

ETH ZÜRICH

BACHELORARBEIT

Monaden und der Satz von Beck

K. S. Bäuerle

betreut durch
Prof. Dr. Richard PINK

15. Oktober 2017

Vorbemerkungen

Einleitung

Bei dieser Arbeit handelt es sich um eine Einführung in die kategorientheoretischen Begriffe *Monade* und *monadischer Funktor* sowie den wichtigen zugehörigen Beckschen Monadizitätssatz.

Monaden sind ungeheuer vielseitig und treten in den verschiedensten Gebieten auf. Eine erste unvollständige Liste möglicher solcher Gebiete könnte wie folgt aussehen:

1. Informatik: Monaden, insbesondere in Haskell¹,
2. Kategorientheoretische Formulierung der Universellen Algebra², insbesondere Operadentheorie (Kofferwort aus „Operation“ und „Monade“),
3. Homologische Algebra und Simplicialobjekte³,
4. Linguistik⁴,
5. Monadischer Abstieg,
6. Topostheorie und Prätopoi,
7. Adjunktionen,
8. Kategorielle Logik.

Es folgt ein kurzer Überblick über den Inhalt dieser Arbeit.

Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine *Monade* T ist ein Tripel (\mathcal{T}, μ, η) bestehend aus einem Endofunktor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürlichen Transformationen $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ und $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}$, sodass gilt:

1. $\mu \circ \mu\mathcal{T} = \mu \circ \mathcal{T}\mu$,
2. $\mu \circ \eta\mathcal{T} = \mu \circ \mathcal{T}\eta = \mathbf{id}_{\mathcal{T}}$.

Stellen wir uns μ als „Multiplikation“ und η als „Einheit“ vor, so sind dies Analoga der bekannten Assoziativitäts- und Einheitsgesetze.

Bisweilen bezeichnet man auch den Endofunktor einer Monade selbst als Monade.

Für eine Monade $T = (\mathcal{T}, \mu, \eta)$ lässt sich die Kategorie ihrer Algebren definieren: Eine *T-Algebra* ist dabei ein Paar (A, a) bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{C}$ und einem Morphismus $a : \mathcal{T}A \rightarrow A$ aus \mathcal{C} . Mit der natürlichen Weise, Morphismen von Algebren zu definieren, ist also eine Kategorie, die so genannte *Eilenberg-Moore-Kategorie* \mathcal{C}^T , gegeben.

¹Siehe Kapitel 9 aus *A Gentle Introduction to Haskell*, <https://www.haskell.org/tutorial/monads.html>, zuletzt abgerufen am 02.07.2017. Eine Diskussion der theoretischen Bedeutung findet sich in [Meu97].

²Siehe [HP07].

³Siehe [SCS⁺16].

⁴Siehe [Asu14].

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Adjunktionen und Monaden: Mit den Zuordnungen auf Objekten $\mathcal{G}^T : (A, a) \mapsto A$ sowie $\mathcal{F}^T : A \mapsto (\mathcal{T}A, \mu_A)$ und den natürlichen Wahlen für Morphismen erhalten wir adjungierte Funktoren. Umgekehrt gilt: Ist $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zu $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ linksadjungiert, so ist $\mathcal{T} := \mathcal{G}\mathcal{F}$ auf natürliche Weise eine Monade (wobei wir die natürlichen Transformationen noch angeben müssten).

Fixiere nun eine Adjunktion \mathcal{F}, \mathcal{G} ein adjungiertes Funktorpaar wie zuvor. Sei T die zugehörige Monade. Dann gibt es einen eindeutigen Funktor $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$, sodass $\mathcal{G}^T \circ \Phi = \mathcal{G}$ und $\Phi \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^T$ sind. Ist dieser so genannte *Vergleichsfunktor* Φ eine Kategorienäquivalenz, so bezeichnen wir den Funktor \mathcal{G} als *monadisch*.

Der Satz von Beck charakterisiert monadische Funktoren durch die *Beck-Bedingungen*:

Satz (Beck). Ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ist monadisch genau dann, wenn alle der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert ein zu \mathcal{G} linksadjungierter Funktor.
2. Der Funktor \mathcal{G} reflektiert Isomorphismen.
3. Die Kategorie \mathcal{D} besitzt Differenzkokerne von \mathcal{G} -gespaltenen Paaren und \mathcal{G} erhält diese.

Wir entwickeln die notwendige Theorie, um diesen Satz zu verstehen und beweisen. Dies wird den Hauptteil dieser Arbeit ausmachen. Abschließend geben wir einige Beispiele:

Beispiel. Die üblichen Vergissfunktoren der algebraischen Strukturen **GRP**, **RINGS**, **MOD(R)** in die Kategorie der Mengen **SET** sind monadisch.

Beispiel. Der übliche Vergissfunktor der Kategorie der kompakten Hausdorffräume **CPTHAUS** \rightarrow **SET** ist monadisch.

Beispiel. Der übliche Vergissfunktor der Kategorie der topologischen Räume **TOP** \rightarrow **SET** ist nicht monadisch.

Beispiel. Es existiert kein monadischer Funktor von der Kategorie der kleinen Kategorien **CAT** nach **SET**.⁵

Beispiel. Es existiert ein monadischer Funktor **CAT** \rightarrow **GRPH**, wobei **GRPH** die Kategorie der Graphen bezeichnet. Außerdem existiert ein monadischer Funktor **GRPH** \rightarrow **SET**.⁶ Monadizität bleibt also nicht unter Komposition erhalten.

Aufbau

In Abschnitt 1 geben wir Charakterisierungen von Adjunktionen einmal durch die bekannte natürliche Kollektion von Bijektionen $Hom(\mathcal{F}X, Y) \rightarrow Hom(X, \mathcal{G}Y)$ und einmal durch gewisse

⁵[BW05, 4.7. Corollary, S. 106].

⁶[BW05, 106-107].

natürliche Transformationen $\eta : \mathbf{id} \rightarrow \mathcal{GF}$, der so genannten Einheit, und $\epsilon : \mathcal{FG} \rightarrow \mathbf{id}$, der so genannten Koeinheit. Letztere Charakterisierung wird sich als nützlich herausstellen.

In Abschnitt 2 führen wir das Konzept von Monaden und ihren Algebren ein und geben einige Beispiele. Wir betrachten das Verhältnis von Monaden und Adjunktionen - jede Adjunktion induziert eine Monade und umgekehrt. Außerdem führen wir den Eilenberg-Moore Vergleichsfunktor und den Begriff eines monadischen Funktors ein.

In Abschnitt 3 wiederholen wir den Begriff von Differenz(ko)kernen kurz und führen via Funktoren aufgespaltene parallele Paare ein.

In Abschnitt 4 formulieren wir den Hauptsatz dieser Arbeit: Den Beckschen Monadizitätssatz.

In Abschnitt 5 wird der Satz bewiesen.

In Abschnitt 6 behandeln wir schließlich Anwendungen und weiterführende Konzepte. Idealerweise wird der Leser im Anschluss an die Lektüre unter anderem davon überzeugt sein, dass sich die Beschäftigung mit dem Beckschen Monadizitätssatz und den zugehörigen Konzepten lohnt. Einige angesprochene Themen: Die Kategorie kompakter Hausdorffräume ist ein Prätopos; jede Kategorie \mathcal{D} mit einem monadischen Funktor $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ in eine reguläre bzw. Barr-exakte Kategorie \mathcal{C} ist regulär bzw. Barr-exakt; es gibt eine natürliche Weise, topologischen Abstieg auf allgemeineren Kategorien zu definieren.

In Anhang A werden freie Objekte und Kommakategorien diskutiert; letztere sind von Belang in Abschnitt 6.

Sonstiges: Quellen, Konventionen, Voraussetzungen

In dieser Arbeit folgen wir in erster Linie den Werken von Saunders Mac Lane [ML78] sowie Michael Barr und Charles Wells [BW05]. Sofern nicht näher angegeben, ist eines dieser beiden Bücher die Referenz oder es handelt sich um mathematische Folklore.

Diese Arbeit verwendet Fußnoten, folgt aber der Konvention, keine für die Lektüre notwendige Information in Fußnoten unterzubringen; der Leser möge sie also guten Gewissens überspringen. Fußnoten dienen ausschließlich der platzsparenden Angabe von Quellen und Verweisen, wo es aus verschiedenen Gründen nicht angemessen erschienen wäre, sie im Fließtext unterzubringen.

Bei der Notation von Kategorien folgen wir Martin Brandenburgs *Kategorientheorie* [Bra16] und bezeichnen die Kollektion aller Morphismen einer Kategorie \mathcal{C} stets mit $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ — dabei implizieren wir mit dieser Bezeichnung nicht, dass es sich um Homomorphismen handeln würde; es ist schlicht die übliche Konvention.

Grundsätzlich setzen wir in dieser Arbeit, neben einem mathematischen Bildungsstand wie er etwa dem fünften oder sechsten Studiensemester entsprechen dürfte, eine Familiarität mit grundlegenden Begriffen der Kategorientheorie, insbesondere Adjunktionen, (Ko)Kegel, Dif-

ferenz(ko)kerne und dergleichen voraus, jedoch keine tieferen theoretischen Resultate über dieselben.

Inhaltsverzeichnis

1. Adjunktionen	1
1.1. Definition des Begriffs	1
1.2. Einheit und Koeinheit	1
2. Monaden und Monadische Funktoren	6
2.1. Monaden	6
2.2. T -Algebren	7
2.3. Das Verhältnis von Adjunktionen und Monaden	10
2.4. Der Eilenberg-Moore-Vergleichsfunktor	13
2.5. Einige abschließende Beispiele	14
3. Gespaltene Differenzkokerne	17
3.1. Vorbemerkung	17
3.2. Parallele Paare und Differenzkokerne	17
3.3. Spaltende und gespaltene Differenzkernpaare	18
4. Der Becksche Monadizitätssatz	20
5. Beweis des Satzes	21
5.1. Monadizität impliziert Beck-Bedingungen	21
5.2. Beck-Bedingungen implizieren Monadizität	21
6. Ausblick und einige Anwendungen	28
6.1. Vorbemerkung	28
6.2. Das kanonische Gegenbeispiel	28
6.3. Kompakte Hausdorffräume und Prätopoi	28
6.4. Abstieg	33
A. Freie Objekte und Kommakategorien	38

1. Adjunktionen

1.1. Definition des Begriffs

Definition 1.1.1 (Adjunktion). Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Eine *Adjunktion* ist ein Tripel $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sind Funktoren, kurz: $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{\mathcal{G}} \end{array} \mathcal{D}$.

2. Mit φ ist eine in $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ natürliche Kollektion von Bijektionen

$$\varphi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D),$$

gegeben.

Notation: Für eine solche Adjunktion schreiben wir $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Definition 1.1.2. Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Falls eine Adjunktion $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ existiert, so heißt \mathcal{F} zu \mathcal{G} *linksadjungiert* und \mathcal{G} zu \mathcal{F} *rechtsadjungiert* und wir schreiben auch kurz $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

1.2. Einheit und Koeinheit

Jede Adjunktion $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induziert natürliche Transformationen $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ sowie $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$, die sich als nützlich herausstellen werden, um Adjunktionen zu charakterisieren. Die Konstruktion geschieht wie folgt:

Konstruktion 1.2.1. Für fixiertes $C \in \mathcal{C}$ können wir $D := \mathcal{F}C$ wählen. Damit haben wir nach Definition von Adjunktionen eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}C) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}\mathcal{F}C) \\ \mathbf{id}_{\mathcal{F}C} &\mapsto \varphi_{C, \mathcal{F}C}(\mathbf{id}_{\mathcal{F}C}) =: \eta_C \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für jedes $C \in \mathcal{C}$ einen Morphismus $\eta_C : C \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}C$.

Wählen wir stattdessen ein beliebiges Objekt $D \in \mathcal{D}$ und setzen $C := \mathcal{G}D$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}D, \mathcal{G}D) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}D, D) \\ \mathbf{id}_{\mathcal{G}D} &\mapsto \varphi_{\mathcal{G}D, D}^{-1}(\mathbf{id}_{\mathcal{G}D}) =: \epsilon_D. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2. Mit den in Konstruktion 1.2.1 definierten Zuordnungen η_C sowie ϵ_D sind natürliche Transformationen $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ sowie $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$ gegeben.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für η . Die Aussage für ϵ folgt analog.

Seien $C, C' \in \mathcal{C}$ sowie $D, D' \in \mathcal{D}$ Objekte. Seien $f : C \rightarrow C'$ sowie $g : D \rightarrow D'$ Morphismen. Natürlichkeit in (C, D) der Bijektionen $\varphi_{C,D}$ ist nach [Bra16, Satz 3.4.11] äquivalent zu Natürlichkeit in beiden Variablen. Die Natürlichkeit von φ bedeutet also die Kommutativität der folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D) \\ g_* \downarrow & & \downarrow (\mathcal{G}g)_* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D') & \xrightarrow{\varphi_{C,D'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D) \\ (\mathcal{F}f)^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C', D) & \xrightarrow{\varphi_{C',D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', \mathcal{G}D) \end{array}$$

Bezeichne das linke Diagramm mit (L) , das rechte mit (R) .

Um zu zeigen, dass η eine natürliche Transformation ist, müssen wir zeigen, dass für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{id}_{\mathcal{C}}(X) & \xlongequal{\quad} & X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \\ \mathbf{id}_{\mathcal{C}}(f) \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \mathcal{G}\mathcal{F}f \\ \mathbf{id}_{\mathcal{C}}(Y) & \xlongequal{\quad} & Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \end{array}$$

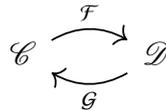
Also müssen wir zeigen, dass $\mathcal{G}\mathcal{F}f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$ ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{F}(f) \circ \eta_X &= (\mathcal{G}(\mathcal{F}f))_*(\eta_X) \\ &= (\mathcal{G}(\mathcal{F}f))_*(\varphi_{X,\mathcal{F}X}(\mathbf{id}_{\mathcal{F}X})) \\ &= \varphi_{X,\mathcal{F}Y}(\mathcal{F}(f) \circ \mathbf{id}_{\mathcal{F}X}) && (L) \text{ für } g := \mathcal{F}f, D := \mathcal{F}X, D' := \mathcal{F}Y. \\ &= \varphi_{X,\mathcal{F}Y}(\mathcal{F}(f)) \\ &= \varphi_{X,\mathcal{F}Y}(\mathbf{id}_{\mathcal{F}Y} \circ \mathcal{F}(f)) \\ &= \varphi_{X,\mathcal{F}Y} \circ \mathcal{F}(f)_*(\mathbf{id}_{\mathcal{F}Y}) \\ &= (f^* \circ \varphi_{Y,\mathcal{F}Y})(\mathbf{id}_{\mathcal{F}Y}) && (R) \\ &= \eta_Y \circ f. \end{aligned}$$

□

Definition 1.2.3 (Einheit und Koeinheit). Die Transformation η bezeichnen wir als *Einheit*, die Transformation ϵ als *Koeinheit* der Adjunktion.

