y für jedes $y \in X$ eine abgeschlossene Untergruppe von G.*

Beweis. Siehe [4, 8.2] □

Satz 5.2. *Sei G eine algebraische Gruppe, die auf einer Varietät X via Morphismus operiert. Dann ist jede Bahn eine glatte, lokal abgeschlossene Teilmenge von X.*

Beweis. Siehe [4, 8.3] □

Definition. Eine algebraische Gruppe heisst *diagonalisierbar*, wenn sie isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe der diagonalen Gruppe $\mathrm{D}_n(k)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Eine algebraische Gruppe heisst *Torus*, wenn sie isomorph ist zu $\mathrm{D}_n(k)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Ein *maximaler Torus* einer algebraischen Gruppe G ist ein Torus maximaler Dimension.

Bemerkung. Abgeschlossene Untergruppen und homomorphe Bilder von diagonalisierbaren Gruppen sind wiederum diagonalisierbar.

Theorem 5.3 (Lie-Kolchin). *Sei G eine zusammenhängende auflösbare Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ und V ein von Null verschiedener endlich dimensionaler Vektorraum. Dann hat G einen gemeinsamen Eigenvektor in V.*

Beweis. Siehe [4, 17.6] □

Eines der wichtigsten Konzepte für die Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen ist das der Boreluntergruppen.

Definition. *Eine Boreluntergruppe der algebraischen Gruppe G* ist eine maximale zusammenhängende auflösbare algebraische Untergruppe.

Bemerkungen.

1. Eine Boreluntergruppe ist immer abgeschlossen.

2. Es ist klar, dass eine zusammenhängende auflösbare Untegruppe grösstmöglicher Dimension in G eine Boreluntergruppe ist. Es ist aber a priori überhaupt nicht klar, dass alle Boreluntergruppen dieselbe Dimension haben. Dies folgt aus einem sehr starken Resultat. Obwohl das Theorem nicht explizit gebraucht wird, soll es doch angegeben werden, um die Bedeutung der Boreluntergruppen zu betonen.

Theorem 5.4. *Sei B eine beliebige Boreluntergruppe der algebraischen Gruppe G. Dann ist G/B eine projektive Varietät und alle Boreluntergruppen sind konjugiert zu B.*

Beweis. Siehe [4, 21.3] □

Korollar. *Die maximalen Tori einer algebraischen Gruppe G sind zueinander konjugiert.*

Beweis. Siehe [4, 21.3] □

Seien nun A und B zwei normale auflösbare algebraische Untergruppen einer algebraischen Gruppe G. Mit A und B ist auch AB normal und auflösbar. Also enthält eine algebraische Gruppe eine eindeutige grösste normale auflösbare algebraische Untergruppe.

Definition. Die Einskomponente der grössten normalen auflösbaren Untergruppe einer algebraischen Gruppe G heisst *Radikal von* G und wird mit $\mathrm{R}(G)$ bezeichnet.
Die Untergruppe der unipotenten Elemente von $\mathrm{R}(G)$ heisst *unipotentes Radikal* und wird mit $\mathrm{R}_u(G)$ bezeichnet.

Bemerkungen.

1. Die Gruppe $\mathrm{R}(G)$ ist die grösste zusammenhängende normale auflösbare algebraische Untergruppe von G.

2. Die Gruppe $\mathrm{R}_u(G)$ ist die grösste zusammenhängende normale unipotente algebraische Untergruppe von G.

Definition. Eine nicht triviale zusammenhängende algebraische Gruppe G heisst *halbeinfach*, wenn $\mathrm{R}(G) = e$ gilt.
Eine nicht triviale zusammenhängende algebraische Gruppe G heisst *reduktiv*, wenn $\mathrm{R}_u(G) = e$ gilt.
Eine nicht triviale halbeinfache algebraische Gruppe G heisst *einfach*, wenn sie keine echte nicht triviale abgeschlossene zusammenhängende normale Untergruppe hat.

Definition. Sei G eine algebraische Gruppe. Das *Zentrum* von G ist definiert durch $\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid xy = yx, \text{ für alle } y \in G\}$.
Der *Kommutator* zweier Elemente $x, y \in G$ ist definiert durch $(x, y) := xyx^{-1}y^{-1}$.
Mit (G, G) wird die Untergruppe bezeichnet, welche von allen Kommutatoren erzeugt wird.

