Untergruppen freier Gruppen sind frei

Bachelorarbeit von Michael Bamberger
betreut durch Prof. Dr. R. Pink

14. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Bachelorabeit soll das folgende Theorem bewiesen werden:

Theorem. *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese gruppentheoretische Tatsache zu beweisen. Der Beweis, der in dieser Arbeit gegeben wird, verwendet Instrumente aus der Topologie und ist somit ein Paradebeispiel dafür, dass man Aussagen aus der Algebra mithilfe der Topologie elegant beweisen kann.
Im Zentrum der Arbeit steht die Tatsache, dass jede freie Gruppe F isomorph ist zur Fundamentalgruppe eines bestimmten Graphen X. Jeder Untergruppe H von X kann man dann eine Überlagerung von X zuordnen, die selbst ein zusammenhängender Graph ist und deren Fundamentalgruppe unter dem von der Projektionsabbildung induzierten Gruppenhomomorphismus auf H abgebildet wird. Um den Beweis zu vervollständigen, werden wir zeigen, dass die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden Graphen frei ist.
In Kapitel 2 werde ich zunächst die in dieser Arbeit verwendeten gruppentheoretischen Konzepte einführen. Das Kapitel 3 ist der Topologie der CW-Räume gewidmet, wo uns insbesondere die eindimensionalen CW-Räume, sprich die Graphen, beschäftigen werden. Nach der Behandlung einiger Resultate aus der Überlagerungstheorie in Kapitel 4 werden wir in der Lage sein, das Theorem zu beweisen.
Vorausgesezt wird, dass der Leser die Grundbegriffe der Algebra (Gruppe, Normalteiler, etc.) kennt und mit den Eigenschaften von topologischen Räumen vertraut ist. Auch grundlegende topologische Begriffe (Weg, Homotopie, etc.) sollten ihm geläufig sein.
Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Richard Pink für die vielen wertvollen Inputs sowie bei Egon Rütsche für die umsichtige Betreuung.

2 Konzepte aus der Gruppentheorie

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Begriff der *freien Gruppe* sowie das *freie Produkt* einzuführen.

2.1 Freie Gruppen

Notation und Konvention. Sei G eine Gruppe und $x \in G$ ein Gruppenelement. Dann bezeichnen wir das neutrale Element von G mit 1. Weiter bezeichnen wir das zu x inverse Element mit x^{-1}, das heisst es gilt $xx^{-1} = 1$.

Definition 2.1.1. Sei G eine Gruppe und sei E eine Teilmenge von G, die nicht das neutrele Element von G enthält. Der Durchschnitt aller Untergruppen von G, die E enthalten, heisst die *von E erzeugte Untergruppe* und wird mit $\mathscr{U}(E)$ bezeichnet. Die Menge $\mathscr{U}(E)$ ist eine Untergruppe von G. Wenn $\mathscr{U}(E) = G$ ist, heisst E ein *Erzeugendensystem* von G. Man sagt dann auch: "Die Gruppe G wird von E erzeugt."

Bemerkung 2.1.2. Man kann leicht zeigen, dass die Gruppe $\mathscr{U}(E)$ die kleinste Untergruppe von G ist, die E enthält.

Bemerkung 2.1.3. In der von E erzeugten Untergruppe $\mathscr{U}(E)$ von G kann jedes Element g in der Form $g = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ mit $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$ dargestellt werden. Ist also $\mathscr{U}(E) = G$, so lässt sich jedes Element von G in dieser Form darstellen.

Definition 2.1.4. Sei E ein Erzeugendensystem von G und sei $g \in G \backslash \{1\}$. Die in Bemerkung 2.1.3 gegebene Darstellung $g = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ heisst *reduziert*, falls $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ und $x_j \neq x_{j+1}$ für $1 \leq j \leq k-1$.

Bemerkung 2.1.5. In der reduzierten Darstellung tauchen insbesondere keine Terme der Form $x_j x_j^{-1}$ und $x_j^{-1} x_j$ für $1 \leq j \leq k-1$ auf.

Satz 2.1.6. *Sei G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G. Dann besitzt jedes Gruppenelement ausser dem neutralen Element eine reduzierte Darstellung.*

Beweis Sei $g \in G \backslash \{1\}$. Weil E die Gruppe G erzeugt, hat g eine Darstellung der Form $g = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ mit $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$. Es ist klar, dass man die in der Darstellung auftauchenden neutralen Elemente streichen kann. Nun schreibt man in der verbleibenden Sequenz die Potenzen aus und kürzt alle Terme der Form $x_j x_j^{-1}$ und $x_j^{-1} x_j$ weg, wobei $j \in \{1, \ldots, k\}$. Dies darf man, weil solche Terme dem neutralen Element entsprechen. Zudem fasst man alle Terme der Form

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-mal}$$

zur Potenz x^n zusammen. In der aus diesen Umformungen resultierenden Sequenz tauchen dementsprechend keine neutralen Elemente und keine Terme der Form $x_j^n x_j^m$ mit $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, auf. Also haben wir eine reduzierte Darstellung für g gefunden. $\square$

Bemerkung 2.1.7. Sei G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G. Für ein Element $g \in G$ ist die reduzierte Darstellung im Allgemeinen nicht eindeutig, weil es in einer Gruppe zwischen den Elementen spezielle Relationen geben kann, die nicht direkt aus den Gruppenaxiomen folgen. Nachstehend sind zwei Beispiele von Gruppen gegeben, in denen es spezielle Relationen gibt.

Beispiel 1. Sei G eine abelsche Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G. Zwei Elemente $a \in E$ und $b \in E$ mit $a \neq b$ erzeugen das Element $g = ab$. Diese reduzierte Darstellung von g mit Elementen aus E ist aber nicht eindeutig. Denn weil G abelsch ist, kommutieren auch die Elemente des Erzeugendensystems E von G, also haben wir für g auch die reduzierte Darstellung $g = ba$. In diesem Beispiel folgt die Nicht-Eindeutigkeit daher, dass wir in abelschen Gruppen die spezielle Relation $gh = hg$ für alle Elemente $g \in G$ und $h \in G$ haben.

Beispiel 2. In einer endlichen Gruppe G der Ordnung n erfüllen alle Gruppenelemente g die spezielle Relation $g^n = 1$, wobei 1 das neutrale Element der Gruppe bezeichnet.

Uns interessieren im Folgenden die Gruppen, in denen es keine speziellen Relationen zwischen den Elementen gibt. Solche Gruppen sind die zu Beginn des Abschnitts erwähnten *freien Gruppen*. Wie wir später sehen werden, ist in solchen Gruppen die reduzierte Darstellung der Elemente eindeutig.

Definition 2.1.8. Ein Erzeugendensystem E einer Gruppe G heisst *frei*, wenn folgende Bedingung gilt: Gibt es eine Relation

$$x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k} = 1 \text{ mit } x_1, x_2, \ldots, x_k \in E \text{ und } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\},$$

so gibt es ein j mit $1 \leq j \leq k-1$ und $x_j = x_{j+1}$ und $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$. Mit anderen Worten: Es existiert ein Term $x_j^{\varepsilon_j} x_j^{-\varepsilon_j}$, den man aus der Relation kürzen kann, da sein Wert dem neutralen Element der Gruppe entspricht.

Definition 2.1.9 (Freie Gruppe)**.** Eine Gruppe F nennen wir *freie Gruppe*, wenn sie ein freies Erzeugendensystem E besitzt.