Satz 1.2.4. Seien Funktoren der Form



gegeben.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent⁷:

1. \mathcal{F} ist zu \mathcal{G} linksadjungiert.
2. Es gibt natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} &\rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F} \\ \epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} &\rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}, \end{aligned}$$

sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \circ \mathbf{id}_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\mathcal{F}\eta} & \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow \epsilon \circ \mathcal{F} \\ & & \mathbf{id}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{G} & \xrightarrow{\eta \circ \mathcal{G}} & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G} \\ & \searrow & \downarrow \mathcal{G}\epsilon \\ & & \mathcal{G} \circ \mathbf{id}_{\mathcal{D}} \end{array}$$

Bevor wir zum Beweis kommen, führen wir folgende Terminologie ein:

Definition 1.2.5. Für natürliche Transformationen, für welche die Diagramme aus 2. kommutieren, sagen wir, dass sie die *Dreiecksidentitäten* für \mathcal{F} und \mathcal{G} erfüllen.

Wir konnten bereits zeigen, dass eine Adjunktion uns mit Einheit und Koeinheit natürliche Transformationen wie in 2. liefert. Es ist leicht, zu prüfen, dass diese die gegebenen Diagramme erfüllen. Daher würde es für einen Beweis von Satz 1.2.4 genügen, die Umkehrrichtung zu zeigen. Tatsächlich können wir die Äquivalenzen bedeutend einfacher gleich für beide Richtungen zeigen, indem wir das Yoneda-Lemma benutzen:

Lemma 1.2.6 (Yoneda-Lemma⁸). Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SET}$ ein Funktor. Dann gibt es eine in \mathcal{F} und A natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, -), \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}A,$$

wobei das erste Hom als Kollektion der natürlichen Transformationen von $\mathrm{Hom}(A, -)$ nach \mathcal{F} zu lesen ist.

Beweis. Siehe [Bra16, 108-109]. □

Korollar 1.2.7. Seien A, B Objekte in einer Kategorie \mathcal{C} , sodass $\mathrm{Hom}(A, -) \cong \mathrm{Hom}(B, -)$. Dann ist bereits $A \cong B$.

Beweisidee. Verwende das Yoneda-Lemma mit $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}(B, -)$. □

Korollar 1.2.8. Sei $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Adjunktion. Dann erhält \mathcal{F} alle existierenden Kolimits und \mathcal{G} erhält alle existierenden Limits.

⁷Nach der Charakterisierung von Adjunktionen aus [Bra16, 194-196].

⁸Als Yoneda-Lemma I ist dies Lemma 5.2.5 aus [Bra16, 109]

Beweis. Der Hom-Funktor als Funktor $\text{Hom} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SET}$ erhält Limits in beiden Argumenten. Limits in \mathcal{C}^{op} entsprechen Kolimits in \mathcal{C} . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, \mathcal{G}(\lim(B_i))) &\cong \text{Hom}(\mathcal{F}A, \lim(B_i)) \\ &\cong \lim(\text{Hom}(\mathcal{F}A, B_i)) \\ &\cong \lim(\text{Hom}(A, \mathcal{G}(B_i))) \\ &\cong \text{Hom}(A, \lim(\mathcal{G}(B_i))) \end{aligned}$$

Wegen Korollar 1.2.7 ist die Aussage damit gezeigt. Man rechne analog für Kolimits. \square

Damit sind wir nun gerüstet, Satz 1.2.4 zu beweisen.

Beweis des Satzes 1.2.4. Wir folgen dem Beweis, wie er in [Bra16, 195 f.] zu finden ist und zeigen zunächst, dass eine Kollektion natürlicher Abbildungen $\varphi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D)$ (wie in der Definition von Adjunktionen; nur, dass wir noch nicht verlangen, dass es sich um Bijektionen handelt!) natürlichen Transformationen $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ und $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$ entspricht: Die Natürlichkeit von φ ist äquivalent zur separaten Natürlichkeit in beiden Variablen. Betrachte also

$$\varphi_{C,-} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}-).$$

Mit dem Yoneda-Lemma für $\text{Hom}(C, \mathcal{G}(-))$ und $\mathcal{F}C$ erhalten wir die natürliche Bijektion $\text{Hom}(\text{Hom}(\mathcal{F}C, -), \text{Hom}(C, \mathcal{G}(-))) \cong \text{Hom}(C, \mathcal{G}\mathcal{F}C)$. Also entspricht die natürliche Transformation $\varphi_{C,-}$ einem Morphismus $\eta_C : C \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}C$.

Sammeln wir alle η_C in der Kollektion η , so ist $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ wegen der Natürlichkeit des Yoneda-Isomorphismus genau dann eine natürliche Transformation, wenn die Kollektion $\{\varphi_{C,-} | C \in \mathcal{C}\}$ natürlich in C ist.

Letzteres wiederum bedeutet, dass, wenn wir $\text{Hom}(\mathcal{F}(-), -)$ als Funktor $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{SET}$ betrachten, ein Morphismus von Funktoren $\text{Hom}(\mathcal{F}(-), -) \rightarrow \text{Hom}(-, \mathcal{G}(-))$ also einer solchen natürlichen Transformation $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ entspricht. Beachte bei alledem, dass die Entsprechung es zulässt, in die andere Richtung zu gehen: Wir können also mit einer natürlichen Transformation η beginnen und erhalten einen Morphismus von Funktoren $\text{Hom}(\mathcal{F}(-), -) \rightarrow \text{Hom}(-, \mathcal{G}(-))$ bis hin zu einer Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D)$.

Mit dem gleichen Vorgehen können wir statt $\varphi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D)$ Abbildungen $\psi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, D)$ betrachten. Folgen wir ganz analog dem vorangegangenen Argument, so entspricht dann ein Morphismus von Funktoren $\text{Hom}(-, \mathcal{G}(-)) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}(-), -)$ einer natürlichen Transformation $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$.

Damit ist der erste Schritt abgeschlossen. Nun ist zu zeigen, dass die beiden Dreiecksidentitäten für η und ϵ genau der Bedingung entsprechen, dass es sich bei φ nicht nur um eine beliebige natürliche Kollektion, sondern sogar um Bijektionen handelt.

Die Abbildungen $\varphi_{C,D}$ und $\psi_{C,D}$ erfüllen $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \mathbf{id}$ für alle C und D wegen der Natürlichkeit genau dann, wenn die Komposition der zugehörigen Morphismen von Funktoren $\text{Hom}(\mathcal{F}(-), -) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}(-), -)$ die Identität ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(\mathcal{F}(-), -) & \xrightarrow{\text{id}} & \text{Hom}(\mathcal{F}(-), -) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \text{Hom}(-, \mathcal{G}(-)) &
 \end{array}$$

Nach dem Yoneda-Lemma entspricht der Morphismus $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(-), -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(-), -)$ gerade einem Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ und ersterer ist die Identität genau dann, wenn es letzterer ist. Aber nach Konstruktion ist $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ gerade $(\epsilon\mathcal{F}) \circ (\mathcal{F}\eta)$. Damit haben wir unsere Entsprechung der ersten Dreiecksidentität, die zweite folgt analog für die umgekehrte Komposition. \square

2. Monaden und Monadische Funktoren

2.1. Monaden

Definition 2.1.1 (Monade). Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine *Monade* T der Kategorie \mathcal{C} ist ein Tripel (\mathcal{T}, η, μ) bestehend aus einem Endofunktor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürlichen Transformationen $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}$ sowie $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, sodass die folgenden Diagramme kommutieren.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}^3 & \xrightarrow{\mu\mathcal{T}} & \mathcal{T}^2 \\
 \mathcal{T}\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \mathcal{T}^2 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{T}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\eta\mathcal{T}} & \mathcal{T}^2 & \xleftarrow{\mathcal{T}\eta} & \mathcal{T} \\
 \text{id}_{\mathcal{T}} \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \text{id}_{\mathcal{T}} \\
 & & \mathcal{T} & &
 \end{array}$$

Notation: Die natürlichen Transformationen $\mu\mathcal{T}, \mathcal{T}\mu : \mathcal{T}^3 \rightarrow \mathcal{T}^2$ sind die üblichen Kompositionen von Funktoren und natürlichen Transformationen. Das heißt: Für alle $X \in \mathcal{C}$ ist $(\mu\mathcal{T})_X = \mu_{\mathcal{T}(X)}$ und es ist $(\mathcal{T}\mu)_X = \mathcal{T}(\mu_X)$. Für längere Ausdrücke schreiben wir der besseren Lesbarkeit halber wie üblich auch $\mathcal{T} \cdot \mu$ oder $\mu \cdot \mathcal{T}$.

Definition 2.1.2. Die obigen Diagramme bezeichnen wir als *Monadendiagramme*. Das linke Diagramm wird als *Assoziativitätsquadrat* bezeichnet; die beiden Dreiecke des rechten nennen wir *Einheitsdreiecke*.

Die Monadendiagramme verallgemeinern eine uns bekannte Struktur, wie die folgende Konstruktion zeigt:

Konstruktion 2.1.3 (Monade eines Monoids). Man betrachte ein Monoid $\mathbf{M} = (M, \cdot, 1_M)$. Definiere den Endofunktor \mathcal{T} via

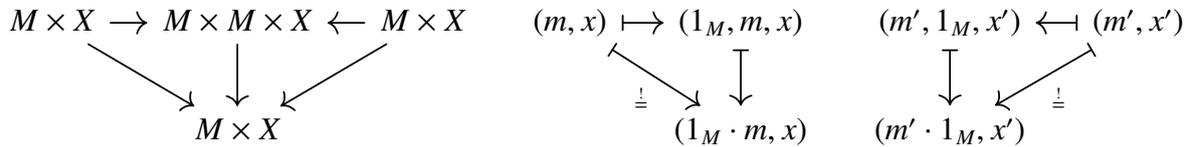
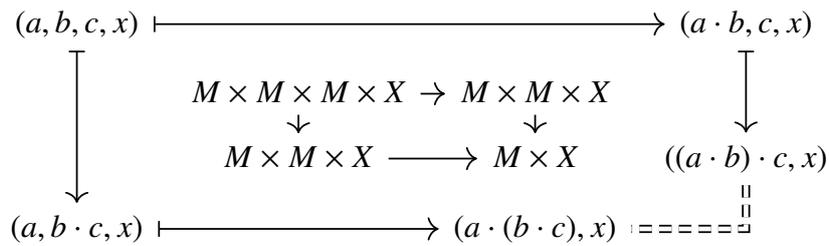
$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} : \mathbf{SET} &\rightarrow \mathbf{SET} \\
 X &\mapsto M \times X \\
 f &\mapsto \mathbf{id}_M \times f.
 \end{aligned}$$

Dann definiere die folgenden natürlichen Transformationen η und μ :

$$\begin{aligned}
 \eta : \mathbf{id}_M &\rightarrow \mathcal{T}, & \mu : \mathcal{T}^2 &\rightarrow \mathcal{T} \\
 \eta_X : X &\rightarrow M \times X, & \mu_X : M \times (M \times X) &\rightarrow M \times X \\
 x &\mapsto (1_M, x) & (m, (n, x)) &\mapsto (m \cdot n, x)
 \end{aligned}$$

Proposition-Definition 2.1.4. Das Tripel (\mathcal{T}, η, μ) ist eine Monade, genannt *Monade des Monoids* \mathbf{M} oder auch *zu \mathbf{M} assoziierte Monade*.

Beweis. Sei X eine Menge. Die zu zeigende Behauptung bedeutet gerade die Kommutativität der folgenden Diagramme:



Aber hierbei handelt es sich genau um die Gesetze von Assoziativität und Einheit von Monoiden: Für alle $a, b, c \in M$ gelten nämlich gerade die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 ((a \cdot b) \cdot c) &= (a \cdot (b \cdot c)) \\
 1_m \cdot a &= a \cdot 1_m = a.
 \end{aligned}$$

Also kommutieren die Diagramme wie gewünscht. □

Bemerkung 2.1.5. Der Beweis zeigt insbesondere, dass die Bedingung der Kommutativität von Assoziativitätsquadrat und Einheitsdreiecken für diese Monade zu den Assoziativitäts- und Einheitsgesetzen von Monoiden äquivalent ist.

2.2. T-Algebren

Motivation 2.2.1. Betrachte erneut die Monade (\mathcal{T}, η, μ) eines Monoids \mathbf{M} wie in Beispiel 2.1.3. Da wir mit einem Monoid \mathbf{M} arbeiten und für beliebige Mengen X gerade $\mathcal{T}X = M \times X$ ist, liegt es nahe, Monoidoperationen $M \times X \rightarrow X$ auf X zu betrachten und zu überlegen, ob wir diese auf Monaden verallgemeinern können: Da eine Monoidoperation gerade ein Morphismus $M \times X \rightarrow X$ mit gewissen Eigenschaften ist, liegt es anschließend nahe, allgemeiner von natürlichen Transformationen $\mathcal{T} \rightarrow \mathbf{id}$ zu sprechen. Welche Eigenschaften sollten wir fordern?