Satz 5.5. *Sei G eine reduktive algebraische Gruppe. Dann gilt $\mathrm{R}(G) = \mathrm{Z}(G)^o$, und $\mathrm{R}(G)$ ist ein Torus, der nur einen endlichen Durchschnitt mit (G, G) hat.*

Beweis. Siehe [4, 19.5] □

Das nachfolgende Theorem gibt Auskunft darüber, wie man eine halbeinfache algebraische Gruppe in einfache Komponenten zerlegen kann.

Theorem 5.6. *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe und seien $\{G_i | i \in I\}$ die minimalen abgeschlossenen zusammenhängenden normalen Untergruppen positiver Dimension. Dann gilt:*
(i) Wenn $i \neq j$ ist, dann ist $(G_i, G_j) = e$.
(ii) I ist endlich, sagen wir $I = \{1, \ldots, n\}$, und der Produktmorphismus $\pi : G_1 \times \ldots \times G_n \to G$ ist surjektiv und hat endlichen Kern.
(iii) Jede abgeschlossene zusammenhängende normale Untergruppe von G ist das Produkt derjenigen G_i, welche sie enthält, und wird von den übrigen zentralisiert.
(iv) $G = (G, G)$.

Beweis. Siehe [4, 27.5] □

Korollar. *Sei G eine reduktive algebraische Gruppe. Dann gilt $G = \mathrm{R}(G)(G, G)$.*

Die Ausführungen aus Abschnitt 3 über die Zerlegung einer Darstellung in Gewichtsräume kann auf algebraische Gruppen verallgemeinert werden. Die Zerlegung hängt dann von einer diagonalisierbaren Untergruppe ab. Um dies zu formulieren, braucht man den Begriff eines Charakters einer algebraischen Gruppe.

Definition. Sei G eine algebraische Gruppe. *Ein Charakter von* G ist ein Homomorphismus $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ von algebraischen Gruppen.
Sind χ, ψ zwei Charaktere von G, so erhält man durch $(\chi\psi)(x) := \chi(x)\psi(x), x \in G$ einen weiteren Charakter. Auf diese Weise bilden die Charaktere eine abelsche Gruppe, die mit $\mathrm{X}(G)$ bezeichnet wird und *Charaktergruppe von* G heisst.

Sei H eine diagonalisierbare algebraische Gruppe und V eine Darstellung von H. Dann lässt sich V schreiben als direkte Summe von Unterräumen der Form $V_\alpha = \{v \in V | x \cdot v = \alpha(x)v \text{ für alle } x \in H\}$, für $\alpha \in \mathrm{X}(H)$.
Wiederum heisst $\alpha \in \mathrm{X}(H)$ mit $V_\alpha \neq 0$ Gewicht von H in V und V_α der dazugehörige Gewichtsreum.
Betrachte eine diagonalisierbare Untergruppe D einer algebraischen Gruppe G. Für $x \in G$ ist

$$\operatorname{Int} x : G \to G, y \mapsto xyx^{-1}, \text{ für } y \in G$$

ein Automorphismus von G. Sei $\operatorname{Ad} x$ das Differential von $\operatorname{Int} x$. Dann ist also $\operatorname{Ad} x$ ein Automorphismus der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Für $x \in \mathrm{GL}_n(k)$ und $y \in \mathfrak{gl}_n(k)$ gilt:

$$\operatorname{Ad} x(y) = xyx^{-1},$$

wobei die rechte Seite das gewöhnliche Matrixprodukt ist. Man kann zeigen, dass $\operatorname{Ad} : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{GL}_{n^2}(k)$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist. (Siehe hierzu [4, 10.3].)

Aus diesen Bemerkungen folgt dann, dass $\operatorname{Ad} D$ eine diagonalisierbare Untergruppe von $\operatorname{Aut} \mathfrak{g} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist. Also kann man auch hier wieder von Gewichten sprechen.

Definition. Die von Null verschiedenen Gewichte von $\operatorname{Ad} D$ in $\mathfrak{g}$ heissen *Wurzeln von G bezüglich D* und werden mit $\Phi(G, D)$ (oder einfach Φ) bezeichnet.