Satz 2.1.10. *In freien Gruppen gibt es keine speziellen Relationen, das heisst es gibt keine Relation zwischen den Gruppenelementen, die nicht direkt aus den Gruppenaxiomen folgt.*

Beweis Angenommen es gäbe in einer freien Gruppe F mit freiem Erzeugendensystem E für $g_1 \in F, \ldots, g_k \in F$ eine Relation der Form $g_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot g_k^{n_k} = 1$. Wir können die Elemente $g_1, \ldots, g_k$ zunächst als Produkt von Elementen $x_1, x_2, \ldots$ aus dem Erzeugendensystem darstellen. Die Relation steht dann als Produkt von Elementen aus dem Erzeugendensystem da. Somit können wir sukzessive die Kürzungsregel aus Defintion 2.1.8 anwenden. Schlussendlich kommen wir auf einen Term der Form $x_j = 1$, $x_j x_j^{-1} = 1$ oder $x_j^{-1} x_j = 1$ für ein $x_j \in E$. Die vermeintlich spezielle Relation ist also in jedem Fall auf eine allgemeine Relation zurückzuführen. □

Bemerkung 2.1.11. Aus Beispiel 2 und Definition 2.1.9 folgt, dass die triviale Gruppe die einzige endliche freie Gruppe ist. Denn die Gleichung $x^n = 1$ ist für $n \geq 1$ eine spezielle Relation.

Satz 2.1.12. *Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem E und sei $g \in F \setminus \{1\}$. Dann ist die reduzierte Darstellung von g eindeutig.*

Beweis Angenommen, g habe die reduzierte Darstellung $g = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ für gewisse $x_1, \ldots, x_k \in E$ und $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Sei nun auch $g = y_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot y_l^{m_l}$ für $y_1, \ldots, y_l \in E$ und $m_1, ..., m_l \in \mathbb{Z}$ eine reduzierte Darstellung von g. Aus $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k} = y_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot y_l^{m_l}$ folgt

$$x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k} y_l^{-m_l} \cdot \ldots \cdot y_1^{-m_1} = 1,$$

wobei 1 das neutrale Element von F bezeichnet. Schreiben wir die Potenzen aus und berücksichtigen, dass das Erzeugendensystem E frei ist, können wir die Kürzungsregel aus Definition 2.1.8 anwenden. Weil $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $y_p \neq y_q$ für $p \neq q$, folgt, dass die Kürzung beim Term $x_k y_l^{-1}$ erfolgen muss und dementsprechend $x_k = y_l$ gilt. Damit man fortlaufend kürzen kann und $x_{k-1} \neq y_l$ sowie $y_{l-1} \neq x_k$ gilt, muss es folglich gleichviele x_k wie y_l geben. Also gilt $n_k = m_l$. Auf diese Weise erhält man sukzessive $x_{k-1} = y_{l-1}, n_{k-1} = m_{l-1}, \ldots$, sowie schliesslich auch $k = l$. Dies bedeutet, dass die beiden reduzierten Darstellungen von g gleich sind und es somit nur eine gibt. □

Über Existenz und Eindeutigkeit freier Gruppen gibt der folgende Satz Auskunft. Zuerst benötigen wir aber noch folgende Definition.

Definition 2.1.13. Sei G eine Gruppe. Für zwei Elemente $x, y \in G$ ist $[x, y] = x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in F$ der *Kommutator von x und y*. Die von allen Kommutatoren in G erzeugte Untergruppe $[G, G]$ von G heisst *Kommutatorgruppe von G*.

Bemerkung 2.1.14. Die Faktorgruppe $G^{ab} = G/[G, G]$ ist abelsch.

Satz 2.1.15. *Es gelten die folgenden drei Aussagen:*

(i) Je zwei freie Erzeugendensysteme einer freien Gruppe haben gleiche Mächtigkeit.

(ii) Zwei freie Gruppen sind genau dann isomorph, wenn deren freien Erzeugendensysteme die gleiche Mächtigkeit haben.

(iii) Zu jeder Kardinalzahl n gibt es eine freie Gruppe, die ein freies Erzeugendensystem mit Mächtigkeit n besitzt.

Beweis (i) Sei F eine freie Gruppe und seien $E = \{x_i | i \in I\}$ sowie $E' = \{y_j | j \in J\}$ zwei freie Erzeugendensysteme von F, wobei I und J beliebige Indexmengen sind. Für $x_i \in E$ sei $\overline{x}_i$ die zugehörige Restklasse in $F/[F, F]$. Es ist klar, dass die Menge $\overline{E} = \{\overline{x}_i | x_i \in E\}$ die Gruppe F^{ab} erzeugt. Betrachte die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^{|I|} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ mit der komponentenenweisen Addition als Verknüpfung. Seien

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots),\ i \in I,$$

die Standarderzeugenden von $\mathbb{Z}^{|I|}$. Sei nun $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{Z}^{|I|}$ eine Funktion mit $\varphi(x_i) = e_i$ für alle $i \in I$. Dann gibt es einen Homomorphismus $\Phi : F \longrightarrow \mathbb{Z}^{|I|}$ mit $\Phi|_E = \varphi$, weil ein Homomorphismus von F nach $\mathbb{Z}^{|I|}$ durch die Bilder der Erzeugenden eindeutig bestimmt ist. Weil $\mathbb{Z}^{|I|}$ abelsch ist, gilt $\Phi([F, F]) = 0$. Demzufolge induziert Φ einen Homomorphismus $\Phi' : F^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}^{|I|}$ mit $\Phi'(\overline{x}_i) = e_i$. Gilt also $\sum_{i \in I} n_i \overline{x}_i = 0$, dann ist auch $\Phi'(\sum_{i \in I} n_i \overline{x}_i) = 0$ und damit $\sum_{i \in I} n_i e_i = 0$. Weil aber $\{e_i | i \in I\}$ eine Basis von $\mathbb{Z}^{|I|}$ ist, folgt $n_1 = n_2 = \ldots = 0$. Also ist E eine Basis von F^{ab}, und analog zeigt man, dass auch E' eine Basis von F^{ab} ist. Weil aber F^{ab} ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist und der Rang eines freien $\mathbb{Z}$-Moduls eindeutig ist, folgt $|E| = |E'|$.

(ii) Wenn es zwischen zwei freie Gruppen einen Isomorphismus gibt, dann bilden die Bilder der freien Erzeugenden der einen Gruppe ein freies Erzeugendensystem der anderen Gruppe. Es folgt mit (i), dass die freien Erzeugendensystemte der beiden Gruppe gleiche Mächtigkeit haben.

Seien nun F und H zwei freie Gruppen mit freien Erzeugendensystemen $E_F = \{a_i | i \in I\}$ und $E_H = \{b_i | i \in I\}$. Definiere eine Abbildung $\varphi : F \longrightarrow H$ zunächst nur auf den Erzeugenden mittels

$$\varphi(a_i) = b_i, i \in I.$$

Betrachte dann für $g \in F$ die reduzierte Darstellung von g, welche gegeben ist durch $g = a_{i_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}^{n_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ und $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in E_F$. Definiere nun

$$\varphi(g) := \varphi(a_{i_1})^{n_1} \cdot \ldots \cdot \varphi(a_{i_k})^{n_k}$$

Wegen Existenz (Satz 2.1.6) und Eindeutigkeit (Satz 2.1.12) der reduzierten Darstellung ist φ wohldefiniert und trivialerweise ein Homomorphismus. Analog kann man die inverse Abbildung von φ definieren, und dementsprechend ist φ ein Isomorphismus.
(*iii*) In Abschnitt 3.4 werden wir zeigen, dass zu jeder Kardinalzahl n ein topologischer Raum X^I existiert, dessen Fundamentalgruppe frei ist über einem freien Erzeugendensystem mit Mächtigkeit n. □

Definition 2.1.16. Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem E. Die Mächtigkeit von E nennt man den *Rang* von F.

Bemerkung 2.1.17. Aufgrund von Satz 2.1.15 (*i*) ist der Rang einer freien Gruppe wohldefiniert.

Notation und Konvention. Eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem E bezeichnen wir fortan mit F_E.