Um die Frage zu beantworten, betrachte also eine Monoidoperation des Monoids M auf einer fixierten Menge X . Wie bekannt ist, handelt es sich dabei schlicht um eine Abbildung $\sigma_X : M \times X \rightarrow X$, sodass für alle $a, b \in M$ und $x \in X$ die Gleichungen

1. $\sigma_X(ab, x) = \sigma_X(a, \sigma_X(b, x))$
2. $\sigma_X(1, x) = x$

gelten.

Das ist äquivalent zu der Forderung, dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
M \times M \times X & \xrightarrow{\mathcal{T}\sigma_X} & M \times X \\
\mu_X \downarrow & & \downarrow \sigma_X \\
M \times X & \xrightarrow{\sigma_X} & X
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
(a, b, x) & \mapsto & (a, \sigma_X(b, x)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(ab, x) & \mapsto & \sigma_X(ab, x) \stackrel{!}{=} \sigma_X(a, \sigma_X(b, x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\eta_X} & M \times X \\
& \searrow \text{id}_X & \downarrow \sigma_X \\
& & X
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
x & \mapsto & (1, x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \mapsto & x \stackrel{!}{=} \sigma_X(1, x)
\end{array}$$

Wenn wir nun statt $M \times X$ wieder $\mathcal{T}X$ schreiben sowie statt von einer Abbildung $\sigma_X : M \times X \rightarrow X$ von einem Morphismus $\mathcal{T}X \rightarrow X$ sprechen, können wir die Kommutativität für allgemeine Monaden fordern. Damit erhalten wir genau den folgenden Begriff einer \mathcal{T} -Algebra:

Definition 2.2.2 (T -Algebra). Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ eine Monade in \mathcal{C} . Eine T -Algebra ist ein Paar (A, a) , bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{C}$ sowie einem Morphismus $a : \mathcal{T}A \rightarrow A$ aus \mathcal{C} , sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{T}A \\
& \searrow \text{id}_A & \swarrow a \\
& & A
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}^2 A & \xrightarrow{\mathcal{T}a} & \mathcal{T}A \\
\mu_A \downarrow & & \downarrow a \\
\mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A
\end{array}$$

Definition 2.2.3. Das linke Diagramm bezeichnen wir als *Algebrendreieck*, das rechte als *Algebrenquadrat*. Beide zusammen bezeichnen wir als *Algebrendiagramme*.

Definition 2.2.4 (Strukturmorphismus). Wir bezeichnen den Morphismus a wie oben als *Strukturmorphismus* der T -Algebra (A, a) .

Für gegebene T -Algebren (A, a) und (B, b) gibt es eine natürliche Weise, Morphismen zu definieren.

Definition 2.2.5 (Morphismus von T -Algebren). Ein Morphismus $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ ist ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} , sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A \\
\mathcal{T}f \downarrow & & \downarrow f \\
\mathcal{T}B & \xrightarrow{b} & B
\end{array}$$

kommutiert. Komposition von Morphismen von T -Algebren wird durch Komposition in \mathcal{C} induziert.

Definition 2.2.6 (Eilenberg-Moore Kategorie der T -Algebren). Die *Eilenberg-Moore Kategorie der T -Algebren* \mathcal{C}^T ist die Kategorie, die genau aus T -Algebren als Objekten und Morphismen von T -Algebren als Morphismen besteht.

Beispiel 2.2.7. Betrachte die Monade $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ eines Monoids \mathbf{M} . Dann ist eine T -Algebra ein Paar der Form (X, σ) mit X einer Menge und $\sigma : M \times X \rightarrow X$ einer Monoid-

operation von M auf X . Es bleibt noch zu betrachten, ob sich Morphismen von T -Algebren so verhalten, wie wir es erwarten würden. Und in der Tat: Ein Morphismus $\mathbf{f} : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \rho)$ besteht aus einem Morphismus $f : X \rightarrow Y$, also einer Mengenabbildung mit

$$\begin{array}{ccc} M \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \text{id}_M \times f \downarrow & & \downarrow f \\ M \times Y & \xrightarrow{\rho} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (m, x) & \longmapsto & \sigma(m, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (m, fx) & \longmapsto & \rho(m, fx) = f(\sigma(m, x)). \end{array}$$

Also haben wir die erwartete Forderung $\rho(m, fx) = f(\sigma(m, x))$.

Beispiel 2.2.8 (R-Linksmoduln). Sei \mathbf{R} ein Ring mit zugrundeliegender Menge R . Dann definieren wir einen Endofunktor \mathcal{T} der Kategorie \mathbf{AbGRP} der additiv geschriebenen abelschen Gruppen wie folgt, wobei alle Tensorprodukte solche über \mathbb{Z} sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathbf{AbGRP} &\rightarrow \mathbf{AbGRP} \\ A &\mapsto R \otimes A \\ (A \xrightarrow{f} B) &\mapsto (R \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes f} R \otimes B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{T}^2 &\rightarrow \mathcal{T} \\ \mu_A : R \otimes R \otimes A &\rightarrow R \otimes A \\ r \otimes s \otimes a &\mapsto (rs \otimes a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta : \text{id}_{\mathbf{AbGRP}} &\rightarrow \mathcal{T} \\ \eta_A : A &\rightarrow R \otimes A \\ a &\mapsto 1 \otimes a \end{aligned}$$

Man prüfe, dass dies in der Tat erneut eine Monade $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ definiert.

Worum handelt es sich bei den T -Algebren dieser Monade?

Sei (A, h) eine T -Algebra mit einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe A und einem Morphismus $h : R \otimes A \rightarrow A$ in \mathbf{AbGRP} , also einem Gruppenhomomorphismus abelscher Gruppen. Betrachten wir erneut die definierenden kommutativen Diagramme für T -Algebren und führen wir eine Diagrammjagd (rechte Spalte) durch, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes R \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_R \otimes h_A} & R \otimes A \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow h \\ R \otimes A & \xrightarrow{h} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} r \otimes s \otimes a & \longmapsto & r \otimes h(s \otimes a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ rs \otimes a & \longmapsto & h(rs \otimes a) = h(r \otimes h(s \otimes a)) \end{array}$$

Aufgrund der Bilinearität des Tensorprodukts erhalten wir außerdem $h(r + s \otimes a) = h(r \otimes a + s \otimes a) = h(r \otimes a) + h(s \otimes a)$ sowie $h(r \otimes (m + n)) = h(r \otimes m + r \otimes n) = h(r \otimes m) + h(r \otimes n)$. Das zweite kommutative Diagramm garantiert, dass $h(1, a) = a$ ist, also, wenn wir h als Multiplikation schreiben, dass $1 \cdot a = a$ ist.

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & R \otimes A \\
& \searrow & \downarrow \\
& = & X
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
x & \longmapsto & (1, x) \\
& \searrow & \downarrow \\
& & x = h(1, x)
\end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass es sich bei T -Algebren (A, h) genau um R -Linksmoduln A zusammen mit der durch die Abbildung h gegebenen Skalarmultiplikation handelt.

2.3. Das Verhältnis von Adjunktionen und Monaden

Proposition 2.3.1 (Adjunktionen induzieren Monaden⁹). Sei $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Adjunktion. Seien $\eta : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ die Einheit bzw. $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$ die Koeinheit der Adjunktion.

Dann ist $T := (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ mit $\mathcal{T} := \mathcal{G}\mathcal{F}$ und $\mu := \mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}$ eine Monade.

Beweis. Offensichtlich haben wir einen Endofunktor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ sowie natürliche Transformationen η, μ wie verlangt. Wir müssen die Kommutativität von Assoziativitätsquadrat und Einheitsdreiecken nachweisen.

Das Assoziativitätsquadrat sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} & \xrightarrow{\mathcal{G}\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}} & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} \\
\mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}\epsilon\mathcal{F} \\
\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} & \xrightarrow{\mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}} & \mathcal{G}\mathcal{F}
\end{array}$$

Dieses Diagramm wirkt komplex. Bezeichnen wir es mit D . Wir vereinfachen unsere Aufgabe. Betrachte das folgende Diagramm E :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}\mathcal{G}\epsilon} & \mathcal{F}\mathcal{G} \\
\epsilon\mathcal{F}\mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \epsilon \\
\mathcal{F}\mathcal{G} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{id}_D
\end{array}$$

Wenn wir zeigen können, dass dieses Diagramm kommutiert, so kommutiert es auf jedem Objekt $X \in \mathcal{C}$. Insbesondere kommutiert es also für $\mathcal{F}X$. Wenden wir dann auf jedes Objekt und jeden Morphismus den Funktor \mathcal{G} an, so bleibt unser Diagramm kommutativ. Aber das dabei entstehende Diagramm ist genau D . Also genügt es für unseren Beweis, die Kommutativität von E zu zeigen.

Diese folgt daraus, dass ϵ eine natürliche Transformation ist. Setze nämlich $\mathcal{T}' := \mathcal{F}\mathcal{G}$. Dann kommutiert für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ aus \mathcal{C} das linke der folgenden Diagramme:

⁹[ML78, 138].

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}'A & \xrightarrow{\mathcal{T}'f} & \mathcal{T}'B \\
\epsilon_A \downarrow & & \downarrow \epsilon_B \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(\mathcal{T}')^2X & \xrightarrow{\mathcal{T}'(\epsilon_X)} & \mathcal{T}'X \\
\epsilon_{\mathcal{T}'X} \downarrow & & \downarrow \epsilon_X \\
\mathcal{T}'X & \xrightarrow{\epsilon_X} & X
\end{array}$$

Beachte, dass das rechte Diagramm mit dem Diagramm E identisch ist und gleichzeitig einfach eine Auswertung des linken Diagramms für $A := \mathcal{T}'X, B := X$ sowie $f := \epsilon_X$ darstellt und somit kommutiert. Damit kommutiert E . Die Kommutativität der Einheitsdreiecke zeigt man ebenfalls direkt. \square

Definition 2.3.2. Die in Prop 2.3.1 definierte Monade bezeichnen wir als *von der Adjunktion $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$ induziert*.

Satz 2.3.3 (Monaden sind stets durch Adjunktionen induziert¹⁰). Sei $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ eine Monade der Kategorie \mathcal{C} . Dann gibt es eine Kategorie \mathcal{D} sowie eine Adjunktion $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, sodass $T = \mathcal{G}\mathcal{F}$ ist und die natürlichen Transformationen $\eta : \mathbf{id} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ bzw. μ die Einheit bzw. Koeinheit der Adjunktion sind.

Für den Beweis benötigen wir die folgenden beiden Lemmata, die auch von unabhängigem Interesse sind:

Lemma 2.3.4. Sei $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ eine Monade von \mathcal{C} . Die folgenden Zuordnungen geben wohldefinierte Funktoren:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}^T : \mathcal{C}^T & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
\mathcal{F}^T : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}^T
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A, a) \longmapsto A & & A \longmapsto (\mathcal{T}A, \mu_A) \\
f \downarrow & & \downarrow f \\
(B, b) \longmapsto B & & B \longmapsto (\mathcal{T}B, \mu_B)
\end{array}$$

Außerdem definiere $\eta^T : \mathbf{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{G}^T \mathcal{F}^T$ via $\eta^T := \eta$ und $\epsilon^T : \mathcal{F}^T \mathcal{G}^T \rightarrow \mathbf{id}_{\mathcal{C}^T}$ via $\epsilon^T_{(A,a)} := a$.

Dann ist $(\mathcal{F}^T, \mathcal{G}^T, \eta^T, \epsilon^T)$ eine Adjunktion.

Bemerkung 2.3.5. Da es sich bei Elementen (A, a) von \mathcal{C}^T um mit einer Zusatzstruktur versehene Elemente A von \mathcal{C} handelt und auch Morphismen einfach solche aus \mathcal{C} mit gewissen Zusatzbedingungen sind, handelt es sich beim Funktor \mathcal{G}^T einfach um den kanonischen Vergissfunktork.

Der Funktor \mathcal{F}^T schickt Objekte A auf die zugehörige *freie T -Algebra* $(\mathcal{T}A, \mu_A)$. Dass diese Bezeichnung sinnvoll ist, ist eine Konsequenz des Lemmas, denn es handelt sich bei \mathcal{F}^T um den zum Vergissfunktork \mathcal{G}^T linksadjungierten Funktor, womit also $\mathcal{F}^T A$ gerade der Definition eines freien \mathcal{C}^T -Objekts (siehe auch Anhang A) von A in Bezug auf \mathcal{G}^T entspricht.

¹⁰Für den Satz und die beiden folgenden Lemmata vergleiche [ML78, 140 f.]

Beweis des Lemmas. Die Wohldefiniertheit der Funktoren ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{F}^T zu \mathcal{G}^T linksadjungiert ist und η^T bzw. ϵ^T die Einheit bzw. Koeinheit der Adjunktion sind. Nach Satz 1.2.4 genügt es, zu zeigen, dass η^T und ϵ^T die Dreiecksidentitäten des Satzes erfüllende natürliche Transformationen sind. Also verfahren wir der Reihe nach:

1. Nach Definition gilt $\eta^T = \eta$. Außerdem ist $\mathcal{G}^T \mathcal{F}^T = \mathcal{T}$, wie man zum Beispiel an folgendem Diagramm abliest:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{F}^T} & \mathcal{C}^T & \xrightarrow{\mathcal{G}^T} & \mathcal{C} \\ \\ A & \longmapsto & (\mathcal{T}A, \mu_A) & \longmapsto & \mathcal{T}A \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{T}f & & \downarrow \mathcal{T}f \\ B & \longmapsto & (\mathcal{T}B, \mu_B) & \longmapsto & \mathcal{T}B \end{array}$$

Da $\eta : \mathbf{id}_C \rightarrow \mathcal{T}$ eine natürliche Transformation ist, ist es auch η^T .