Der Begriff Wurzel oder Wurzelsystem taucht auch in der Theorie der Lie-Algebren auf. Ein wichtiger Schritt in der Klassifizierung der halbeinfachen algebraischen Gruppen besteht darin, das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 5.7. *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe und T ein maximaler Torus in G, $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}(T)$. Dann ist $\Phi(G, T)$ ein abstraktes Wurzelsystem in E im Sinne der Theorie der Lie-Algebren.*

Beweis. Siehe [4, 27.1] □

Aus Theorem 5.6 und Theorem 5.7 folgt ein wichtiges Resultat.

Korollar. *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe. Die Zerlegung $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$ entspricht genau der Zerlegung von Φ in irreduzible Komponenten.*

Zu einem Wurzelsystem gehört ein sogenanntes Dynkin-Diagramm und dazu wiederum eine Gruppe Γ von Diagrammautomorphismen. Mit Hilfe dieser Daten kann man Aussagen über die Automorphismengruppe einer halbeinfachen algebraischen Gruppe beweisen. Sei also G halbeinfach. Die Gruppe aller Automorphismen der algebraischen Gruppe G wird mit $\operatorname{Aut}(G)$ bezeichnet. Die Menge $\operatorname{Int}(G)$ der inneren Automorphisemn bildet eine normale Untergruppe. Eine andere Untergruppe besteht aus denjenigen Automorphismen, welche einen gegebenen Torus T und eine Boreluntergruppe B mit $T \subset B$ festlassen. Diese Untergruppe wird mit D bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Wahl einer

Boreluntergruppe der Wahl einer Basis Δ von Φ gleichkommt. Jedes $\sigma \in D$ induziert einen Automorphismus $\hat{\sigma}$ von Φ. Weil σ sowohl T als auch B festlässt, wird Δ von $\hat{\sigma}$ stabilisiert. Deshalb gehört $\hat{\sigma}$ zu Γ, und die Abbildung

$$D \to \Gamma, \sigma \mapsto \hat{\sigma}$$

liefert einen Gruppenhomomorphismus.

Theorem 5.8. *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe. Dann gilt:*
(i) $\mathrm{Aut}(G) = (\mathrm{Int}(G))D$.
(ii) Die natürliche Abbildung $D \to \Gamma$ induziert einen Monomorphismus $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G) \to \Gamma$.

Beweis. Siehe [4, 27.4] □

Bemerkung. Dieses Theorem wird später von grossem Nutzen sein. Wenn man sich zum Beispiel das Dynkin-Diagramm eines Wurzelsystems von Typ G_2 anschaut, so sieht man sofort, dass Γ trivial sein muss. Folglich sind alle Automorphismen einer algebraischen Gruppe von Typ G_2 innere Automorphismen.

Eines der Hauptresultate der Theorie der linearen algebraischen Gruppen besteht in der Klassifikation der einfachen algebraischen Gruppen.

Theorem 5.9. *Seien G_1, G_2 einfache algebraische Gruppen mit isomorphen Wurzelsystemen und Fundamentalgruppen. Dann sind G_1 und G_2 isomorph als algebraische Gruppen, ausser wenn das Wurzelsystem vom Typ D_l ($l \geq 6$ gerade) ist und die Fundamentalgruppe Ordnung 2 hat, in welchem Falle zwei verschiedene Isomorphietypen auftreten können.*

Beweis. Siehe [4, 32.1] □

6 Untersuchung der Gruppe aus Abschnitt 4

Nachdem im vorherigen Abschnitt ein paar Konzepte und Resultate der Theorie der linearen algebraischen Gruppen erwähnt worden sind, kann nun die Untersuchung der in Abschnitt 4 definierten Gruppe weitergeführt werden. Die Gruppe G war definiert worden als

$$G := \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w),$$

wobei w ein unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invarianter Vektor in $W := \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$ ist. Von dieser Gruppe soll nun in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass sie zusammenhängend, einfach vom Typ G_2 ist.

Im allgemeinen ist es schwierig zu entscheiden, ob eine gegebene algebraische Gruppe zusammenhängend ist oder nicht. Auch in diesem Fall wird das nicht direkt gezeigt. Man arbeitet zunächst mit der Einskomponente G^o von G. Von dieser kann man zeigen, dass sie einfach und vom Typ G_2 ist. Erst ganz am Schluss wird gezeigt, dass G zusammenhängend ist. Dazu wird es wichtig sein, dass alle Automorphismen einer algebraischen Gruppe vom Typ G_2 innere Automorphismen sind.