Satz 2.1.18. *Die Gruppe* $(\mathbb{Z}, +)$ *ist frei vom Rang* 1*, und jede freie Gruppe vom Rang* 1 *ist isomorph zu* $\mathbb{Z}$*.*

Beweis Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wird vom Element 1 erzeugt, da jede beliebige ganze Zahl n mit 1 erzeugt werden kann:

$$n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-mal}$$

Da das Erzeugendensystem $E = \{1\}$ nur aus einem Element besteht und dementsprechend frei ist, ist $\mathbb{Z}$ eine freie Gruppe vom Rang 1.
Sei nun F_μ eine weitere freie Gruppe vom Rang 1 mit erzeugendem Element μ. Dann ist die Abbildung $\psi : F_\mu \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\mu^k \longmapsto k$, ein Isomorphismus. □

2.2 Das freie Produkt

Definition 2.2.1. Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen. Das *freie Produkt* $G_1 * G_2$ von G_1 und G_2 ist die Menge aller Wörter $g_1 g_2 \cdots g_m$ mit beliebiger endlicher Länge $m \geq 0$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) Jedes g_i liegt entweder in $G_1 \backslash \{1\}$ oder in $G_2 \backslash \{1\}$.

(ii) Aufeinanderfolgende Elemente g_i und g_{i+1} gehören nicht zur selben Gruppe.

Solche Wörter nennt man auch *reduzierte Wörter*; die einzelnen Elemente in einem Wort nennt man auch *Buchstaben*. Auf $G_1 * G_2$ kann man eine Gruppenstruktur definieren. Für die Gruppenoperation betrachtet man zunächst das zusammengesetzte Wort $(g_1 g_2 \cdots g_m)(h_1 h_2 \cdots h_n) = g_1 g_2 \cdots g_m h_1 h_2 \cdots h_n$. Falls darin g_m und h_1 zu derselben Gruppe G_i gehören, kombiniert man sie und erhält einen einzelnen Buchstaben $(g_m h_1)$. Falls $(g_m h_1)$ dem neutralen Element der Gruppe G_i entspricht, kann man es streichen und dieselbe Prozedur für die Elemente g_{m-1} und h_2 durchführen. Durch Indunktion erhält man auf diese Weise ein reduziertes Wort, also ein Element von $G_1 * G_2$. Weil diese Operation zudem assoziativ ist, ist sie eine wohldefinierte Gruppenoperation. Das leere Wort entspricht dann dem neutralen Element in $G_1 * G_2$, und das zum reduzierten Wort $g_1 g_2 \cdots g_m$ inverse reduzierte Wort ist $g_m^{-1} g_{m-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$.

Bemerkung 2.2.2. Zu zwei Gruppenhomomorphismen $\psi^1 : G_1 \longrightarrow H$ und $\psi^2 : G_2 \longrightarrow H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G_1 * G_2 \longrightarrow H$, der auf der Untergruppe G_1 bzw. G_2 mit ψ^1 bzw. ψ^2 übereinstimmt. Ist $g_1 g_2 \cdot \ldots \cdot g_m$ ein reduziertes Wort, so gilt

$$\psi(g_1 g_2 \cdots g_m) = \psi^{i_1}(g_1) \cdots \psi^{i_n}(g_n) \ (*),$$

wobei $g_k \in G_{i_k}$.

Satz 2.2.3. *Für freie Erzeugendensysteme E_1 und E_2 gilt $F_{E_1} * F_{E_2} \cong F_{E_1 \amalg E_2}$.*

Beweis Seien $E_1 = \{x_i | i \in I\}$ und $E_2 = \{y_j | j \in J\}$ für Indexmengen I und J. Weil $F_{E_1} * F_{E_2}$ aus allen reduzierten Wörtern der Form $g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_p h_p$ bzw. $g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_p h_p g_{p+1}$ besteht für beliebiges endliches $p \geq 0$ mit $g_i \in F_{E_1} \backslash \{1\}$ $(i = 1, \ldots, p+1)$ und $h_j \in F_{E_2} \backslash \{1\}$ $(j = 1, \ldots, p)$, ist klar, dass das Erzeugendensystem $E_1 \amalg E_2 = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ die Gruppe $F_{E_1} * F_{E_2}$ erzeugt, da mit den Elementen von $E_1 \amalg E_2$ jeder einzelne Buchstabe jedes reduzierten Wortes in $F_{E_1} * F_{E_2}$ erzeugt werden kann. Bleibt zu zeigen, dass $E_1 \amalg E_2$ frei ist. Dies ist aber klar, weil die x_i's untereinander nach

Voraussetzung keine spezielle Relation eingehen können, und dasselbe gilt für die y_j's. Zudem kann ein x_i nicht mit einem y_j eine spezielle Relation eingehen, da sie aus verschiedenen Gruppen stammen und nach Definition der Gruppenoperation im freien Produkt nicht miteinander verknüpfbar sind. □

2.3 Die Fundamentalgruppe

Notation und Konvention. Im Folgenden bezeichne $[0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall, und für zwei homotope Wege u und v mit gleichen Anfangs- und Endpunkten schreiben wir $u \simeq v \text{ rel}\{0,1\}$.

Definition 2.3.1. Unter einem *Raum mit Basispunkt* versteht man ein Paar (X, x_0), bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0 \in X$. Eine stetige *basispunkterhaltende* Abbildung $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$.

Definition 2.3.2 (Fundamentalgruppe)**.** Sei (X, x_0) ein topologischer Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$. Für einen Weg ω bezeichne $[\omega]$ die Homotopieklasse, in welcher ω liegt. Die Menge

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\omega] \mid \omega : [0,1] \longrightarrow X \text{ ist geschlossener Weg mit Angfangs- und Endpunkt } x_0\}$$

heisst die *Fundamentalgruppe* von X zum Basispunkt x_0.

Bemerkung 2.3.3. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist - wie der Name schon sagt - eine Gruppe bezüglich der Zusammenziehung von Homotopieklassen, die gegeben ist durch $[v] * [\omega] := [v * \omega]$ für v und ω geschlossene Wege in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0. Dies folgt daraus, dass die Zusammenziehung von Homotopieklassen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Homotopieklassen ist. Das neutrale Element ist die Homotopieklasse aller nullhomotopen geschlossenen Wege in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0, und das zu $[\omega]$ inverse Element ist $[\omega^{-1}]$, wobei $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$ ist. Die Assoziativität der Operation $*$ ist klar.

Satz 2.3.4. *Ist $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine stetige basispunkterhaltende Abbildung, so induziert f einen Gruppenhomomorphismus f_* von $\pi_1(X, x_0)$ nach $\pi_1(Y, y_0)$ durch*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), [u] \longmapsto [f \circ u] \textit{ für } [u] \in \pi_1(X, x_0).$$

Beweis Zunächst ist zu zeigen, dass $f \circ u : [0,1] \longrightarrow Y$ ein Weg in Y ist mit Anfangs- und Endpunkt y_0. Weil f und u stetige Funktionen sind, ist auch die Komposition $f \circ u$ eine stetige Funktion von $[0,1]$ nach Y. Zudem gilt $f \circ u(0) = f \circ u(1) = f(x_0) = y_0$. Also ist $f \circ u : [0,1] \longrightarrow Y$ ein Weg in Y mit Anfangs- und Endpunkt y_0.
Weiter gilt für zwei Wege u und v mit $u \cong v$ rel$\{0,1\}$, dass auch $f \circ u \cong f \circ v$ rel$\{0,1\}$, denn wenn h eine Homotopie von u nach v ist, dann ist $f \circ h$ eine Homotopie von $f \circ u$ nach $f \circ v$. Dies bedeutet, dass die Abbildung f_* von den Repräsentanten der Homotopieklassen unabhängig ist.
Darüber hinaus gilt $f_*([u] * [v]) = [f \circ (u * v)] = [(f \circ u) * (f \circ v)] = [(f \circ u)] * [(f \circ v)] = f_*([u]) * f_*([v])$. Deshalb ist f_* ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. $\square$