2. Die Wohldefiniertheit von ϵ^T folgt daraus, dass $a : TA \rightarrow A$ in \mathcal{C} liegt und mit μ_A kompatibel ist.
3. Die erste Dreiecksidentität. Wir müssen zeigen, dass das folgende Diagramm für alle $C \in \mathcal{C}$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^T C & \xrightarrow{(\mathcal{F}^T \cdot \eta^T)_C} & \mathcal{F}^T \mathcal{G}^T \mathcal{F}^T C \\ & \searrow \text{id}_{\mathcal{F}^T C} & \downarrow (\epsilon^T \cdot \mathcal{F}^T)_C \\ & & \mathcal{F}^T C \end{array}$$

Verwenden wir schlicht die Definition der beteiligten Funktoren und natürlichen Transformationen: Es ist $\mathcal{F}^T C = (C, \mu_C)$. Weiters sind

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^T \cdot \eta^T)_C &= \mathcal{F}^T(\eta_C^T) = \mathcal{F}^T(\eta_C) = \mathcal{T}\eta_C, \\ (\epsilon^T \cdot \mathcal{F}^T)_C &= \epsilon_{\mathcal{F}^T C}^T = \epsilon_{(\mathcal{T}C, \mu_C)}^T = \mu_C. \end{aligned}$$

Damit haben wir $(\epsilon^T \cdot \mathcal{F}^T)_C \circ (\mathcal{F}^T \cdot \eta^T)_C = \mu_C \circ \mathcal{T}\eta_C = \mathbf{id}_C$, wobei wir für die letzte Gleichung eines der beiden Einheitsdreiecke für Monaden benutzen.

4. Die zweite Dreiecksidentität prüft man analog. □

Definition 2.3.6. Die in Lemma 2.3.4 definierte Adjunktion bezeichnen wir als *von T induziert*.

Lemma 2.3.7. Sei $(\mathcal{F}^T, \mathcal{G}^T, \eta^T, \epsilon^T)$ die von der Monade T induzierte Adjunktion. Die von dieser Adjunktion induzierte Monade ist gerade T .

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Der Beweis des Satzes 2.3.3 ergibt sich als sofortige Konsequenz der beiden Lemmata. □

Bemerkung 2.3.8. Die obige Konstruktion gibt uns eine Charakterisierung jeder Monade T , für die wir nur die Monade selbst und die Kategorie ihrer T -Algebren benötigen. Also wird jede Monade durch ihre Algebren festgelegt.

2.4. Der Eilenberg-Moore-Vergleichsfunktor

Sei $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \eta, \epsilon) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Adjunktion. Sei (T, η, μ) die induzierte Monade. Seien $\mathcal{F}^T, \mathcal{G}^T$ wie zuvor.

Definition 2.4.1 (Eilenberg-Moore-Vergleichsfunktor). Der (*assoziierte*) Eilenberg-Moore Vergleichsfunktor oder kurz *Vergleichsfunktor* ist der Funktor

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C}^T \\ D &\rightarrow (\mathcal{G}D, (\mathcal{G} \cdot \epsilon)_D) \\ f &\rightarrow \mathcal{G}f. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.2. Der Eilenberg-Moore Vergleichsfunktor ist der eindeutige durch die folgenden Beziehungen charakterisierte Funktor $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$:

1. $\mathcal{G}^T \circ \Phi = \mathcal{G}$,
2. $\Phi \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^T$.

Das heißt, die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{G} \swarrow & & \searrow \Phi \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{\mathcal{G}^T} & \mathcal{C}^T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{F} \swarrow & & \nearrow \mathcal{F}^T \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

Beweis. Dass der Eilenberg-Moore Vergleichsfunktor die Diagramme kommutativ werden lässt, rechnet man direkt mit den zugehörigen Definitionen nach. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\Phi' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ ein weiterer solcher Funktor.

Sei $D \in \mathcal{D}$. Dann ist $\Phi'(D) = (A_D, a_D)$ für ein gewisses Objekt $A_D \in \mathcal{C}$ und einen Morphismus $a_D : \mathcal{T}A_D \rightarrow A_D$. Aber wegen der ersten Gleichung ist $\mathcal{G}^T(\Phi'(D)) = \mathcal{G}(D)$ und also ist $A_D = \mathcal{G}D$. Der Funktor Φ' schickt Morphismen $f : D \rightarrow D'$ in \mathcal{D} auf Morphismen von \mathcal{T} -Algebren $\Phi'(f) : (\mathcal{G}D, a_D) \rightarrow (\mathcal{G}D', b_{D'})$.

Also folgt, dass $a : \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ mit den Auswertungen $a_D : \mathcal{T}\mathcal{G}D \rightarrow \mathcal{G}D$ eine natürliche Transformation ist. Wegen $\Phi'\mathcal{F} = \mathcal{F}^T$ ist für jedes $C \in \mathcal{C}$ somit $a_D(\mathcal{F}(C)) = \mu_D$.

Nun ist außerdem $\mu = \mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}$. Also haben wir $a \circ \mathcal{T}\mathcal{G}\epsilon = \mathcal{G}\epsilon \circ a\mathcal{F}\mathcal{G} = \mathcal{F}\epsilon \circ \mu\mathcal{G}$. Wenden wir das auf $\mathcal{T}\eta\mathcal{G}$ an, so erhalten wir $a \circ \mathcal{T}\mathcal{G}\epsilon\mathcal{T}\eta\mathcal{G} = \mathcal{G}\epsilon \circ \mu\mathcal{G}$ und also $\mathcal{G}\epsilon = a$. Damit ist $\Phi = \Phi'$ wie gewünscht. \square

Definition 2.4.3 (Monadischer Funktor). Ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ heißt *monadisch*, wenn ein zu \mathcal{G} linksadjungierter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ existiert, sodass der assoziierte Vergleichsfunktor $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Bemerkung 2.4.4. Ein monadischer Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ist also nach dem obigen Diagramm bis auf Äquivalenz ein Vergissfunktor $\mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$.

2.5. Einige abschließende Beispiele

Um ein Gespür für Monaden und ihre Algebren zu bekommen, geben wir hier nun noch ohne Beweise einige Beispiele:

Beispiel 2.5.1 (Potenzmengen und vollständige Halb-Verbände¹¹). Der *Potenzmengenfunktor* ist der Funktor $\mathcal{P} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, der eine Menge X auf ihre Potenzmenge schickt und einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ die Abbildung $\mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y$, $S \mapsto f(S)$ zuordnet. Definiere $\eta : \mathbf{id} \rightarrow \mathcal{P}$ via $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}X$, $x \mapsto \{x\}$. Weiters definiere $\mu : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ via $\mu_X : \mathcal{P}^2X \rightarrow \mathcal{P}X$, sodass eine Menge von Teilmengen auf deren Vereinigung geschickt wird: $T \mapsto \bigcup_{S \in T} S$.

Dann ist das Tripel (\mathcal{P}, η, μ) eine Monade, die so genannte *Manes-Monade*. Um die Algebren dieser Monade beschreiben zu können, benötigen wir den folgenden Begriff:

Ein *vollständiger Halb-Verband* ist eine Halbordnung V , in der jede Teilmenge ein Supremum besitzt. Die Algebren der Manes-Monade sind gerade die vollständigen Halbverbände:

Jede \mathcal{P} -Algebra (X, h) ist ein vollständiger Halb-Verband wie folgt: Wir setzen $x \leq y$, wenn $h(\{x, y\}) = y$ und für jede Teilmenge $S \subset X$: $\sup(S) = h(S)$ ist. Umgekehrt ist jeder vollständige Halb-Verband V auf diese Weise eine \mathcal{P} -Algebra: Man setze $h(S) := \sup(S)$.

Beispiel 2.5.2 (Freie Halbgruppen¹²). Sei \mathbf{HLBGRP} die Kategorie der kleinen Halbgruppen. Mit dem Vergissfunktor $\mathcal{G} : \mathbf{HLBGRP} \rightarrow \mathbf{SET}$ und dem Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{HLBGRP}$, der einer Menge X die freie Halbgruppe auf X mit der üblichen Grundmenge zuordnet, ist eine Adjunktion $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{HLBGRP}$ gegeben. Die zu dieser Adjunktion assoziierte Monade W bezeichnen wir als *Wortmonade*.

Eine W -Algebra ist ein Paar (X, h) bestehend aus einer Menge X und einer Mengenabbildung $h : \mathcal{GFX} \rightarrow X$ mit gewissen Eigenschaften. Bei \mathcal{GFX} handelt es sich um die zugrundeliegende Menge der freien durch X erzeugten Halbgruppe, also um die Menge aller Wörter (x_1, \dots, x_n) mit Buchstaben $x_i \in X$ sowie $n \in \mathbb{N}$, wobei 0 keine natürliche Zahl ist. Also ist $\mathcal{GFX} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n$. Eine Mengenabbildung $h : \mathcal{GFX} \rightarrow X$ entspricht also einer Folge (ν_1, ν_2, \dots) aus Abbildungen $\nu_i : X^i \rightarrow X$. Die Algebrendiagramme entsprechen dabei gerade

¹¹Aufgabe 1 aus [ML78, 142].

¹²Siehe [ML78, 144-146].

der Bedingung, dass $\nu_1 = 1$ und für alle k

$$\nu_k \left(\prod_{i=1}^k \nu_{n_i} \right) = \nu_{\sum_{i=1}^k n_i}$$

ist. Morphismen sind gerade Mengenabbildungen, die mit jedem der ν_n kommutieren.

Der Vergleichsfunktor $\mathbf{HLBGRP} \rightarrow \mathbf{SET}^W$ schickt Halbgruppen (X, ν) auf $(X, (\nu_n)_n)$, sodass $\nu_1 = \nu$ ist und die folgenden ν_n einfach Iterierungen von ν sind, das heißt $\nu_n : X^n \rightarrow X, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \nu(x_n, \nu_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}))$.

Beispiel 2.5.3 (Giry-Monade¹³). Sei X ein polnischer Raum, d.h. ein vollständig metrisierbarer, separabler topologischer Raum. Sei $\mathbf{P}(X)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf den Borelmengen von X . Versieh $\mathbf{P}(X)$ mit der *schwachen Topologie*, nämlich der Initialtopologie von $\{\tau \mapsto \int_X f d\tau \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und beschränkt}\}$. Dann ist $\mathbf{P}(X)$ mit dieser Topologie ein polnischer Raum.

Auf der Kategorie der polnischen Räume \mathbf{POL} lässt sich wie folgt ein Endofunktor $\mathbf{P} : \mathbf{POL} \rightarrow \mathbf{POL}$ definieren: Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus aus \mathbf{POL} . Definiere $\mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(Y)$ via $\mathbf{P}(f)(\tau)(B) := \tau(f^{-1}(B))$ für beliebige Elemente $\tau \in \mathbf{POL}$ und B eine Borelmenge von Y .

Mit den Zuordnungen $\eta_X : X \rightarrow \mathbf{P}(X), x \mapsto \delta_x$, wobei wir mit δ_x das Dirac-Maß bezeichnen, sowie $\mu_X : (\mathbf{P}^2(X)) \rightarrow \mathbf{P}(X)$ via $\mu_X(M)(A) := \int_{\mathbf{P}(X)} \tau(A) M(d\tau)$ sind natürlichen Transformationen $\eta : \mathbf{id} \rightarrow \mathbf{P}$ sowie $\mu : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}$ gegeben.

Das Tripel (\mathbf{P}, η, μ) ist eine Monade, die so genannte *Giry-Monade*. Um die Algebren dieser Monade, die so genannten Giry-Algebren, verstehen zu können, bedarf es der folgenden Konzepte:

Sei Y ein topologischer Raum, (X, h) eine Giry-Algebra und $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ eine Abbildung, sodass für alle kompakten Teilmengen W von Y die Menge $\{x \in X \mid F(x) \cap W \neq \emptyset\}$ kompakt ist. Dann heißt F *k-oberhalbstetig*.

Weiters heißt eine Äquivalenzrelation R auf $\mathbf{P}(X)$ *konvex*, falls für alle (a, b) und $(a', b') \in R$ und für jede Konstante $0 \leq c \leq 1$ gilt: $([ca + (1 - c)a'], [cb + (1 - c)b']) \in R$. Eine Partition von $\mathbf{P}(X)$ heißt *konvex*, falls die durch sie auf $\mathbf{P}(X)$ definierte Äquivalenzrelation konvex ist.

Bei den Algebren (X, h) der Giry-Monade handelt es sich genau um die konvexen k-oberhalbstetige Partitionen $\{G(x) \mid x \in X\}$ in geschlossene Teilmengen von $\mathbf{P}(X)$, sodass für alle $x \in X$ $\delta_x \in G(x)$ ist. Diese Behauptung ist Proposition 3 aus [Dob04, 4 ff.]. Eine Diskussion von k-Oberhalbstetigkeit sowie der Beweis der Behauptung finden sich ebenfalls dort.

Beispiel 2.5.4 (Ultrafilter¹⁴). Definiere den Endofunktor $T : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ wie folgt: Für jede Menge X sei $\mathcal{T}X$ die Menge der Ultrafilter auf X . Für jedes $f : X \rightarrow Y$ und jedes $\mathfrak{F} \in \mathcal{T}X$ setze $\mathcal{T}(f)(\mathfrak{F}) := \{B \subset Y \mid f^{-1}[B] \in \mathfrak{F}\}$.

¹³Siehe [Dob04].

¹⁴[Bö87].

Es gibt eindeutige natürliche Transformationen $\eta : \mathbf{id}_{\mathbf{SET}} \rightarrow \mathcal{T}$ sowie $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ und (\mathcal{T}, η, μ) ist eine Monade.¹⁵

Die Eilenberg-Moore Kategorie der T -Algebren ist gerade die Kategorie **CPTHAUS** der kompakten Hausdorffräume mit dem üblichen Vergissfunktor nach **SET**.¹⁶

¹⁵[Bö87, 38, Korollar 2.3].

¹⁶[vBC⁺17, Abschnitt 3, zuletzt abgerufen am 06.07.2017].

3. Gespaltene Differenzkokerne

3.1. Vorbemerkung

Grundsätzlich setzen wir eine Familiarität mit den Konzepten von Limit, Kolimit, Produkten, Koprodukten und dergleichen voraus. Dieser Abschnitt dient in erster Linie der Einführung gespaltener Differenzkokernepaare, die wir für den Beckschen Monadizitätssatz benötigen. Wir wiederholen zunächst einige grundlegende Konzepte:

3.2. Parallele Paare und Differenzkokerne

Definition 3.2.1 (paralleles Paar¹⁷). In einer Kategorie \mathcal{C} sei ein Diagramm der folgenden Form gegeben:

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

Dann bezeichnen wir das Paar (f, g) als *paralleles Paar von X nach Y* . Mitunter bezeichnen wir, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, auch das gesamte Diagramm als paralleles Paar.