Zunächst muss aber zuerst einmal klargestellt werden, dass G überhaupt eine algebraische Gruppe ist.

Lemma 6.1. *Die Gruppe G ist eine lineare algebraische Gruppe.*

Beweis. Sei $W := \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$. Die induzierte Operation von $\mathrm{SL}_7(k)$ auf W liefert einen Morphismus von Varietäten

$$\mathrm{SL}_7(k) \times W \to W.$$

Nach Satz 5.1 ist somit $G = (\mathrm{SL}_7(k))_w$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SL}_7(k)$. $\square$

Wie bereits erwähnt wird jetzt mit G^o weitergearbeitet. Definiere $V := \mathrm{Sym}^6(k^2)$.

Lemma 6.2. *Die Gruppe G^o operiert irreduzibel auf V.*

Beweis. Betrachte G als Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$. Aus Abschnitt 3 folgt, dass $\mathrm{SL}_2(k)$ irreduzibel auf V operiert. Die Operation induziert eine Einbettung

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(k) \hookrightarrow \mathrm{SL}_7(k).$$

Dies ist ein Morphismus von algebraischen Gruppen. Da $\mathrm{SL}_2(k)$ zusammenhängend ist, liegt das Bild von φ in G^o. Somit operiert auch G^o irreduzibel auf V. $\square$

Lemma 6.3. *Die Gruppe G^o ist halbeinfach.*

Beweis. Das Radikal $\mathrm{R}(G^o)$ von G^o ist die grösste zusammenhängende, normale, auflösbare Untergruppe von G^o. Es ist zu zeigen: $\mathrm{R}(G^o) = e$. Nach dem Theorem von Lie-Kolchin besitzt $\mathrm{R}(G^o)$ einen Eigenvektor in V, d.h., es gibt $u \in V$ mit $y \cdot u = \chi(y)u$ für alle $y \in \mathrm{R}(G^o)$. Dies definiert einen Charakter χ von $\mathrm{R}(G^o)$. Sei U der Unterraum von V, der von allen Eigenvektoren von H aufgespannt wird. Die Gruppe $\mathrm{R}(G^o)$ operiert dann diagonal auf U.

Behauptung: U ist G^o-invariant.

Seien dazu $x \in G^o$ und $y \in \mathrm{R}(G^o)$. Sei

$$w \in V_\chi = \{u \in V | y \cdot u = \chi(y)u, \text{ für alle } y \in \mathrm{R}(G^o)\}.$$

Weil $\mathrm{R}(G^o)$ nach Voraussetzung normal ist, folgt

$$y \cdot (x \cdot w) = x(x^{-1}yx) \cdot w = x \cdot \chi(x^{-1}yx)w = \chi(x^{-1}yx)x \cdot w.$$

Die Abbildung

$$\mathrm{R}(G^o) \to \mathbb{G}_m, y \mapsto \chi(x^{-1}yx)$$

definiert somit einen Charakter $\hat{\chi}$ von $\mathrm{R}(G^o)$. Also bildet x den Raum V_χ auf $V_{\hat{\chi}}$ ab, woraus $x \cdot U \subseteq U$ folgt. Dies gilt für jedes $x \in G^o$, und die Behauptung folgt.

Da U in V liegt und G^o nach obigen Ausführungen irreduzibel auf V operiert, muss $U = V$ gelten. Daraus folgt, dass $\mathrm{R}(G^o)$ diagonal auf V operiert und deshalb kommutativ ist.

Sei $y \in \mathrm{R}(G^o)$ fest. Da y diagonal ist und $\mathrm{R}(G^o)$ normal in G, muss auch xyx^{-1} diagonal sein für alle $x \in G^o$. Als konjugierte Elemente haben y und xyx^{-1} dieselben Eigenwerte. Es können nur Permutationen auftreten, und folglich gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für xyx^{-1}. Betrachte die Operation

$$G^o \times \mathrm{R}(G^o) \to \mathrm{R}(G^o), (x, y) \mapsto xyx^{-1}$$

Für festes $y \in \mathrm{R}(G^o)$ ist das Bild von G^o zusammenhängend und nach obiger Ausführung endlich, besteht also nur aus y, d.h., $xyx^{-1} = y$ für alle $x \in G^o$. Also liegt $\mathrm{R}(G^o)$ im Zentrum $\mathrm{Z}(G^o)$ von G^o.