Notation und Konvention. Sei G eine Gruppe und E eine Teilmenge von G. Den Durschschnitt aller Normalteiler von G, die E enthalten, bezeichnen wir mit $\mathscr{N}(E)$.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Fundamentalgruppen in wegzusammenhängenden Räumen ist der Satz von Seifert und Van Kampen. Dazu betrachten wir nachstehende Diagramme, in welchen X ein topologischer Raum ist mit $X = U \cup V$. Es bezeichnen i, j, i' und j' die jeweiligen Inklusionen sowie i_*, j_*, i'_* und j'_* die davon induzierten Homomorphismen zwischen den Fundamentalgruppen.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\;i\;} & X \\ \uparrow{\scriptstyle i'} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ U \cap V & \xrightarrow{\;j'\;} & V, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{\;i_*\;} & \pi_1(X, x_0) \\ \uparrow{\scriptstyle i'_*} & & \uparrow{\scriptstyle j_*} \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{\;j'_*\;} & \pi_1(V, x_0). \end{array}$$

Satz 2.3.5 (Seifert und Van Kampen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und seien $U \subset X$ und $V \subset X$ offene Teilräume von X mit $X = U \cup V$. Weiter seien U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend. Dann gilt für $x_0 \in U \cap V$:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / \mathscr{N}(\{i'_*(\omega) \cdot j'_*(\omega)^{-1} \mid \omega \in \pi_1(U \cap V, x_0)\})$$

Beweis Siehe [1], Seiten 114 – 116 $\square$

3 CW-Räume

In diesem Abschnitt werden *CW-Räume* im Allgemeinen und Graphen im Speziellen betrachtet.

3.1 Definition und Charakterisierung der Topologie

Notation und Konvention. Im Folgenden bezeichnen $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ die n-dimensionale abgeschlossene, und $(D^n)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ die n-dimensionale offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1.1. Ein topologischer Raum e heisst *n-Zelle*, wenn er zu $(D^n)^\circ$ homöomorph ist.

Notation und Konvention. Da im weiteren Verlauf der Arbeit gleichzeitig mehrere Zellen der gleichen Dimension vorkommen werden, bezeichnen wir eine einzelne n-Zelle fortan mit e^n_α. Dabei gibt n die Dimension an und der Index α unterscheidet die Zelle von anderen n-Zellen. Aus technischen Gründen werden wir die zur Zelle e^n_α homöomorphe offene Einheitskugel $(D^n)^\circ$ mit $(D^n_\alpha)^\circ$ bezeichnen.

Definition 3.1.2. Sei $n \in \mathbb{N}$, X ein topologischer Raum, A eine Indexmenge und $\{e^n_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Menge von n-Zellen. Für jede Zelle $e^n_\alpha \in \{e^n_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sei $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir den Raum $Y := X \coprod_\alpha D^n_\alpha / \sim$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt gegeben ist:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \alpha \in A : x = \varphi_\alpha(y), \text{ für } y \in \coprod D^n_\alpha \text{ und } x \in X.$$

Bemerkung 3.1.3. Die Zelle e^n_α ist dann das homöomorphe Bild von $(D^n_\alpha)^\circ$ unter der Quotientenabbildung

$$\pi : Y + \Sigma_\alpha D^n_\alpha \longrightarrow Y \coprod_\alpha D^n_\alpha / \sim.$$

Anschaulich gesprochen entsteht Y dadurch, dass man n-Zellen an X anheftet. Die Abbildungen φ_α geben dabei an, wie genau die einzelnen n-Zellen D^n_α an X angeheftet werden.

Notation und Konvention. Definieren wir die Abbildung

$$\varphi : \coprod_{\alpha\in A} \partial D^n_\alpha \longrightarrow X, \text{ wobei } \varphi|_{\partial D^n_\alpha} = \varphi_\alpha \text{ für jedes } \alpha \in A,$$

so schreiben wir für Y auch $Y = X \bigcup_\varphi \coprod_{\alpha\in A} D^n_\alpha$. Die Abbildung φ nennt man auch *Verklebungsvorschrift.*

Definition 3.1.4. Ein *CW-Raum* ist ein topologischer Raum $X = \bigcup_{n=0}^\infty X_n$ mit folgenden Eigenschaften

(i) Die Menge X_0 ist eine diskrete Vereinigung von Punkten $p_0, p_1, p_2 \ldots$, das heisst für alle $i \neq j$ existieren offene Umgebungen U_i, U_j, von p_i, p_j mit $U_i \cap U_j = \varnothing$. Die Punkte p_i bilden die 0-Zellen von X.

(ii) X_{n+1} entsteht aus X_n durch das Anheften von $(n+1)$-Zellen $\{e_\alpha^{n+1}\}_{\alpha\in A}$, wobei A eine Indexmenge ist. Es gilt also $X_{n+1} = X_n \bigcup_\varphi \coprod_{\alpha\in A} D_\alpha^{n+1}$ für eine Verklebungsvorschrift φ.

(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap X_n \subset X_n$ abgeschlossen ist bezüglich der Quotiententopologie für alle n.

Die Zahl $n = \sup \{i; \exists\ i\text{-Zelle im CW-Raum}\}$ heisst die *Dimension* des CW-Raums.

Definition 3.1.5. Seien X ein CW-Raum und $e_\alpha^n \subset X$ eine Zelle. Dann heisst der Abschluss $\overline{e_\alpha^n}$ von e_α^n in X die *abgeschlossene Hülle von e_α^n in X*.

Bemerkung 3.1.6. Die Bezeichnung "CW" hat folgende Bedeutung: Der Buchstabe W steht für "weak topology", oder auf Deutsch "schwache Topologie". Dies ist die Bezeichnung für die in 3.1.4 (*iii*) beschriebene Topologie. Der Buchstabe C steht für "closure-finite", auf Deutsch "Hüllen-endlich". Dies bedeutet, dass die abgeschlossene Hülle einer im CW-Raum vorkommenden Zelle nur endlich viele andere Zellen trifft. Weil der Abschluss einer Zelle kompakt ist, wird mit Satz 3.2.2 folgen, dass ein CW-Raum tatsächlich Hüllen-endlich ist.

Definition 3.1.7. Die Abbildung $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \hookrightarrow X^n \hookrightarrow X$ heisst die *charakteristische Abbildung* der Zelle e_α^n. Dabei bildet Φ_α die offene Einheitskugel $D_\alpha^{\circ n}$ homöomorph auf e_α^n ab und auf dem Rand ∂D_α^n entspricht sie der Verklebungsvorschrift φ_α.

Bemerkung 3.1.8. Weil X_n die Quotiententopologie hat und X die schwache Topologie, ist Φ_α eine stetig Abbildung.

Bemerkung 3.1.9. Das Bild der zur Zelle e_α^n gehörigen char. Abbildung Φ_α ist gerade die abgeschlossene Hülle der Zelle e_α^n. Weil Φ_α stetig ist und der Definitionsbereich D_α^n kompakt ist, ist auch die Bildmenge, sprich die abgeschlossene Hülle der Zelle e_α^n, kompakt.

Satz 3.1.10. *Sei X ein CW-Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

$$\begin{gathered} A \textit{ ist offen (abgeschlossen) in } X \\ \Longleftrightarrow \\ \Phi_\alpha^{-1}(A) \textit{ ist offen (abgeschlossen) in } D_\alpha^n \textit{ für jede char. Abbildung } \Phi_\alpha \end{gathered}$$

Beweis Sei im Folgenden A offen (für A abgeschlossen geht der Beweis analog).
$\Rightarrow$: Folgt sofort aus der Stetigkeit der charakteristischen Abbildungen.