Definition 3.2.2 (reflexives Paar). Ein paralleles Paar (f, g) heißt *reflexiv*, falls es einen Pfeil $i : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ i = g \circ i = \mathbf{id}$ ist.

Definition 3.2.3 (Differenzkern¹⁸). Ein *Differenzkern* (E, eq) eines parallelen Paares (f, g) von X nach Y ist ein Limit des zugehörigen Diagramms; besteht also aus einem Objekt $E \in \mathcal{C}$ und einem Pfeil $eq : E \rightarrow X$, sodass $f \circ eq = g \circ eq$ ist und die folgende universelle Eigenschaft gilt. Für jedes andere Paar (N, n) mit $n : N \rightarrow X$ und $f \circ n = g \circ n$ haben wir Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{eq} & X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \\ \uparrow \exists! & \nearrow n & \\ N & & \end{array}$$

Bemerkung 3.2.4. Da ein Limit nichts anderes als ein finaler Kegel ist, benötigen wir eigentlich noch einen Pfeil $E \rightarrow Y$, der das Diagramm kommutativ macht, aber dieser ist dann automatisch eindeutig durch Komposition von f bzw. g mit eq gegeben und liefert damit keine zusätzliche Information.

Definition 3.2.5 (Differenzkokerne¹⁹). Ein *Differenzkokerne* (D, d) ist ein Kolimit eines parallelen Paares (f, g) . Hierbei ist $D \in \mathcal{C}$ das Objekt und $d : Y \rightarrow D$ der Pfeil in \mathcal{C} , die zu dem

¹⁷Siehe [BW12, 266].

¹⁸Für eine Definition und einen kurzen Überblick siehe [BW12, 266-267] und [BW05, 34-35].

¹⁹Zum Beispiel siehe [BW12, 277-278].

gewählten Colimit gehören. Das heißt, wir haben Kommutativität des folgenden Diagramms für jedes andere Paar (N, n) mit $n \circ f = n \circ g$:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \xrightarrow{d} & D \\
 & & & \searrow n & \downarrow \exists! \\
 & & & & N
 \end{array}$$

Die obige Bemerkung gilt dual übersetzt auch hier für die Angabe eines Morphismus $X \rightarrow D$.

3.3. Spaltende und gespaltene Differenzkokernpaare

Definition 3.3.1 (gespaltene und spaltende Differenzkokerne). Ein (auf)gespaltener Differenzkokern eines parallelen Paares $(f, g) : X \rightarrow Y$ ist eine Kollektion $(D, d; s, t)$ von Objekten $D \in \mathcal{C}$ und Pfeilen s, t, d , gegeben durch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{t} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{s} \end{array} & D
 \end{array}$$

Zusätzlich fordern wir

1. $f \circ t = \text{id}$.
2. $g \circ t = s \circ d$.
3. $d \circ s = \text{id}$.
4. $d \circ f = d \circ g$.

Ist ein Kokegel (D, d) von (f, g) gegeben, sodass Morphismen s, t existieren, sodass $(D, d; s, t)$ ein gespaltener Differenzkokern ist, so bezeichnen wir (D, d) als *spaltenden Differenzkokern*.

Existiert für ein paralleles Paar $(f, g) : X \rightarrow Y$ ein gespaltener Differenzkokern, so bezeichnen wir (f, g) als *gespaltenes Paar* (oder, um dem üblichen englischen Ausdruck „split coequalizer pair“ zu entsprechen: *Paar mit gespaltenem Differenzkokern*).

Bemerkung 3.3.2. Mitunter wird in der Literatur zwischen spaltenden und gespaltenen Differenzkokernen nicht unterschieden und es ist aus dem Kontext zu schließen, welcher Begriff gemeint ist. Wenn Verwechslungen nicht zu erwarten sind, folgen wir dieser Konvention.

Die Bezeichnung der Struktur aus Definition 3.3.1 als „Differenzkokern“ wirkt auf den ersten Blick unpassend, da a priori nicht garantiert ist, dass es sich tatsächlich um einen Differenzkokern handelt. Doch dies ist der Fall, wie die folgende Proposition zeigt:

Proposition 3.3.3 (spaltende Differenzkokerne sind Differenzkokerne). Sei $(D, d; s, t)$ wie zuvor ein gespaltener Differenzkokern von (f, g) . Dann ist (D, d) ein Differenzkokern des parallelen Paares (f, g) von X nach Y .

Beweis. Sei (E, e) ein weiterer Kokegel von (f, g) . Wir müssen zeigen, dass es genau ein $h : D \rightarrow E$ gibt, sodass $h \circ d = e$.

Existenz: Setze $h = e \circ s$. Dann ist wegen der zweiten Bedingung der Definition also $h \circ d = e \circ g \circ t$. Da (E, e) ein Kokegel ist, ist $e \circ g = e \circ f$ und also $e \circ g \circ t = e \circ f \circ t = e \circ id = e$.

Eindeutigkeit: Sei $h : D \rightarrow E$ wie verlangt. Dann ist $h = h \circ id = h \circ d \circ s = e \circ s$. \square

Definition 3.3.4 (\mathcal{F} -gespaltenes Paar). Sei (f, g) ein paralleles Paar von X nach Y in der Kategorie \mathcal{C} . Sei zusätzlich $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann heißt (f, g) ein \mathcal{F} -gespaltenes Paar, falls es in \mathcal{D} einen gespaltenen Differenzkokern $(D, d; s, t)$ von $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$ gibt.

Bemerkung 3.3.5 (Konkretisierung). Das heißt, wir erhalten ein Diagramm der Form

$$\mathcal{F}X \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}f} \\ \xleftarrow{t} \\ \xrightarrow{\mathcal{F}g} \end{array} \mathcal{F}Y \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} D.$$

Für dieses gilt es dann, die Bedingungen der Definition eines gespaltenen Differenzkokerns zu prüfen.

Bemerkung 3.3.6. Ein gespaltenes Paar ist somit gerade ein **id**-gespaltenes Paar.

Definition 3.3.7. Sei (Z, z) ein Differenzkokern eines parallelen Paares (f, g) . Wenn $(\mathcal{F}Z, \mathcal{F}z)$ ein Differenzkokern des Diagramms

$$\mathcal{F}X \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}f} \\ \xrightarrow{\mathcal{F}g} \end{array} \mathcal{F}Y$$

ist, so sagen wir, dass der Funktor \mathcal{F} den Differenzkokern (Z, z) von (f, g) *erhält*.

4. Der Becksche Monadizitätssatz

Definition 4.1.1. Ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ *reflektiert Isomorphismen*, falls für jeden Morphismus f aus \mathcal{D} gilt: Ist $\mathcal{G}f$ ein Isomorphismus, so ist bereits f ein Isomorphismus. Ein solcher Funktor heißt auch *konservativ*.

Satz 4.1.2 (Beck). Ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ist monadisch genau dann, wenn alle der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert ein zu \mathcal{G} linksadjungierter Funktor.
2. Der Funktor \mathcal{G} reflektiert Isomorphismen.
3. Die Kategorie \mathcal{D} besitzt Differenzkokerne von \mathcal{G} -gespaltenen Paaren und \mathcal{G} erhält diese.

Definition 4.1.3 (Beck-Bedingungen). Die drei Bedingungen des vorangegangenen Satzes bezeichnen wir als *Beck-Bedingungen*.

Bemerkung 4.1.4. Nach [BW05, 100, Theorem 3.14] kann man die dritte Bedingung sogar noch abschwächen: Es genügt, sie für reflexive \mathcal{G} -gespaltene Paare zu prüfen.

5. Beweis des Satzes

5.1. Monadizität impliziert Beck-Bedingungen

Die erste Beck-Bedingung ist eine direkte Konsequenz der Definition eines monadischen Funktors.

Wir kommen zur zweiten Beck-Bedingung:

Proposition 5.1.1. Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein monadischer Funktor. Dann reflektiert \mathcal{G} Isomorphismen.

Beweis. Sei $f : D \rightarrow D'$ ein Morphismus in \mathcal{D} , sodass $\mathcal{G}(f)$ ein Isomorphismus ist. Zu zeigen ist, dass f selbst bereits ein Isomorphismus sein muss. Aber da $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}^T \circ \Phi$ ist, ist dies äquivalent dazu, zu zeigen, dass $\mathcal{G}^T(\Phi(f))$ ein Isomorphismus ist. Der Vergleichsfunktor Φ ist eine Kategorienäquivalenz, also reflektiert er insbesondere Morphismen. Somit genügt es, zu zeigen, dass \mathcal{G}^T Isomorphismen reflektiert, um die Proposition zu beweisen. Letzteres ist aber eine direkte Konsequenz der Konstruktion von \mathcal{G}^T . \square

Damit erhalten wir die zweite Beck-Bedingung. Es fehlt allein die dritte.

Proposition 5.1.2. Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ monadisch und sei

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

ein \mathcal{G} -gespaltenes Paar. Dann gibt es einen Differenzkokern (D, d) von (f, g) in \mathcal{D} mit $d : Y \rightarrow D$, sodass $(\mathcal{G}d, \mathcal{G}D)$ mit $\mathcal{G}d : \mathcal{G}Y \rightarrow \mathcal{G}D$ ein in \mathcal{C} liegender Differenzkokern des Diagramms

$$\mathcal{G}X \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{G}f} \\ \xrightarrow{\mathcal{G}g} \end{array} \mathcal{G}Y$$

ist.²⁰

Beweis. Siehe [BW05, 95-97]. \square

5.2. Beck-Bedingungen implizieren Monadizität

Es gibt eine Reihe verschiedener Möglichkeiten, die Rückrichtung zu beweisen. Wir folgen dem Beweis aus [Ber11, 7-11]. Der Beweisweg ist dabei dem der ursprünglichen Veröffentlichung von [Bec03, 8-11] sehr ähnlich.

²⁰Dies ist Proposition 3.5 aus [BW05, 94].

Lemma 5.2.1. Sei $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ eine Adjunktion. Seien weiter η die Einheit und ϵ die Koeinheit der Adjunktion. Sei $T = (\mathcal{T}, \eta, \mu)$ mit $\mu = \mathcal{G}\epsilon\mathcal{F}$ und $\mathcal{T} = \mathcal{G}\mathcal{F}$ die durch die Adjunktion induzierte Monade.

Die Kategorie \mathcal{D} enthalte Differenzkerne von \mathcal{G} -gespaltenen Paaren. Dann besitzt der Eilenberg-Moore Vergleichsfunktor Φ einen Linksadjungierten.

Beweis. Wir müssen einen Funktor $\Psi : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{D}$ konstruieren, der zu $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ linksadjungiert ist. Dazu müssen wir Ψ zuerst auf Objekten definieren.

Sei also $(A, a) \in \mathcal{C}^T$ mit $a : \mathcal{G}\mathcal{F}A \rightarrow A$ wie üblich. Dann ist $\mathcal{F}a : \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{F}A$ ein Pfeil in \mathcal{D} .

Wir haben außerdem eine natürliche Transformation $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}_D$. Somit haben wir auch hier einen Pfeil $\epsilon_{\mathcal{F}A} : \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{F}A$. Damit erhalten wir ein paralleles Paar

$$\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}A}} \\ \xrightarrow{\mathcal{F}a} \end{array} \mathcal{F}A.$$

Behauptung. Das parallele Paar $(\epsilon_{\mathcal{F}A}, \mathcal{F}a)$ ist ein \mathcal{G} -gespaltenes Paar.

Beweis der Behauptung. Nach Anwendung von \mathcal{G} wollen wir ein Diagramm der folgenden Form erhalten:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathcal{G}\mathcal{F}a} & \\ \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xleftarrow{t} & \mathcal{G}\mathcal{F}A \xrightleftharpoons[s]{d} D \\ & \xrightarrow{\mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}A}} & \end{array}$$

Die offensichtlichen Wahlen wären $d = a$ und $s = \eta_A$ sowie $t = \eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}A}$. Und in der Tat: Diese Wahl funktioniert. Wir prüfen die notwendigen Eigenschaften.

1. Nach den Einheitsdreiecken für Monaden gilt

$$\mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}A} \circ t = (\mathcal{G}\epsilon\mathcal{F})_A \circ \eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}A} = \mu_A \circ \eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}A} = \mu_A \circ (\eta \cdot \mathcal{G}\mathcal{F})_A \circ = (\mu \circ \eta \cdot \mathcal{T})_A = id.$$

2. Wir haben mit η eine natürliche Transformation. Insbesondere kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}A}} & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A \\ \downarrow a & & \downarrow \mathcal{G}\mathcal{F}a \\ A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}\mathcal{F}A \end{array}$$

3. $d \circ s \stackrel{!}{=} id$: Nach dem Einheitsdreieck für T -Algebren haben wir $a \circ \eta_A = \mathbf{id}_A$.

4. $d \circ \mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}A} \stackrel{!}{=} d \circ \mathcal{G}\mathcal{F}_A$: Das Assoziativitätsdiagramm für T -Algebren sagt aus, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}A & \xrightarrow{\mathcal{G}\mathcal{F}a} & \mathcal{G}\mathcal{F}A \\ \downarrow \mu_A & & \downarrow a \\ \mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{a} & A \end{array}$$

kommutiert. Damit gilt $a \circ \mathcal{G}\mathcal{F}a = a \circ \mu_A = a \circ \mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}A} = a \circ \mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}A}$.

Also ist die Behauptung bewiesen. □

Da wir nun ein \mathcal{G} -gespaltenes Paar gefunden haben und \mathcal{D} nach Annahme Differenzkerne derselben besitzt, gibt es also einen (bis auf eindeutige Isomorphie eindeutigen) Differenzkern (D, d) in \mathcal{D} . Wir setzen $\Psi(A, a) := D$ und $\kappa_{(A,a)} := d$.