Die Elemente aus $\mathrm{R}(G^o)$ kommutieren mit den Elementen aus G^o. Folglich definiert ein Element $y \in \mathrm{R}(G^o)$ einen G^o-äquivarianten Endomorphismus von V. Nun ist aber V eine irreduzible Darstellung von G^o. Das Lemma von Schur impliziert, dass y von der Form $\lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in k$ ist.

Als Untergruppe von $\mathrm{SL}_7(k)$ enthält $\mathrm{R}(G^o)$ nur Matrizen mit Determinante 1. Also muss λ eine siebte Einheitswurzel sein.

Da $\mathrm{R}(G^o)$ zusammenhängend ist, kommt nur $\lambda = 1$ in Frage. Es muss also $\mathrm{R}(G^o) = \{\mathrm{id}_V\} = e$ gelten. □

Um die Klassifikation und deren Tabellen aus [5] anwenden zu können, muss noch gezeigt werden, dass G^o einfach ist. Dazu muss man die Struktur einer halbeinfachen algebraischen Gruppe kennen, wie sie in Theorem 5.6 (ii) geschildert ist.

Lemma 6.4. *G^o ist eine einfache algebraische Gruppe.*

Beweis. Sei

$$\pi : G_1 \times \ldots \times G_n \to G^o$$

wie in Theorem 5.6 (ii) definiert. Die Gruppe G^o kann also geschrieben werden als

$$G^o = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n.$$

Dabei sind $G_1, \ldots, G_n$ einfach. Es ist also zu zeigen: $G^o = G_1$ bzw.: $G_2 = \ldots = G_n = e$.

Die Gruppe G^o operiert irreduzibel auf $V = \mathrm{Sym}^6(k^2)$. Lifte die Darstellung mit π zu einer irreduziblen Darstellung

$$\varrho : G_1 \times \ldots \times G_n \to \mathrm{GL}(V)$$

von $G_1 \times \ldots \times G_n$. Eine irreduzible Darstellung eines direkten Produkts von Gruppen ist immer ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen der einzelnen Gruppen. Es gibt also irreduzible Darstellungen V_i von G_i, für $i = 1, \ldots, n$ mit:

$$V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Da $\dim(V) = 7$ eine Primzahl ist, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit: $\dim(V_i) = 7$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i = 1$ annehmen. Also folgt

$$\dim(V_2) = \ldots = \dim(V_n) = 1.$$

Die Operation von $G_1 \times \ldots \times G_n$ auf $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ ist gegeben durch

$$(g_1, \ldots, g_n) \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = g_1 \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes g_n \cdot v_n.$$

Da die Darstellungen $V_2, \ldots, V_n$ eindimensional sind, operieren $G_2, \ldots, G_n$ skalar auf V. Weil aber $G_2, \ldots, G_n$ Untergruppen von G^o und somit auch von $\mathrm{SL}_7(k)$ sind, folgt

$$G_2 = \ldots = G_n = e,$$

d.h., $G^o = G_1$. □

Die Gruppe $\mathrm{SL}_7(k)$ operiert auf $W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$. Für jedes $v \in W$ gilt:

$$\dim(\mathrm{SL}_7(k)) = \dim(\mathrm{SL}_7(k) \cdot v) + \dim(\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(v)).$$

Aus $\dim(\mathrm{SL}_7(k)) = 48$ und $\dim(W) = 35$ folgt, dass $\dim(G) \geq 13$ ist. Weil jede irreduzible Komponente einer algebraischen Gruppe dieselbe Dimension wie die Gruppe hat, gilt auch $\dim(G^o) \geq 13$.

Bis jetzt hat man also eine einfache algebraische Gruppe der Dimension mindestens 13, die eine irreduzible Darstellung der Dimension 7 besitzt. Beim Durchgehen der Tabellen in [5] findet man, dass es für G^o drei Möglichkeiten gibt:

1. Die Gruppe G^o ist vom Typ A_6, d.h., $G^o \cong \mathrm{SL}_7(k)$.
2. Die Gruppe G^o ist vom Typ B_3, d.h., $G^o \cong \mathrm{SO}_7(k)$.
3. Die Gruppe G^o ist vom Typ G_2.