$\Leftarrow$: Angenommen, $\Phi_\alpha^{-1}(A)$ ist offen in D_α^n für jedes Φ_α. Wir beweisen mit Induktion, dass dann $A \cap X_n$ offen ist in X_n.
Induktionsverankerung: Für $n = 0$ ist $A \cap X_0$ eine diskrete Menge von Punkten, also insbesondere offen.
Induktionsschritt: Angenommen, $A \cap X_{n-1}$ sei offen in X_{n-1}. Der Raum X_n hat die Quotiententopologie. Die Projektionsabbildung

$$\pi : X_{n-1} + \Sigma_\alpha D_\alpha^n \longrightarrow X_{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n (= X_n)/\sim$$

wird gegeben durch $\pi(x) = id(x)$, für $x \in X_{n-1}$,und $\pi(x) = \Phi_\alpha(x)$, für $x \in D_\alpha^n$. Wegen der Induktionsvoraussetzung und weil $\Phi_\alpha^{-1}(A)$ offen ist in D_α^n für jedes Φ_α, ist nach Definition der Quotiententopologie $A \cap X_n$ offen in X_n. Weil dementsprechend $A \cap X_n$ offen ist in X_n für jedes n, ist A nach Definition der schwachen Topologie offen in X. □

3.2 Kompakte CW-Teilräume

Definition 3.2.1. Sei X ein CW-Raum. Ein Teilraum $Y \subset X$, der eine Vereinigung von Zellen von X ist, heisst CW-Teilraum, falls Y mit den in Y liegenden Zellen selbst ein CW-Raum ist. Wir sprechen von einem *kompakten CW-Teilraum*, wenn der CW-Teilraum als Menge kompakt ist.

Satz 3.2.2. *Jede kompakte Teilmenge C eines CW-Raums X trifft höchstens endlich viele Zellen von X.*

Beweis Weil X ein CW-Raum ist, können wir ihn als Zerlegung $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ schreiben, wobei der Raum X_{n+1} aus X_n durch das Anheften von $(n+1)$-Zellen entsteht. Wir beweisen den Satz nun durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe eine unendliche Menge $S = \{x_i | i \in I\} \subset C$ von Punkten, die alle in verschiedenen Zellen liegen. Mittels Induktion über die Teilräume X_n zeigen wir zunächst, dass S abgeschlossen ist in X.
Induktionsverankerung: Für $i = 0$ ist die Menge $S \cap X_0$ eine diskrete Menge von Punkten, also insbesondere abgeschlossen in X_0.
Induktionsschritt: Angenommen, die Menge $S \cap X_{n-1}$ sei abgeschlossen in X_{n-1}. Dann ist für jede n-Zelle e_α^n mit zugehöriger Verklebungsvorschrift φ_α die Menge $\varphi_\alpha^{-1}(S \cap X_{n-1})$ abgeschlossen in ∂D_α^n. In e_α^n kann höchstens ein Punkt x_α aus S liegen. Weil Φ_α die offene Einheitskugel $(D_\alpha^n)^\circ$ homöomorph auf die Zelle e_α^n abbildet und einpunktige Mengen abgeschlossen sind in D_α^n, ist folglich $\Phi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ abgeschlossen in D_α^n und damit auch x_α abgeschlossen in X_n (wegen Satz 3.1.10). Dasselbe gilt dann für $\varphi_\alpha^{-1}(S \cap X_{n-1}) \cup \Phi_\alpha^{-1}(x_j) = \Phi_\alpha^{-1}(S \cap X_n)$. Wegen Satz 3.1.10 heisst dies aber gerade, dass $S \cap X_n$ abgeschlossen ist in X_n. Nach Induktion gilt dies für alle n, also ist S abgeschlossen

in X.
Analog zeigt man, dass jede Teilmenge von S abgeschlossen ist in X. Also hat S die diskrete Topologie, d.h. jedes Element von S ist gleichzeitig offen und abgeschlossen. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge C ist S kompakt, also existiert für jede offene Überdeckung von S eine endliche Teilüberdeckung. Dies bedeutet aber gerade, dass S nur endlich viele Elemente hat - ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Satz 3.2.3. *Jeder kompakte CW-Teilraum W eines CW-Raumes X ist in einem endlichen CW-Teilraum enthalten.*

Beweis Der kompakte CW-Teilraum W ist eine kompakte Teilmenge von X. Damit trifft er nach Satz 3.2.2 nur endlich viele Zellen von X, ist also in einer endlichen Vereinigung von Zellen enthalten. Bleibt zu zeigen, dass eine endliche Vereinigung von Zellen in einem endlichen CW-Teilraum von X enthalten ist. Weil eine endliche Vereinigung von endlichen CW-Teilräumen wieder ein endlicher CW-Teilraum ist, genügt es zu zeigen, dass eine einzelne Zelle e^i_α in einem endlichen CW-Teilraum enthalten ist. Wir tun dies wiederum mittels Induktion.
Induktionsverankerung: Für $n = 0$ ist die Zelle e^0_α selbst ein endlicher CW-Komplex.
Induktionsschritt: Sei nach Induktionsvoraussetzung jede Zelle mit Dimension $\leq n-1$ in einem endlichen CW-Teilraum enthalten und sei e^n_α eine beliebige n-Zelle. Die zur Zelle e^n_α gehoerige Verklebungsabbildung ist φ_α. Weil ∂D^n_α kompakt und φ_α stetig ist, ist auch das Bild $\varphi_\alpha(\partial D^n_\alpha)$ kompakt und trifft damit nur endlich viele Zellen von X_{n-1}. Jede dieser getroffenen Zellen ist nach Induktionsvoraussetzung in einem endlichen CW-Teilraum enthalten, und weil die endliche Vereinigung von endlichen CW-Teilräumen wieder ein endlicher CW-Teilraum ist, ist $\varphi_\alpha(\partial D^n_\alpha)$ in einem endlichen CW-Raum A entalten. Somit ist die Zelle e^n_α im endlichen CW-Teilraum $A \cup e^n_\alpha$ enthalten. $\square$

Bemerkung 3.2.4. Sei X ein CW-Raum. Aus Satz 3.2.3 folgt dann, dass insbesondere ein in X verlaufender Weg und eine Homotopie in X jeweils in einem endlichen CW-Teilraum von X enthalten sind. Im Beweis von Satz 3.4.1 werden wir dies noch präzisieren.

3.3 Graphen

Definition 3.3.1 (Graph)**.** Ein CW-Raum X mit Dimension ≤ 1 heisst *Graph.* Die 0-Zellen, sprich die Punkte $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von X_0, heissen die *Ecken* des Graphen, die angehefteten 1-Zellen nennt man die *Kanten.*

Definition 3.3.2. Ein einfach zusammenhängender Graph heisst ein *Baum*. Ein CW-Teilraum eines Graphen X heisst ein *aufspannender Baum von G*, wenn er ein Baum ist und alle Ecken von G enthält.

Bemerkung 3.3.3. Ein Baum ist insbesondere zusammenziehbar.

Im Beweis von Satz 3.3.7 werden wir das *Zornsche Lemma* verwenden. Deswegen sei hier nochmals an seine Aussage erinnert.

Definition 3.3.4. Eine Menge M, auf der eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert ist, heisst *partiell geordnet*. Eine partiell geordnete Menge heisst *total geordnet*, wenn für je zwei Elemente $r, s \in M$ gilt $r \leq s$ oder $s \leq r$. Ist $S \subseteq M$ eine Teilmenge, so nennt man ein Element $m \in M$ eine *obere Schranke* von S, falls für alle $s \in S$ gilt $s \leq m$.