Wie verfahren wir mit Morphismen? Sei $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ in \mathcal{C}^T . Das heißt, die folgenden Diagramme kommutieren — das linke nach Definition, das rechte nach Anwendung des Funktors \mathcal{F} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{a} & A \\ \mathcal{G}\mathcal{F}f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightarrow{b} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{\mathcal{F}a} & \mathcal{F}A \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}f \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightarrow{\mathcal{F}b} & \mathcal{F}B \end{array}$$

Nun sind wir beinahe am Ziel. Unter Verwendung von Ψ erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow[\mathcal{F}a]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_A} & \mathcal{F}A & \xrightarrow{\kappa_{(A,a)}} & \Psi(A, a) \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}f & & \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightarrow[\mathcal{F}b]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_B} & \mathcal{F}B & \xrightarrow{\kappa_{(B,b)}} & \Psi(B, b) \end{array}$$

Sowohl das innere als auch das äußere linke Quadrat kommutieren.

Damit wissen wir, was noch zu tun ist: $\Psi(A, a)$ ist ein Differenzkern, d.h. es genügt, zu zeigen, dass wir $\Psi(B, b)$ auf natürliche Weise zu einem Kokegel des oberen parallelen Paares machen können. Dann nämlich gibt es genau einen Pfeil $\Psi(A, a) \rightarrow \Psi(B, b)$, der die entstehenden Diagramme kommutativ macht.

Die offensichtliche Wahl für einen Pfeil $\mathcal{F}A \rightarrow \Psi(B, b)$ können wir jetzt ablesen: Wir nehmen schlicht $\kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f$ und zeigen, dass $\kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f \circ (\epsilon \cdot \mathcal{F})_A = \kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}a$ gilt.

Da weiters $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}$ eine natürliche Transformation ist, kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}A}} & \mathcal{F}A \\
\mathcal{F}\mathcal{G}(\mathcal{F}f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}f \\
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}B}} & \mathcal{F}B
\end{array}$$

Damit gilt

$$\kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f \circ (\epsilon \cdot \mathcal{F})_A = \kappa_{(B,b)} \circ (\epsilon \cdot \mathcal{F})_B \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}f = \kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}b \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}f = \kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}a$$

wie gewünscht.

Wir erhalten den eindeutigen Pfeil $\Psi f : \Psi(A, a) \rightarrow \Psi(B, b)$ wie in folgendem kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}A & \longrightarrow & \Psi(A, a) \\
& & & \searrow & \downarrow \exists! \Psi f \\
& & & & \Psi(B, b)
\end{array}$$

Nach Definition ergibt sich sofort, dass die Identitätsgleichung für Funktoren $\Psi(id) = id$ erfüllt ist.

Wir müssen noch prüfen, ob $\Psi(g \circ f) = \Psi g \circ \Psi f$ gilt.

Nimm also Pfeile $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$ aus \mathcal{C}^T . Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow[\mathcal{F}a]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_A} & \mathcal{F}A & \xrightarrow{\kappa_{(A,a)}} & \Psi(A, a) \\
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}f \downarrow & & \mathcal{F}f \downarrow & & \exists! \Psi f \downarrow \\
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightarrow[\mathcal{F}b]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_B} & \mathcal{F}B & \xrightarrow{\kappa_{(B,b)}} & \Psi(B, b) \\
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}g \downarrow & & \mathcal{F}g \downarrow & & \exists! \Psi g \downarrow \\
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}C & \xrightarrow[\mathcal{F}c]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_C} & \mathcal{F}C & \xrightarrow{\kappa_{(C,c)}} & \Psi(C, c)
\end{array}$$

$\exists! \Psi_{g \circ f}$

Dann gilt:

$$\Psi(g) \circ \Psi(f) \circ \kappa_{(A,a)} = \Psi(g) \circ \kappa_{(B,b)} \circ \mathcal{F}f = \kappa_{(C,c)} \circ \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f = \kappa_{(C,c)} \circ \mathcal{F}(g \circ f) = \Psi(g \circ f) \circ \kappa_{(A,a)}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Differenzkerns muss dann $\Psi(g) \circ \Psi(f) = \Psi(g \circ f)$ sein. Also ist $\Psi : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{D}$ ein wohldefinierter Funktor.

Für den Rest des Beweises müssen wir zeigen, dass Ψ zu Φ linksadjungiert ist. Wir verwenden die Charakterisierung aus unserem ersten Abschnitt. Also benötigen wir natürliche Transformationen

$$\begin{aligned}
\eta' &: \mathbf{id} \rightarrow \Phi\Psi \\
\epsilon' &: \Psi\Phi \rightarrow \mathbf{id}
\end{aligned}$$

für die die üblichen Dreiecksidentitäten gelten sollen.

Wir beginnen mit ϵ' . Was ist $\Psi\Phi D$? Da $\Phi D = (\mathcal{G}D, (\mathcal{G}\epsilon)_D)$ ist, erhalten wir mit $\Psi\Phi D$ einen Differenzkokern in der ersten Zeile des folgenden noch zu erläuternden Diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow[\mathcal{F}\mathcal{G}\epsilon_D]{(\epsilon \cdot \mathcal{F})_{\mathcal{G}D}} \mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{G}D}} \Psi(\mathcal{G}D, \mathcal{G}\epsilon_D) \\ & & \downarrow \exists! \epsilon'_D \\ & & D \end{array}$$

Wir haben bereits eine natürliche Transformation $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{id}$. Also ist (D, ϵ_D) ein guter Kandidat für einen Kokegel über dem obigen parallelen Paar. Da $\Psi(\mathcal{G}D, \mathcal{G}\epsilon_D)$ ein Differenzkokern ist, erhielten wir in diesem Falle sofort einen eindeutigen Pfeil als ϵ'_D wie oben.

Dafür ist also nur zu zeigen, dass $\epsilon_D \circ \mathcal{F}\mathcal{G}\epsilon_D = \epsilon_D \circ (\epsilon \cdot \mathcal{F})_{\mathcal{G}D}$ ist. Das ist aber gerade gegeben, weil ϵ eine natürliche Transformation ist und somit folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}\mathcal{G}D}} \mathcal{F}\mathcal{G}D \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\epsilon_D \downarrow & & \downarrow \epsilon_D \\ \mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow{\epsilon_D} D \end{array}$$

Dann ist jetzt zu zeigen, dass ϵ' in der Tat eine natürliche Transformation darstellt. Nimm also $f : D \rightarrow D'$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \epsilon_D & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}\mathcal{G}D & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{G}D}} & \Psi(\mathcal{G}D, (\mathcal{G}\epsilon)_D) & \xrightarrow{\epsilon'_D} & D & \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}\mathcal{G}f & & \downarrow \exists! \Psi\mathcal{G}f & & \downarrow f \\ \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}D' & \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}\mathcal{G}D' & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{G}D'}} & \Psi(\mathcal{G}D', (\mathcal{G}\epsilon)_{D'}) & \xrightarrow{\epsilon'_{D'}} & D' & \\ & & & & \epsilon_{D'} & & \\ & & & & \curvearrowleft & & \end{array}$$

Wie zuvor genügt es, $\epsilon'_D \Psi\mathcal{G}f \stackrel{!}{=} f \circ \epsilon'_D$ zu zeigen, um mithilfe der universellen Eigenschaft des Differenzkokerns $\kappa_{\mathcal{G}D}$ die Kommutativität des rechten Quadrats zu zeigen. Aber die Gleichheit erfolgt sofort mit der Natürlichkeit von ϵ (für die zweite Gleichung):

$$f \circ \epsilon'_D \circ \kappa_{\mathcal{G}D} = f \circ \epsilon_D = \epsilon_{D'} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}f = \epsilon'_D \circ \kappa_{\mathcal{G}D'} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}f = \epsilon'_D \circ \Psi\mathcal{G}f \circ \kappa_{\mathcal{G}D}.$$

Damit ist ϵ' eine natürliche Transformation.

Wir kommen zu $\eta' : \mathbf{id}_{\mathcal{C}^T} \rightarrow \Phi\Psi$. Wir beginnen auch hier mit Objekten. Sei $(A, a) \in \mathcal{C}^T$. Dann ist $\Psi(A, a)$ ein Differenzkokern von $((\epsilon \cdot \mathcal{F})_A, \mathcal{F}a)$. Nach Anwendung von \mathcal{G} erhalten

wir vielleicht keinen Differenzkokern mehr, aber sicher immer noch einen Kokegel von $((\mathcal{G}\epsilon \cdot \mathcal{F})_A, \mathcal{G}\mathcal{F}a)$. Das letztere parallele Paar besitzt den Differenzkokern (A, a) . Dies wissen wir, weil wir gezeigt hatten, dass $((\epsilon \cdot \mathcal{F})_A, \mathcal{F}a)$ ein \mathcal{G} -gespaltenes Paar ist. Damit bekommen wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{A} & \xrightarrow[\mathcal{G}\mathcal{F}a]{(\mathcal{G}\epsilon\mathcal{F})_A} & \mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightarrow{a} & A \\ & & \searrow \mathcal{G}\kappa_{(A,a)} & & \downarrow \exists! \eta'_{(A,a)} \\ & & & & \mathcal{G}\Psi(A, a) \end{array}$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, wie diese Wahl von η' auf Morphismen arbeitet und dass wir in der Tat eine natürliche Transformation erhalten. Nimm also einen Morphismus $(A, a) \rightarrow (B, b)$ und betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{G}\kappa_{(A,a)} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \mathcal{G}\mathcal{F}A & \xrightleftharpoons[\eta_A]{a} & A & \xrightarrow{\eta'_A} & \mathcal{G}\Psi(A, a) \\ \downarrow \mathcal{G}\mathcal{F}f & & \downarrow f & & \downarrow \mathcal{G}\Psi f \\ \mathcal{G}\mathcal{F}B & \xrightleftharpoons[\eta_B]{b} & B & \xrightarrow{\eta'_B} & \mathcal{G}\Psi(B, b) \\ & & \mathcal{G}\kappa_{(B,b)} & & \end{array}$$

Wir haben $a \circ \eta_A = \mathbf{id}_A$ und $b \circ \eta_B = \mathbf{id}_B$.

Wir bemerken

$$\mathcal{G}\Psi f \circ \eta'_A \circ a = \mathcal{G}\Psi f \circ \mathcal{G}\kappa_A = \mathcal{G}(\Psi f \circ \kappa_A) = \mathcal{G}(\kappa_B \circ \mathcal{F}f) = \mathcal{G}\kappa_B \circ \mathcal{G}\mathcal{F}f = \eta'_B \circ b \circ \mathcal{G}\mathcal{F}f.$$

Also ist $\mathcal{G}\Psi f \circ \eta'_A \circ a = \eta'_B \circ b \circ \mathcal{G}\mathcal{F}f$.

Komponieren wir von rechts mit η_A , so erhalten wir

$$\mathcal{G}\Psi f \circ \eta'_A = \mathcal{G}\Psi f \circ \eta'_A \circ a \circ \eta_A = \eta'_B \circ b \circ \mathcal{G}\mathcal{F}f \circ \eta_A = \eta'_B \circ f \circ a \circ \eta_A = \eta'_B \circ f$$

wie gewünscht.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die beiden Transformationen die Dreiecksidentitäten für Adjunktionen erfüllen. Da wir zuvor sehr ausführlich mit jeder der nötigen Eigenschaften hantiert haben, sei dies hier dem Leser überlassen. \square

Bemerkung 5.2.2. Der zu Φ linksadjungierte Funktor ist eindeutig bis auf natürliche Isomorphie. Daher werden wir von der im Beweis angegebenen konkreten Konstruktion immer dann Gebrauch machen können, wenn wir den Funktor Ψ verwenden wollen.

Nach diesem aufwendigeren Beweis des Lemmas folgt der restliche Beweis des Satzes:

Lemma 5.2.3. Sei alles wie im vorangegangenen Lemma 5.2.1. Sei Ψ der zu Φ linksadjungierte Funktor. Nun gelte zusätzlich, dass der Funktor \mathcal{G} Differenzkokerne von \mathcal{G} -gespaltenen Paaren erhalte. Dann ist die Einheit $\eta' : \mathbf{id}_{\mathcal{C}^T} \rightarrow \Phi\Psi$ ein Isomorphismus.

Beweis. Sei (A, a) eine T -Algebra. Dann betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{\eta_{\mathcal{G}FA}}{\curvearrowright} & \\
 \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{G}\epsilon_{FA}} \\ \xrightarrow{\mathcal{G}\mathcal{F}a} \end{array} & \mathcal{G}\mathcal{F}A & \begin{array}{c} \xleftarrow{\eta_A} \\ \xrightarrow{a} \end{array} & A \\
 & & \searrow \mathcal{G}\kappa_{(A,a)} & & \downarrow \eta'_A \uparrow \exists! v_{(A,a)} \\
 & & & & \mathcal{G}\Psi(A, a)
 \end{array}$$

Nun ist $(\Psi(A, a), \kappa_{(A,a)})$ ein Differenzkern des \mathcal{G} -spaltenden Paares $(\epsilon_{FA}, \mathcal{F}a)$. Also ist mit $(\mathcal{G}\Psi(A, a), \mathcal{G}\kappa_A)$ ein Differenzkern des Paares $(\mathcal{G}\epsilon_{FA}, \mathcal{G}\mathcal{F}(a))$ gegeben. Ergo gibt es genau einen Pfeil $v_{(A,a)}$ wie im Diagramm, sodass die Gleichungen $a = v_{(A,a)} \circ \mathcal{G}\kappa_A = v_A \circ \eta'_A \circ a$ gelten.

Weil a ein Epimorphismus ist (zur Erinnerung: Mit Rechtsinversen η_A), haben wir also die Gleichheit $v_A \circ \eta'_A = \mathbf{id}_A$.