Jetzt müssen also noch die ersten beiden Fälle ausgeschlossen werden.

Lemma 6.5. *G^o ist eine algebraische Gruppe vom Typ* G_2.

Beweis. Wegen $\mathrm{SO}_7(k) \subset \mathrm{SL}_7(k)$ genügt es, den zweiten Fall aus der obigen Liste auszuschliessen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Gruppe $\mathrm{SO}_7(k)$ zu definieren. Die Gruppe ist bestimmt durch die symmetrische Bilinearform, die sie invariant lässt. Hier wählt man am besten die durch die symmetrische 7×7 Matrix

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

definierte Bilinearform. Die Gruppe besteht also aus denjenigen $x \in \mathrm{SL}_7(k)$, welche die Bedingung $x^t\,\mathrm{J}\,x = \mathrm{J}$ erfüllen. Es genügt zu zeigen, dass diese Gruppe keinen nicht trivialen invarianten Vektor in W besitzt. Ein invarianter Vektor muss auch unter einem maximalen Torus von $\mathrm{SO}_7(k)$ invariant sein. Ein solcher Torus besteht beispielsweise aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \text{ für } a, b, c \in k.$$

Bezeichne diesen Torus mit T. Sei $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ die Standardbasis von $V = \mathrm{Sym}^6(k^2)$. Wenn nun ein Vektor v unter allen Elementen aus T invariant ist, so muss er eine Linearkombination von Vektoren sein, die eine der drei folgende Formen haben:
(i) $v = v_3 \wedge v_0 \wedge v_6$
(ii) $v = v_3 \wedge v_1 \wedge v_5$
(iii) $v = v_3 \wedge v_2 \wedge v_4$

Definiere

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_7(k).$$

Die Matrix A lässt keine Linearkombination der oben beschriebenen Vektoren invariant, und somit hat die Gruppe $\mathrm{SO}_7(k)$ keinen invarianten Vektor in W. $\square$

Bisher wurde immer mit G^o gearbeitet. Am Anfang wurde aber behauptet, dass G eine algebraische Gruppe vom Typ G_2 ist. Dazu fehlt nur noch, dass G zusammenhängend ist. Dies zeigt man mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis der Halbeinfachheit.

Lemma 6.6. *G ist eine zusammenhängende algebraische Gruppe.*

Beweis. Sei $x \in G$. Dann induziert x einen Automorphismus von G

$$\operatorname{Int} x : G \to G, y \mapsto xyx^{-1}.$$

Da G^o eine normale Untergruppe von G ist, induziert $\operatorname{Int} g\,|_{G^o}$ einen Automorphismus von G^o.

Aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 4 weiss man, dass alle Automorphismen einer algebraischen Gruppe vom Typ G_2 innere Automorphismen sind. Weil nun G^o vom Typ G_2 ist, gilt also $\operatorname{Aut} G^o = \operatorname{Int} G^o$. Folglich gibt es ein $\hat{x} \in G^o$ mit: $xyx^{-1} = \hat{x}y\hat{x}^{-1}$, für alle $y \in G^o$.

$\hat{x}^{-1}x$ kommutiert mit den Elementen von G^o und definiert somit einen G^o-äquivarianten Endomorphismus von $V = \mathrm{Sym}_6(k^2)$. Die Gruppe G^o operiert aber irreduzibel auf V. Das Lemma von Schur impliziert, dass $\hat{x}^{-1}x$ von der Form $\lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in k$ ist.

Als Element von $W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$ ist der unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invariante Vektor w Linearkombination von Vektoren der Gestalt $v_i \wedge v_j \wedge v_k, i < j < k$. Soll nun $\lambda\,\mathrm{id}_V$ den Vektor w invariant lassen, muss λ eine dritte Einheitswurzel sein.