Satz 3.3.5 (Zornsches Lemma). *Es sei M eine nicht-leere partiell geordnete Menge mit Ordnungsrelation $\leq$, in der jede total geordnete Teilmenge S eine obere Schranke besitzt. Dann existiert in M ein maximales Element.*

Beweis Siehe [3]. □

Lemma 3.3.6. *Sei X ein zusammenhängender Graph und J eine nicht-leere total geordnete Indexmenge. Sei $W = \{B_i | i \in J\}$ eine Menge von in X entathaltenen Bäumen mit $B_i \subseteq B_j$ für $i \leq j$. Dann ist $\bigcup_{i \in J} B_i$ ein Baum.*

Beweis Sei α ein Zykel in $\bigcup_{i \in J} B_i$. Weil α als Zykel kompakt ist, folgt aus Satz 3.2.3, dass α in einem endlichen CW-Teilraum von X enthalten ist. Demzufolge finden wir einen Baum B_m mit $\alpha \in B_m$. Also haben wir einen Widerspruch, weil B_m nach Voraussetzung ein Baum ist. □

Satz 3.3.7. *Jeder zusammenhängende Graph X enthält einen aufspannenden Baum.*

Beweis Sei M die Menge aller Bäume in X. Es gilt $M \neq \emptyset$, weil ein Punkt ein Baum ist. Die Relation

$$B_1 \leq B_2 \Longleftrightarrow B_1 \subseteq B_2$$

mit $B_1 \in M$ und $B_2 \in M$ definiert eine Ordnungsrelation auf M. Jede total geordnete Teilmenge $\{B_i, i \in J\}$, wobei J eine Indexmenge ist, besitzt eine obere Schranke in M, nämlich $\bigcup_{i \in J} B_i$. Wegen Lemma 3.3.6 ist $\bigcup_{i \in J} B_i$ ein Baum und damit in M. Mit dem Zornschen Lemma folgt nun, dass M einen maximalen Baum B besitzt. Wir zeigen durch Widerspruch, dass B den Graphen X aufspannt.

Angenommen, es gibt eine Ecke $x \in X$, die nicht in B liegt. Ein zusammenhängender Graph ist auch wegzusammenhängend, also gibt es einen Weg $\omega : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) \in B$. Sei b die kleinste Zahl mit $\omega(b) \in B$ und sei a die grösste Zahl $< b$, für die $\omega(a)$ eine Ecke ausserhalb von B ist. Dann ist $\omega([a,b]) = \overline{e^1_\alpha}$ der Abschluss einer 1-Zelle e^1_α in X, und $B \cup \overline{e^1_\alpha}$ ist ein grösserer Baum als B, was der Maximalität von B widerspricht. □

Satz 3.3.8. *Die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden Graphen X ist frei.*

Beweis Weil X als zusammenhängender Graph auch wegzusammenhängend ist, hängt seine Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt ab. Sei B ein aufspannender Baum von X und $p_0 \in B$ unser Basispunkt. Die Existenz von B ist gesichert durch Satz 3.3.7. Sei nun I die Menge aller Kanten in X, die nicht in B liegen. Die Elemente von I sind "schuld", wenn es in X Zykel gibt und die Fundamentalgruppe von X nicht trivial ist.
Für jedes $e^1_{\alpha_i}$ bezeichne α_i einen Weg, der in p_0 startet, entlang des Baumes B zur Kante $e^1_{\alpha_i}$ führt, diese einmal durchläuft und entlang von B wieder zu p_0 zurückkehrt. Wir zeigen nun, dass $\pi_1(X, p_0)$ frei ist vom Rang n mit Erzeugendensystem $E^I := \{[\alpha_i] | e^1_{\alpha_i} \in I\}$. Dazu beweisen wir die Aussage für jedes $J \subset I$ mit dem zugehörigen Raum $X_J = B \cup \{\alpha_j | e^1_{\alpha_j} \in J\}$.
Sei zunächst J endlich, also $J = \{e^1_{\alpha_{i_1}}, \dots, e^1_{\alpha_{i_n}}\}$ mit Mächtigkeit $n \geq 0$. In diesem Fall können wir die Aussage mittels Induktion beweisen.
Induktionsverankerung: Ist $|J| = 0$, so ist J leer. Der Graph X_J besteht also nur aus dem aufspannenden Baum B und seine Fundamentalgruppe ist somit trivial, also frei erzeugt über der leeren Menge.
Ist $|J| > 0$, so sei nach Induktionsvoraussetzung $\pi_1(X_{J'}, p_0) \cong F_{E^{J'}}$ mit freiem Erzeugendensystem $E^{J'}$ für $J' = \{e^1_{\alpha_{i_1}}, \dots, e^1_{\alpha_{i_{n-1}}}\}$. Sei nun $x_j \in e^1_{\alpha_{i_j}}$ für $j = 1, \dots, n$. Definiere die Räume $U_1 = X_J \setminus \{x_n\}$ und $U_2 = X_J \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Es gilt $X_J = U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2 = X_J \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Der Teilraum U_1 ist homotopieäquivalent zu $X_{J'}$ (weil $X_{J'}$ starker Deformationsretrakt von U_1 ist), U_2 ist homotopieäquivalent zu α_n (weil α_n starker Deformationsretrakt von U_2 ist) und der Raum $U_1 \cap U_2$ ist einfach zusammenhängend. Weil zudem U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind, können wir den Satz von Seifert und van Kampen anwenden. Wir haben die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{i} & X_J \\ \uparrow{\scriptstyle i'} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{j'} & U_2, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X_J, p_0) \\ \uparrow{\scriptstyle i'_*} & & \uparrow{\scriptstyle j_*} \\ \pi_1(U_1 \cap U_2, p_0) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_1(U_2, p_0), \end{array}$$

wobei i, j, i' und j' die jeweiligen Inklusionen sowie i_*, j_*, i'_* und j'_* die davon induzierten Homomorphismen zwischen den Fundamentalgruppen bezeichnen. Mit dem Satz von Seiffert und van Kampen (2.3.5) folgt

$$\pi_1(X_J, p_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) / \mathscr{N}(\{i'_*(\omega) \cdot j'_*(\omega)^{-1} \mid \omega \in \pi_1(U_1 \cap U_2, p_0)\})$$

Es gilt $\pi_1(U_1 \cap U_2, p_0)$=1, also ist die einzige Äquivalenzklasse in $\pi_1(U_1 \cap U_2, p_0)$ die Klasse $\omega = [1]$. Weil i'_* sowie j'_* Gruppenhomomorphismen sind, gilt $i'_*(\omega) = j'_*(\omega) = 1$ und dementsprechend $\mathscr{N}(\{i'_*(\omega) \cdot j'_*(\omega)^{-1} \mid \omega \in \pi_1(U_1 \cap U_2, p_0)\}) = 1$. Also haben wir

$$\pi_1(X_J, p_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \underbrace{\cong}_{Ind.vor.} F_{E^{J'}} * F_{[\alpha_n]} \underbrace{\cong}_{Satz\ 2.2.3} F_{E^{J'} \amalg [\alpha_n]}.$$