Außerdem ist nun $\mathcal{G}\kappa_A = \eta'_A \circ a = \eta'_A \circ v_A \circ \mathcal{G}\kappa_A$. Da auch $\mathcal{G}\kappa_A$ ein Epimorphismus ist, ist also $\eta'_A \circ v_{(A,a)} = \mathbf{id}_{\mathcal{G}\Psi(A,a)}$. Also ist η'_A ein natürlicher Isomorphismus. \square

Lemma 5.2.4. Sei alles wie im vorangegangenen Lemma 5.2.3. Außerdem gelte zusätzlich, dass \mathcal{G} Isomorphismen reflektiert. Dann ist die Koeinheit $\epsilon' : \Psi\Phi \rightarrow \mathbf{id}_D$ ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}A & \begin{array}{c} \xrightarrow{(\mathcal{G}\epsilon_{\mathcal{F}\mathcal{G}})_A} \\ \xrightarrow{\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\epsilon_A} \end{array} & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}A & \xrightarrow{\mathcal{G}\kappa_{(\mathcal{G}A, \mathcal{G}a)}} & \mathcal{G}\Psi\mathcal{G}A \\
 & & \searrow \mathcal{G}\epsilon_A & & \downarrow \mathcal{G}\epsilon'_A \uparrow \eta'_{\mathcal{G}A} \\
 & & & & \mathcal{G}A
 \end{array}$$

Verwende, dass $\mathcal{G}\kappa_{\mathcal{G}A}$ wegen der Erhaltungseigenschaft von \mathcal{G} und $\mathcal{G}\epsilon_A$ als Strukturmorphismus der Algebra $(\mathcal{G}A, \mathcal{G}\epsilon_A)$ beide Epimorphismen sind und verfähre wie im vorangegangenen Beweis mit $\mathcal{G}\epsilon_A = \mathcal{G}\epsilon'_A \circ \mathcal{G}\kappa_{(\mathcal{G}A, \mathcal{G}a)}$ und $\mathcal{G}\kappa_{\mathcal{G}A} = \eta'_{\mathcal{G}A} \circ \mathcal{G}\epsilon_A$. \square

Damit ist schließlich auch der Satz von Beck bewiesen, weil es sich somit bei Φ um eine Kategorienäquivalenz handelt. \square

6. Ausblick und einige Anwendungen

6.1. Vorbemerkung

Der folgende Abschnitt dient unter anderem als Motivation für unsere bisherige Diskussion, insbesondere für Monaden und den Beckschen Monadizitätssatz. Aus Platzgründen ist eine ausführliche Behandlung der meisten Themen nicht möglich; wir werden uns daher erlauben, im folgenden weniger rigoros und ausführlich zu sein als bisher und auf einige Beweise zu verzichten.

Dem geneigten Leser, der sich für weitere theoretische Eigenschaften monadischer Funktoren interessiert, sei vor allem die Lektüre des Abschnitts 3.4 aus [BW05, 103 ff.] empfohlen.

6.2. Das kanonische Gegenbeispiel

Proposition 6.2.1. Der Vergissfunktork $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist nicht monadisch.

Beweis. Wäre der Vergissfunktork monadisch, so müsste er Isomorphismen reflektieren. Das hieße aber, dass jede bijektive stetige Abbildung ein Homöomorphismus sein müsste. Das ist bekanntermaßen inkorrekt. Nimm zum Beispiel die offensichtliche Abbildung $([0, 1], \mathcal{T}_{std}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{T}_{triv})$, die die Identität der zugrundeliegenden Mengen ist. Diese Abbildung ist stetig und bijektiv, aber jede echte offene Teilmenge $\emptyset \neq U \neq X$ ist nicht offen in $[0, 1]$ und die Abbildung somit kein Homöomorphismus. \square

Der Beweis legt die Vermutung nahe, dass der Vergissfunktork für die Kategorie kompakter Hausdorffräume monadisch sein könnte, da für ihn das Gegenargument gerade nicht funktioniert. Dies wird im nächsten Unterabschnitt bewiesen.

6.3. Kompakte Hausdorffräume und Prätopoi

Betrachte den Vergissfunktork $\mathcal{G} : \mathbf{CptHaus} \rightarrow \mathbf{Set}$, wobei $\mathbf{CptHaus}$ die übliche Kategorie kompakter Hausdorffräume ist.

Proposition 6.3.1. Der Funktork \mathcal{G} ist monadisch.²¹

Beweis. Wir verwenden den Satz von Beck. Zuerst ist zu zeigen, dass \mathcal{G} einen linksadjungierten Funktork besitzt. Dazu definieren wir den Funktork $\mathcal{F} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{CptHaus}$, indem wir Mengen X auf die Stone-Čech-Kompaktifizierung des topologischen Raumes (X, \mathcal{T}_{discr}) schicken und die Bilder von Morphismen auf die natürliche Weise wählen. Als Konsequenz der Definition der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist dieser Funktork zu \mathcal{G} linksadjungiert.

²¹Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [BJ08, 182 f.]. Wir hingegen folgen hier [TSBv17].

Zweitens ist zu prüfen, dass \mathcal{G} Isomorphismen reflektiert. Das ist aber gerade dazu äquivalent, dass eine bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ein Homöomorphismus sein muss. Letzteres ist korrekt.

Also bleibt noch die dritte Beckbedingung. Betrachte ein \mathcal{G} -gespaltenes Paar (f, g) von X nach Y in $\mathbf{CPTHaus}$. Sei $h : Y \rightarrow Z$ der zugehörige Differenzkern in \mathbf{TOP} . Dieser hat die Form eines Faktorraums des kompakten Raumes Y und ist damit selbst kompakt. Damit genügt es, zu zeigen, dass Z ein Hausdorffraum ist. Hierfür siehe man Abschnitt 3 in [TSBv17, vom 15.06.2017]. \square

Mithilfe dieses Resultats werden wir nun zeigen, dass $\mathbf{CPTHaus}$ ein *Prätospos* ist. Hier ist nicht der Platz, um in eine Diskussion der konkrete Bedeutung von Prätosposi und dem spezifischeren Konzept eines Topos einzutreten. Selbst eine einführende Diskussion ist auf wenigen Seiten und ohne weitere Vorarbeit kaum zu leisten. Wichtig ist hier daher nur, dass (Prä)Topoi von großer Nützlichkeit sind — nicht nur in der algebraischen Geometrie, woher sie ursprünglich stammen, sondern auch in der kategoriellen Logik. Für eine umfangreiche Einführung in Topoi siehe man Kapitel 2 aus [BW05, ab S. 62] bzw. Kapitel 7 für eine kurze Diskussion von Prätosposi und ihrer Bedeutung in der mathematischen Logik. Für einen schnellen Überblick siehe man zum Beispiel [SCS⁺17] und für eine Diskussion der Geschichte der Topostheorie [McL90].

Um Prätosposi definieren zu können, benötigen wir einige Begriffe, die auf den Leser womöglich etwas technisch wirken werden. Der Vollständigkeit halber geben wir hier saubere Definitionen, aber für die meisten der Begriffe wird ein mehr oder minder intuitives Verständnis genügen.

Definition 6.3.2 (Kernpaar). Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} . Ein *Kernpaar* von f besteht aus den beiden Morphismen nach X des Faserprodukts $X \times_Y X$ in Bezug auf das parallele Paar (f, f) von X nach Y .

Definition 6.3.3 (regulärer Epimorphismus, regulärer Monomorphismus). Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt *regulärer Epimorphismus*, falls f ein Kolimit eines beliebigen parallelen Paares ist. Analog heißt f *regulärer Monomorphismus*, wenn f ein Limit eines beliebigen parallelen Paares ist.

Proposition 6.3.4. Ein regulärer Epimorphismus ist ein Epimorphismus im normalen Sinne, also rechtskürzbar.

Beweis. Sei $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ ein paralleles Paar. Sei (D, d) ein Kolimit. Wir zeigen: d ist ein Epimorphismus. Sei nämlich $g, h : D \rightarrow E$ ein paralleles Paar mit $g \circ d = h \circ d =: a$. Nun ist (E, a) ein Kokegel von (f_1, f_2) . Also gibt es genau einen Morphismus $\varphi : D \rightarrow E$ mit $\varphi \circ d = a$. Aber sowohl g als auch h sind solche Morphismen. Damit ist bereits $g = h$. \square

Proposition 6.3.5. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus, für den ein Kernpaar existiert. Dann ist f ein regulärer Epimorphismus genau dann, wenn f das Kolimit des Kernpaars ist.

Beweis. Siehe [Tay99, Lemma 5.6.6]. \square

Definition 6.3.6 (reguläre Kategorie). Eine vollständige Kategorie \mathcal{C} heißt *regulär*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes Kernpaar besitzt einen Differenzkokern in \mathcal{C} ,
2. Für jedes kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

gilt: Ist g ein regulärer Epimorphismus, so ist auch f ein solcher.

Bemerkung 6.3.7. Der für unsere Intuition wichtige Aspekt regulärer Kategorien ist, dass jeder Morphismus eindeutig in einen regulären Epimorphismus gefolgt von einem Monomorphismus faktorisiert werden kann.

Proposition-Definition 6.3.8 (Unterobjekt). Sei X ein Objekt in einer Kategorie \mathcal{C} . Monomorphismen $i : U \rightarrow X$ und $j : V \rightarrow X$ heißen *äquivalent* (auch: *isomorph*), falls es einen Isomorphismus $k : U \rightarrow V$ gibt, sodass $i = jk$ ist. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Ein *Unter-, Teil- oder Subobjekt* von X ist eine Äquivalenzklasse K von Monomorphismen $i : U \rightarrow X$.

Beweis. Dass die obige Relation eine Äquivalenzrelation ist, rechnet man direkt nach. □

Konvention 6.3.9. Für ein Unterobjekt K von X und einen gewählten Repräsentanten $i : U \rightarrow X$ sprechen wir auch kurz von U oder i als einem Unterobjekt von X .

Bemerkung 6.3.10. Betrachten wir Unterobjekte von $X \times X$, so betrachten wir also Äquivalenzklassen von Morphismen $i : R \rightarrow X \times X$. Die Angabe solcher Morphismen ist aufgrund der universellen Eigenschaft des Produkts äquivalent zur Angabe von Paaren von Morphismen (p_1, p_2) mit $p_1, p_2 : R \rightarrow X$.

Beispiel 6.3.11. Unterobjekte in **SET** können gerade mit Teilmengen identifiziert werden; solche in **GRP** mit Untergruppen; solche in **R-MOD** mit Untermoduln, solche in **RNG** mit Untergruppen.

Beispiel 6.3.12. Monomorphismen gegeben durch die Inklusion von Unterräumen zusammen mit der induzierten Topologie sind gerade reguläre Monomorphismen von **TOP**. Betrachte aber zum Beispiel den Morphismus $\mathbf{id} : \mathbb{R}_{disc} \rightarrow \mathbb{R}$ von den reellen Zahlen mit der diskreten Topologie auf die reellen Zahlen mit der üblichen Topologie. Diese Abbildung ist stetig und ein Monomorphismus in der Kategorie **TOP**. Dennoch ist sie nicht durch einen Unterraum induziert. Also ist in **TOP** ein Unterobjekt nicht das gleiche wie ein Unterraum mit der induzierten Topologie.

Definition 6.3.13 (vollständige Kategorie). Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *vollständig*, wenn alle Limits kleiner Diagramme in \mathcal{C} existieren.

Definition 6.3.14 (Kongruenz²²). Sei \mathcal{C} eine vollständige Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Eine *Kongruenz(relation) auf dem Objekt X* besteht aus einem Unterobjekt $i : R \rightarrow X \times X$ mit den zugehörigen Morphismen $p_1, p_2 : R \rightarrow X$ und Morphismen r, s, t , für die gilt:

1. Reflexivität: Der Morphismus $r : X \rightarrow R$ ist ein gemeinsames Rechtsinverses von p_1 und p_2 ,
2. Symmetrie: Der Morphismus $s : R \rightarrow R$ vertauscht p_1 und p_2 : $p_1 s = p_2$ und $p_2 s = p_1$,
3. Transitivität: Wir haben einen Morphismus $t : R \times_X R \rightarrow R$, wobei $R \times_X R$ durch das folgende kartesische Diagramm gegeben ist:

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{q_2} & R \\ q_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ R & \xrightarrow{p_2} & X \end{array}$$

Seien $\pi_1, \pi_2 : X \times X \rightarrow X$ die Projektionen. Dann gelten die Gleichungen $p_1 = \pi_1 i$ bzw. $p_2 = \pi_2 i$ sowie $p_1 q_1 = p_1 t$ bzw. $p_2 q_2 = p_2 t$.

Bemerkung 6.3.15. Für unser Verständnis soll genügen, dass es sich bei Kongruenzen um verallgemeinerte „interne“ Äquivalenzrelationen handelt: Intern bedeutet hierbei, dass wir den aus **SET** stammenden Begriff innerhalb der Kategorie \mathcal{C} selbst formulieren können (und nicht als Metabegriff von außen).

Lemma 6.3.16. Jedes Kernpaar ist eine Kongruenz.

Beweis. Übung. □

Definition 6.3.17 (Barr-exakte Kategorie²³). Eine reguläre Kategorie \mathcal{C} heißt *Barr-exakt*, wenn jede Kongruenz ein Kernpaar ist.

Definition 6.3.18 (extensive Kategorie²⁴). Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *endlich extensiv*, falls sie endliche Koprodukte enthält und für beliebige Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ der Koprodukt-Funktor $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \rightarrow \mathcal{C}/(X \amalg Y)$ eine Kategorienäquivalenz ist. Für eine Klärung unserer Konventionen in Bezug auf Kommakategorien wie \mathcal{C}/X siehe Anhang A.

Die Kategorie \mathcal{C} heißt *infinitär extensiv*, falls sie kleine Koprodukte enthält und für jede kleine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten der Koprodukt-Funktor $\prod_{i \in I} \mathcal{C}/X_i \rightarrow \mathcal{C}/(\coprod_{i \in I} X_i)$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Eine Kategorie bezeichnen wir auch kurz als *extensiv*, falls sie endlich extensiv ist. Dies ist die übliche Konvention.

Beispiel 6.3.19. Die Kategorie **SET** ist extensiv.

²²Siehe [BvS⁺17].

²³Abschnitt 1 aus [TCS⁺17, vom 27.06.2017].

²⁴Abschnitt 2 aus [STB⁺17, vom 27.06.2017]. Dort finden sich außerdem drei äquivalente Charakterisierungen der gegebenen Definition.