Wie im Beweis der Halbeinfachheit von G^o folgt aber, dass λ siebte Einheitswurzel sein muss. Es kommt also nur $\lambda = 1$ in Frage. Das bedeutet aber, dass $\hat{x}^{-1}x = 1$ gelten muss und somit $\hat{x} = x \in G^o$. $\square$

Alles in allem erhält man den folgenden

Satz 6.7. *Sei $W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$. Dann gibt es ein von Null verschiedenes unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invariantes $w \in W$, und die Gruppe $G = \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w)$ ist eine einfache, zusammenhängende algebraische Gruppe vom Typ G_2,*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1 und den vorangehenden Resultaten dieses Abschnitts. $\square$

7 Generizität

Im letzten Abschnitt dieser Semesterarbeit wird nun gezeigt, dass das Resultat des vorangehenden Abschnittes gar nicht so speziell ist, wie es auf den ersten Blick aussieht. Die Gruppe G sei wie im Abschnitt 5 definiert als $G = \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w)$, wobei $w \in W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$ den unter $\mathrm{SL}_2(k)$ invarianten Vektor bezeichnet.

Definiere $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_7(k)}(w)$. Natürlich liegt G in H, und aus

$$\dim(\mathrm{GL}_7(k)) = \dim(\mathrm{GL}_7(k) \cdot w) + \dim(\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_7(k)}(w))$$

folgt, dass H Dimension mindestens 14 hat.

Lemma 7.1. *G hat endlichen Index in H.*

Beweis. Nach dem ersten Isomporphiesatz für Gruppen ist H/G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{GL}_7(k)/\mathrm{SL}_7(k)$. Daher gilt $\dim(H/G) \leq 1$.

Annahme: $\dim(H/G) = 1$. Diese zusätzliche Dimension kann nur im toralen Anteil dazukommen. Da G zusammenhängend ist, muss $G \subset H^o$ gelten. Also operiert auch H^o irreduzibel auf $V = \mathrm{Sym}^6(k^2)$.

Behauptung: Die Gruppe H^o ist reduktiv.
Der Beweis dieser Behauptung geht analog zum Beweis der Halbeinfachheit von G^o.

Die Gruppe (H^o, H^o) liegt sicher in $G = H \cap \mathrm{SL}_7(k)$. Aus Satz 5.5 folgt, dass der Quotient H/G in einem Torus liegt. Es muss dann also gelten

$$H/G = \mathbb{G}_m.$$

Das ist aber nicht möglich, da das Zentrum von H nicht alle Skalare sondern nur die dritten Einheitswurzeln enthält. Also muss $\dim(H/G) = 0$ gelten. □

Man kann also $\dim(G) \geq 14$ bereits zeigen, bevor man weiss, dass G vom Typ G_2 ist. Weil nun aber G vom Typ G_2 ist, folgt $\dim(\mathrm{GL}_7(k) \cdot w) = 35$. Da auch $\dim(W) = 35$ ist, muss der Orbit $\mathrm{GL}_7(k) \cdot w$ offen sein. Das folgt aus Satz 4.2.

Dies kann nun allgemein ausgenutzt werden. Dazu braucht man ein Element $w \in W$ mit: $\dim(\mathrm{GL}_7(k) \cdot w) = 35$. Die Menge dieser Vektoren ist bezüglich der Zariski-Topologie offen und dicht in W. Für so ein Element liefert dann

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w)$$

immer eine einfache, zusammenhängende algebraische Gruppe vom Typ G_2.

Satz 7.2. *Sei $w \in W = \bigwedge^3(\mathrm{Sym}^6(k^2))$ mit: $\dim(\mathrm{GL}_7(k) \cdot w) = 35$. Dann ist $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_7(k)}(w)$ eine einfache, zusammenhängende algebraische Gruppe vom Typ G_2.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der obigen Überlegung. □

Jetzt sieht man also, dass man auf diese Weise eine algebraische Gruppe vom Typ G_2 erhält. Für die Formulierung dieser Aussage braucht man auch keine Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(k)$ mehr. Das Resultat ist also doch um einiges allgemeiner, als es die ganze Konstruktion aus Abschnitt 3 vermuten lässt.

Literatur

[1] Michael Artin: *Algebra*, Birkhäuser, Basel, 1998

[2] W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory, A First Course*, Springer-Verlag, New York, 1991

[3] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1972

[4] J. E. Humphreys: *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York, 1981

[5] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg (Eds.): *Lie Goups and Lie Algebras III*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994

[6] T. A. Springer: *Linear Algebraic Groups*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 1998