Die Menge $E^J := E^{J'} \cup \{[\alpha_n]\} = \{[\alpha_{i_1}], \ldots, [\alpha_{i_n}]\}$ ist also ein freies Erzeugendensystem für $\pi_1(X_J, p_0)$.
Betrachten wir nun den Fall, in welchem $|J|$ nicht endlich ist. Sei $\omega : [0,1] \longrightarrow X$ ein geschlossener Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt p_0. Nach Satz 3.2.3 ist $\omega([0,1])$ in einem endlichen CW-Teilraum von X enthalten, also $\omega([0,1]) \subset X_K$ für $K \subset J$ mit $|K| < \infty$. Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass $\pi_1(X_K, p_0) \cong F_K$ ist mit freiem Erzeugendensystem $E^K = \{[\alpha_{j_1}], \ldots, [\alpha_{j_{|K|}}]\}$. Weil dies für jeden geschlossenen Weg ω in X mit Anfangs- und Enpunkt p_0 gilt, ist $E^J = \{[\alpha_i] | e^1_{\alpha_i} \in I\}$ ein Erzeugendensystem für $\pi_1(X, p_0)$. Bleibt zu zeigen, dass E^J frei ist.
Angenommen, es gibt zwischen Elementen von E^J eine spezielle Relation, so entspricht diese Relation einer Homotopie H zwischen zwei Wegen, von denen jeder für sich eine Hintereinanderschaltung von Elementen aus E^J ist. Weil aber $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ stetig und $[0,1] \times [0,1]$ kompakt ist, ist auch $H([0,1] \times [0,1])$ kompakt. Nach Satz 3.2.3 gilt damit wiederum $H([0,1] \times [0,1]) \subset X_{K'}$ für $K' \subset I$ mit $|K'| < \infty$. Demzufolge gilt die Relation schon in $\pi_1(X_{K'}, p_0)$ und muss nach dem ersten Teil des Beweises eine triviale Relation sein, also ist E^J frei. □

3.4 In einem Punkt vereinigte Schleifen

Notation und Konvention. Verklebt man die CW-Räume $X_1, \ldots, X_n$ in einer 0-Zelle, sprich in einem Punkt, so bezeichnen wir diese Einpunktvereinigung mit $X_1 \vee \ldots \vee X_n$.

Wir konstruieren nun einen speziellen Graphen. Zunächst bestehe dieser aus einer 0-Zelle, sprich aus einem Punkt x_0, also $X_0 = x_0$. Weiter sei M eine beliebige Indexmenge und $I = \{e^1_{\alpha_i} | i \in M\}$ eine Menge von 1-Zellen. Wir heften nun die 1-Zellen aus I mittels der Verklebungsvorschrift

$$\varphi_{\alpha_i} : \partial D^1_{\alpha_i} \longrightarrow X_0, x \longmapsto x_0$$

an x_0 an. Auf diese Weise erhalten wir einen Raum, der aus $|I|$-vielen in x_0 vereinigten Schleifen besteht. Wir bezeichnen diesen Raum mit X^I. Formal ausgedrückt:

$$X^I = \{x_0\} \bigcup_\varphi \coprod_{e^1_{\alpha_i} \in I} D^1_{\alpha_i},$$

mit $\varphi : \coprod_{e^1_{\alpha_i} \in I} \partial D^n_{\alpha_i} \longrightarrow X$, wobei $\varphi|_{\partial D^n_{\alpha_i}} = \varphi_{\alpha_i}$. Aus Konstruktionsgründen ist klar, dass X^I ein CW-Raum ist. Weil $(D^1_\alpha)^\circ \cup \{p_0\}$ homöomorph zu S_1 ist, können wir den Raum X^I auch als Einpunktvereinigung von $|I|$ Kreislinien auffassen. Bezeichnen wir die Kreislinien mit $S^1_1, S^1_2, \ldots S^1_{|I|}$,, so erhalten wir $X^I = S^1_1 \vee \ldots \vee S^1_{|I|}$.

Satz 3.4.1. *Sei M eine beliebige Indexmenge und $I = \{e^1_{\alpha_i} | i \in M\}$ eine Menge von 1-Zellen. Für jedes $e^1_{\alpha_i} \in I$ bezeichne α_i einen geschlossenen Weg in X^I, der in x_0 startet, $e^1_{\alpha_i}$ einmal durchläuft und nach x_0 zurückkehrt. Dann ist $\pi_1(X^I, x_0) \cong F_{E^I}$, wobei $E^I = \{[\alpha_i] | e^1_{\alpha_i} \in I\}$.*

Beweis Die Behauptung folgt direkt aus dem Beweis von Satz 3.3.8. Der Punkt p_0 ist ein aufspannender Baum B, also steht jede angeheftete Schleife für einen Zykel und damit ein Element der Menge aller Kanten, die nicht in B liegen. Es folgt (mit der Notation aus dem Beweis von Satz 3.3.8), dass

$$\pi_1(X^I, x_0) \cong \pi_1(X_I, p_0) \cong F_{E^I}.$$

□

4 Überlagerungen

Dieses Kapitel ist der Überlagerungstheorie gewidmet, wobei wir insbesondere an Überlagerungen des in Abschnitt 3.4 konstruierten Graphen X^I interessiert sind.

4.1 Definition und Hauptlemma

Definition 4.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Überlagerung* von X besteht aus einem topologischen Raum Y und einer stetigen Abbildung $p : Y \longrightarrow X$, so dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist die Vereinigung von offenen paarweise disjunkten Mengen $V_j \subset Y$ für $j \in J$, wobei J eine nichtleere Indexmenge ist.

(ii) Für alle $j \in J$ ist die eingeschränkte Abbildung $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ ein Homöomorphismus.

Die Abbildung p heisst *Projektion*, Y ist der *Überlagerungsraum* und X heisst der *Basisraum*. Für $x \in X$ heisst das Urbild $p^{-1}(x)$ die *Faser* über x. Aus der Definition der Überlagerung folgt, dass die Faser nicht leer ist, woraus sich wiederum ergibt, dass p surjektiv ist. Wenn die Räume Y und X wegzusammenhängend sind, sprechen wir von einer *wegzusammenhängenden Überlagerung.*

Definition 4.1.2. Sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung und $\omega : [0,1] \longrightarrow X$ ein Weg im Basisraum X. Ein Weg $\widetilde{\omega} : [0,1] \longrightarrow Y$ im Überlagerungsraum Y heisst eine *Liftung von* ω, wenn $p(\widetilde{\omega}(t)) = \omega(t)$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Das folgende fundamentale Theorem aus der Überlagerungstheorie zitieren wir ohne Beweis.

Satz 4.1.3 (Hauptlemmma der Überlagerungstheorie)**.** *Sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gilt:*

(i) Zu jedem Weg ω in X und zu jedem Punkt y über dem Anfangspunkt $\omega(0)$ von ω gibt es genau eine Liftung $\widetilde{\omega}$ von ω mit $\widetilde{\omega}(0) = y$. Diese Liftung heisst $L_p(\omega, y)$, die Liftung von ω bezüglich p mit Anfangspunkt y.

(ii) Homotope Wege liften sich in homotope Wege, d.h. ist $v \simeq \omega$ rel $\{0,1\}$ in X und ist y ein Punkt über $v(0) = \omega(0)$, so ist $L_p(v,y) \simeq L_p(\omega,y)$ rel $\{0,1\}$ in Y. Insbesondere haben die Liftungen $L_p(v,y)$ und $L_p(\omega,y)$ denselben Endpunkt.

Beweis Siehe [1], Seiten 151 – 154. □

Satz 4.1.4. *Sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung und y_0 ein Punkt über x_0. Dann gilt:*

(i) Der von der Projektion p induzierte Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.

(ii) Die Bildgruppe $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ besteht aus den Homotopieklassen $[w] \in \pi_1(X, x_0)$, für welche die Liftung $L_p(w, y_0)$ ein geschlossener Weg in Y ist.

Beweis (i) Seien $[\widetilde{v}] \in \pi_1(Y, y_0)$ und $[\widetilde{w}] \in \pi_1(Y, y_0)$ mit $p_*([\widetilde{v}]) = p_*([\widetilde{w}])$. Dann gilt $p \circ \widetilde{v} \simeq p \circ \widetilde{w}$ rel $\{0, 1\}$. Aus dem Hauptlemma 4.1.3 folgt, dass dann auch $\widetilde{v} \simeq \widetilde{w}$ rel $\{0, 1\}$, also $[\widetilde{v}] = [\widetilde{w}]$, ist. Daraus folgt, dass p_* injektiv ist.
(ii) Ist $\widetilde{w} = L_p(w, y_0)$ geschlossen, so liegt $[\widetilde{w}]$ in $\pi_1(Y, y_0)$ und $p_*([\widetilde{w}]) = [w]$. Somit liegt $[w]$ im Bild von p_*. Ist umgekehrt $[w] = p_*([\widetilde{w}])$, bedeutet dies, dass $w \simeq p \circ \widetilde{w}$ rel $\{0, 1\}$. Also gilt nach Satz 4.1.3 $L_p(w, y_0) \simeq L_p(p \circ \widetilde{w}, y_0)$ rel $\{0, 1\}$. Weil aber $L_p(p \circ w, y_0) = \widetilde{w}$ und damit auch $L_p(w, y_0) \simeq \widetilde{w}$ rel $\{0, 1\}$ gilt, ist $L_p(p \circ w, y_0)$ geschlossen, weil $\widetilde{w}$ geschlossen ist. [3] □

4.2 Überlagerung von Graphen

Satz 4.2.1. *Sei X^I der in Abschnitt 3.4 konstruierte Graph für eine beliebige Menge I von 1-Zellen. Sei $\pi_1(X^I, x_0)$ die Fundamentalgruppe von X^I und $H \subset \pi_1(X^I, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gibt es eine wegzusammenhängende Überlagerung $p : Y \longrightarrow X^I$ mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$, wobei y_0 ein Punkt über x_0 und Y ein wegzusammenhängender Graph ist.*

Beweis Mit der Notation aus Satz 3.4.1 wird die Fundamentalgruppe $\pi_1(X^I, x_0)$ frei erzeugt von der Menge $E^I = \{[\alpha_i] | e_{\alpha_i} \in I\}$, wobei $I = \{e^1_{\alpha_i} | i \in M\}$ für eine Indexmenge M. Der Raum X^I ist gegeben durch

$$X^I = \{p_0\} \bigcup\nolimits_\varphi \coprod\nolimits_{e^1_{\alpha_i} \in I} D^1_{\alpha_i}.$$

Defniniere nun $Y_0 = H \backslash F_I$, wobei $H \backslash F_I = \{H \cdot g | g \in F_I\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von F_I modulo H ist. Der Raum Y_0 hat dann die diskrete Topologie. An Y_0 kleben wir nun 1-Zellen und erhalten den Raum Y, der wie folgt definiert ist:

$$Y = Y_0 \bigcup\nolimits_\psi \coprod\nolimits_{(e^1_{\alpha_i} \in I, y \in Y_0)} D^1_{(\alpha_i, y)},$$

wobei die Verklebungsabbildungen

$$\psi_{(\alpha_i, y)} : \partial D_{(\alpha_i, y)} \longrightarrow X$$

gegeben sind durch

$$\psi_{(\alpha_i, y)}(0) = y,\ \psi_{(\alpha_i, y)}(1) = y \cdot \alpha_i.$$

Nach Konstruktion ist Y ein Graph. Jede Linksnebenklasse ist von der Form $H \cdot [\alpha_{i_1}]^{n_1} \cdot \ldots \cdot [\alpha_k]^{n_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ und $[\alpha_{i_1}], \ldots, [\alpha_{i_n}] \in E^I$. Demzufolge kann jede Nebenklasse von H aus erreicht werden, also ist Y zusammenhängend.

Betrachte die Abbildung $p : Y \longrightarrow X^I$, welche die 1-Zellen $D^1_{(\alpha_i,y)}$ für $y \in Y$, identisch auf $D^1_{\alpha_i}$ abbildet. Wir behaupten, dass p eine Überlagerung ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $p : Y \longrightarrow X^I$ die Punkte (i) und (ii) aus Definition 4.1.1 erfüllt. Um Punkt (i) zu zeigen, machen wir eine Fallunterscheidung:

(1) Sei x ein Punkt im Innern einer Zelle $e^1_{\alpha_i}$. Dann ist $e^1_{\alpha_i}$ eine offene Umgebung von x. Das Urbild von $e^1_{\alpha_i}$ ist $p^{-1}(e^1_{\alpha_i}) = \coprod_{y \in Y_0} e^1_{(\alpha_i,y)}$, also insbesondere eine Vereinigung von paarweise disjunkten offenen Mengen.

(2) Betrachten wir nun den Fall $x = x_0$. Seien $U_{\alpha_i} \subset e^1_{\alpha_i}$ und $V_{\alpha_i} \subset e^1_{\alpha_i}$ disjunkte offene Mengen mit $\overline{U}_{\alpha_i} \cap \overline{V}_{\alpha_i} = x_0$. Weil X^I die Quotiententopologie hat, ist $W := \bigcup_{e^1_{\alpha_i} \in I}(U_{\alpha_i} \cup V_{\alpha_i}) \cup x_0$ eine offene Umgebung von x_0. Wir bezeichnen mit $U_{(\alpha_i,y)} \subset p^{-1}(U_{\alpha_i})$ diejenige offene Teilmenge des Urbilds von U_{α_i}, welche in $e^1_{(\alpha_i,y)}$ liegt. Auf analoge Weise definiert man die Mengen $V_{(\alpha_i,y)}$. Das Urbild von W ist dann $p^{-1}(W) = \coprod_{y \in Y_0}(\bigcup_{e^1_{\alpha_i} \in I}(V_{\alpha_i, y \cdot \alpha_i^{-1}} \cup U_{\alpha_i, y \cdot \alpha_i}))$, also insbesondere eine Vereinigung von disjunkten offenen Mengen.

Punkt (ii) aus Definition 4.1.1 ist aufgrund der Definition von p und der Wahl der Umgebungen trivialerweise erfüllt.
Bleibt zu zeigen, dass $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$ für ein $y_0 \in Y_0$. Wähle dazu $y_0 = H$. Wegen Satz 4.1.4 ist p_* ein Isomorphismus von $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Menge aller Homotopieklassen $[w] \in \pi_1(X^I, x_0)$, für welche die Liftung $L_p(w, y_0)$ ein geschlossener Weg in Y ist. Die Liftung $L_p(w, y_0)$ von $[w] \in \pi_1(X^I, x_0)$ ist aber genau dann ein geschlossener Weg an $y_0 = H$, wenn $H \cdot (L_p(w, y_0)) = H$ gilt, also wenn $L_p(w, y_0) \in H$. Nach Konstruktion der Überlagerung ist $L_p(w, y_0) \in H$ gleichbedeutend mit $[w] \in H$. Dementsprechend gilt $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$. □

5 Untergruppen freier Gruppen

Wir sind nun soweit, dass wir das Kerntheorem dieser Arbeit beweisen können.

Theorem. *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

Beweis Sei F_E eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem E sowie $H \subset F$ eine Untergruppe. Wir betrachten nun den in Abschnitt 3.4 konstruierten Graphen X^I mit $|I| = |E|$. Mit Satz 3.4.1 und der dort verwendeten Notation folgt $\pi_1(X^I, x_0) \cong F_{E^I}$. Weil $|E^I| = |I| = |E|$, folgt mit dem

Satz 2.1.15 (i), dass $\pi_1(X^I, x_0) \cong F_E$. Mit Satz 4.2.1 erhalten wir eine Überlagerung $p : Y \longrightarrow X^I$ mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$, wobei Y ein zusammenhängender Graph ist. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ ist nach Satz 3.3.8 frei. Weil p_* nach Satz 4.1.4 injektiv ist, ist p_* ein Isomorphismus auf sein Bild, dementsprechend gilt $\pi_1(Y, y_0) \cong H$. Also ist auch H frei. $\square$

Literatur

[1] Ralph Stöcker, Heiner Zieschang: *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988

[2] Allen Hatcher: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005

[3] P.J. Cohen: *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, 1966

[4] Klaus Jänich: *Topologie*, Springer-Verlag, Regenbsburg, 1980