Bemerkung 6.3.20. Der programmatische „Slogan“ für extensive Kategorien ist zu finden in [CLW93, 149] und lautet: „An extensive category is one in which sums exist and are well-behaved.“

Definition 6.3.21 (Prätos²⁵). Ein *Prätos* ist eine Kategorie, die sowohl Barr-exakt als auch extensiv ist.

Proposition 6.3.22 (Monadizität impliziert Barr-Exaktheit²⁶). Sei \mathcal{C} eine reguläre, respektive Barr-exakte Kategorie in welcher reguläre Epimorphismen spalten. Sei T eine Monade. Dann ist \mathcal{C}^T eine reguläre, respektive Barr-exakte Kategorie.

Beweis. Siehe [TCS⁺17, Theorem 2.6]. □

Korollar 6.3.23. Ist $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein monadischer Funktor, und ist \mathcal{C} wie im vorigen Lemma mit regulär bzw. Barr-exakt, dann ist \mathcal{C}^T regulär, bzw. Barr-exakt.

Korollar 6.3.24. Ist $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{SET}$ monadisch, so ist \mathcal{D} Barr-exakt.

Damit erhalten wir sofort für **CPTHaus** eine der beiden Bedingungen für Prätos:

Korollar 6.3.25. Die Kategorie **CPTHaus** ist Barr-exakt.

Diese Strategie funktioniert auch noch für eine Reihe weiterer Kategorien. Wir betrachten folgendes Beispiel:

Proposition 6.3.26. Der Vergissfunktor $\mathcal{G} : \mathbf{GRP} \rightarrow \mathbf{SET}$ ist monadisch.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum vorangegangenen. Siehe zum Beispiel [Ber11, 12 f.]. □

Mithilfe unseres vorigen Korollars folgt damit sofort:

Korollar 6.3.27. Die Kategorie **GRP** ist Barr-exakt.

Kehren wir zurück zur Frage, ob **CPTHaus** sogar ein Prätos ist. Dafür ist nur noch zu zeigen:

Proposition 6.3.28. Die Kategorie **CPTHaus** ist extensiv.

Beweisskizze. Koprodukte in der Kategorie **TOP** der topologischen Räume sind gegeben durch disjunkte Vereinigungen. Damit ist klar, dass **TOP** eine extensive Kategorie ist. Koprodukte in **CPTHaus** sind, wie man leicht prüft, einfach durch die Stone-Čech-Kompaktifizierung disjunkter Vereinigungen gegeben. Damit zeige man die definierende Eigenschaft extensiver Kategorien. □

Satz 6.3.29. Die Kategorie **CPTHaus** ist ein Prätos.²⁷

Beweis. Definitorische Konsequenz mit Proposition 6.3.28 und Korollar 6.3.25. □

²⁵Für eine kurze Einführung in den Begriff, siehe [SHC⁺17, 21.06.2017].

²⁶Theorem 2.6 aus [TCS⁺17, vom 27.06.2017].

²⁷Siehe auch [TSBv17, 21.06.2017].

6.4. Abstieg

Dieser Unterabschnitt widmet sich einer kurzen Diskussion topologischen Abstiegs. Es stellt sich im Anschluss daran heraus, dass man eine Verallgemeinerung der zugehörigen Theorie mit dem Begriff von monadischen Funktoren formulieren kann: Eine umfangreiche Einführung in Abstiegstheorie findet sich in [BLR90, Kapitel 6]. Dieser Abschnitt entstammt größtenteils [JT94].

Wir setzen an dieser Stelle eine Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen der algebraischen Geometrie voraus. Der Vollständigkeit halber erinnern wir uns an die Definition einer Garbe:

Definition 6.4.1 (Garbe). Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X ist eine *Garbe*, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ und alle offenen Überdeckungen $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ das Objekt $\mathcal{F}(U)$ via Restriktion isomorph ist zum Limit des folgenden Diagramms:

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

Dem Leser sollte bekannt sein, wie sich diese Definition über die Verklebung lokal definierter Funktionen motivieren lässt. Zur Erinnerung betrachten wir noch ein Beispiel:

Beispiel 6.4.2. Sei C die Garbe der reellwertigen stetigen Abbildungen: Für beliebige offene Teilmengen U eines topologischen Raumes X ist dabei $CU = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und die Restriktionsmorphisme sind gerade die Restriktionen von Abbildungen auf Unterräume. Sei U in X offen und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U . Ist eine Kollektion stetiger Abbildungen $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die für alle $i, j \in I$ die Bedingung $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ erfüllen, so können wir diese bekanntlich zu einer stetigen Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ verkleben. Umgekehrt ist jede Funktion die Verklebung ihrer Restriktionen $f|_{U_i}$.

Motivation 6.4.3. Die Aufgabe, lokal gegebene Information zu globaler Information zu „verkleben“, lässt sich auch in anderen Kontexten stellen: Zunächst fragen wir statt nach Abbildungen $B \rightarrow \mathbb{R}$ nach stetigen Abbildungen $X \rightarrow B$. Also arbeiten wir in \mathbf{Top}/B . Überdecke B mit offenen Teilmengen B_i . Nehmen wir nun $f : X \rightarrow B$, so lässt sich die Frage stellen, ob sich f durch eine Kollektion von Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow B_i$ beschreiben lässt und umgekehrt, unter welchen Umständen eine solche Kollektion zu einer Abbildung $X \rightarrow B$ verklebt werden kann.

Unser Ziel für dieses Kapitels ist, eine angemessene Verallgemeinerung mithilfe unserer Monadentheorie zu formulieren.

Bevor wir uns mit diesem Spezialfall aber näher auseinandersetzen, kommen wir zu einer allgemeineren Behandlung der Idee, die Kategorie \mathbf{Top}/B zu betrachten. Der folgende Abschnitt folgt [JT94] und wir verzichten auf Beweise.

Definition 6.4.4. Sei B ein topologischer Raum. Sei \mathbb{E} eine Kollektion stetiger Funktionen, die unter Komposition mit Homöomorphismen abgeschlossen ist. Dann notieren wir die volle Unterkategorie von \mathbf{Top}/B , deren Objekte aus \mathbb{E} stammen, als $\mathbb{E}(B)$. Wir bezeichnen $\mathbb{E}(B)$ als Kategorie der \mathbb{E} -Bündel über B und B als *Basis-* oder *Grundraum*.

Der nächste Schritt ist nun, den Grundraum B durch eine „Erweiterung“ durch einen Raum E über B zu ersetzen, um anschließend die Bündel über B via Bündel über E mit gewissen zusätzlichen Daten — den so genannten Abstiegsdaten — zu beschreiben.

Konstruktion 6.4.5. Sei $p : E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung und sei (C, γ) ein \mathbb{E} -Bündel über E . Dann ist das Faserprodukt $E \times_B C$ auf natürliche Weise ein Unterraum des Produktraums $E \times C$, da $E \times_B C \cong \{(x, c) | p(x) = p\gamma(c)\}$. Für beliebige $x, y \in E$ mit $p(x) = p(y)$ haben wir kanonische Einbettungen

$$j_{x,y} : \gamma^{-1}y \rightarrow E \times_B C, c \mapsto (x, c).$$

Entsprechend ist

$$E \times_B C = \bigcup_{x,y \in E} j_{x,y}(\gamma^{-1}y).$$

Definition 6.4.6 (Abstiegsdatum). Ein *Abstiegsdatum* für (C, γ) relativ zu p ist gegeben durch eine Familie von Homöomorphismen

$$\xi_{x,y} : \gamma^{-1}x \rightarrow \gamma^{-1}y,$$

wobei x, y aus E sind und $p(x) = p(y)$ ist, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

1. Funktorialität: Für alle x, y, z der selben p -Faser haben wir $\xi_{x,x} = id$ und $\xi_{x,z} = \xi_{y,z} \circ \xi_{x,y}$.
2. Verklebung: Für alle $x, y \in E$ mit $p(x) = p(y)$ ist die eindeutige Abbildung $\bar{\xi} : E \times_B C \rightarrow E \times_B C$ stetig, die folgendes Diagramm kommutativ werden lässt:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^{-1}x & \xrightarrow{\xi_{x,y}} & \gamma^{-1}y \\ j_{y,x} \downarrow & & \downarrow j_{x,y} \\ E \times_B C & \xrightarrow{\bar{\xi}} & E \times_B C \end{array}$$

Hierbei ist $\bar{\xi}$ explizit gegeben durch $(y, c) \mapsto (\gamma(c), \xi_{x,y}(c))$.

Bemerkung 6.4.7. Man könnte die obigen Bedingungen auch einfach von einer Familie beliebiger Abbildungen $\xi_{x,y}$ verlangen. Wegen Bedingung 1. besitzen sie alle eine Umkehrabbildung, die bereits aus der Familie stammt, und wegen 2. sind sie alle stetig. Damit sind sie bereits Homöomorphismen.

Proposition-Definition 6.4.8. Nimm als Objekte \mathbb{E} -Bündel über E zusammen mit Abstiegsdaten $(C, \gamma, \bar{\xi})$ und als Morphismen $h : (C, \gamma, \bar{\xi}) \rightarrow (C', \gamma', \bar{\xi}')$ nimm Morphismen $h : (C, \gamma) \rightarrow (C', \gamma')$ von \mathbb{E} , die mit den Abstiegsdaten kompatibel sind, das heißt für beliebige x, y der gleichen p -Faser und $c \in \gamma^{-1}x$ muss gelten: $h(\xi_{x,y}(c)) = \xi'_{x,y}(h(c))$.

Dies ist eine Kategorie, die wir mit $\text{Des}_{\mathbb{E}}(p)$ notieren.

Proposition-Definition 6.4.9. Ist \mathbb{E} unter Bildung von Faserprodukten entlang p stabil, so haben wir mit der Zuordnung von Morphismen $f \mapsto \mathbf{id}_{\mathbb{E}} \times_B f$ einen Funktor

$$p^* : \mathbb{E}(B) \rightarrow \mathbb{E}(E).$$

Wir bezeichnen ihn als *Pullback-Funktor*.

Dieser kann zum sogenannten *Vergleichsfunktor*

$$\Phi^p : \mathbb{E} \rightarrow \text{Des}_{\mathbb{E}}(p), (A, \alpha) \mapsto (E \times_B A, \pi_1, \bar{\phi})$$

mit der natürlichen Projektion $\pi_1 : E \times_B A \rightarrow E$, gehoben werden.

Bemerkung 6.4.10. Unter gewissen Stabilitätsbedingungen („descent stability“, siehe [JT94, Theorem 1.10, 256]) existiert ein zum Vergleichsfunktor linksadjungierter Funktor.

Das soll als Übersicht vorerst genügen. Für eine ausführlichere Diskussion siehe [JT94, 249-257].

Wir kehren des besseren Verständnisses halber zu unserem zuvor angesprochenen Spezialfall 6.4.3 zurück.

Nimm einen topologischen Raum B mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Weiters sei ein Raum (A, α) über B gegeben. Unsere Frage von zuvor lautete: Können wir diesen Raum durch Räume (E_i, γ_i) über den U_i beschreiben?

Ein erster Schritt ist, statt mit Restriktionen mit Pullback zu arbeiten und die Zuordnung

$$(A, \alpha) \mapsto \prod_i (\alpha^{-1}(U_i), \alpha^{-1}(U_i) \rightarrow U_i)$$

zu betrachten.

Damit bekommen wir ein Diagramm (ohne etwas über dessen Kommutativität auszusagen!), das dem definierenden Diagramm für Garben stark ähnelt:

$$\mathbf{Top}/B \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{Top}/U_i \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathbf{Top}/(U_i \cap U_j)$$

Bei Garben fordern wir die Gleichheit der Restriktionen auf Schnitten $U_i \cap U_j$. Unser Analogon hierzu besteht darin, geeignete Isomorphismen zu verlangen: Zusätzlich zu Pullbacks entlang den U_i fordern wir Homöomorphismen über $U_i \cap U_j$ mit $\xi_{i,j} : \gamma_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \gamma_j^{-1}(U_i \cap U_j)$, sodass für alle $i, j, k \in I$ die Gleichungen $\xi_{i,i} = id$ und $\xi_{j,k}^i \circ \xi_{i,j}^k = \xi_{i,k}^j$ gelten. Hierbei ist $\xi_{i,j}^k : \gamma_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \rightarrow \gamma_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k)$ die Restriktion von $\xi_{i,j}$. Diese Bedingung heißt in Analogie zu jener aus der Kohomologie-Theorie *Kozykel-Bedingung*. Das ist es aber genau, was wir von Abstiegsdaten fordern.

Sei nun $E = \coprod_{i \in I} U_i$ in \mathbf{Top} . Betrachte die Abbildung $p : E \rightarrow B$, die durch die Identität auf jedem Summanden induziert wird. Dann ist die Kategorie $\prod_{i \in I} \mathbf{Top}/U_i$ äquivalent zu \mathbf{Top}/E .

Außerdem haben wir den Pullback-Funktor

$$p^* : \mathbf{Top}/B \rightarrow \mathbf{Top}/E.$$

Was geschieht nun, wenn der Funktor p^* monadisch ist? Falls das der Fall ist, so ist \mathbf{Top}/B äquivalent zur Kategorie der Eilenberg-Moore Algebren über \mathbf{Top}/E . Der Leser prüfe, dass sich Abstiegsdaten direkt in Algebren der Monade übersetzen und die Kozykel-Bedingung einfach dem Assoziativgesetz für Algebren entspricht.

Damit sind wir am Ziel und können wie folgt verallgemeinern: Anstatt stetige Abbildungen $p : E \rightarrow B$ zu betrachten, können wir damit beginnen, einen beliebigen Morphismus $p : E \rightarrow B$ in einer Kategorie \mathcal{C} mit Faserprodukten zu untersuchen.

Unsere ursprüngliche Frage übersetzt sich dann in die folgende: Für welche Morphismen ist $p^* : \mathcal{C}/B \rightarrow \mathcal{C}/E$ monadisch?

Ein zweiter Verallgemeinerungsschritt ist, statt wie im vorangegangenen Beispiel die gesamte Kategorie \mathcal{C}/B zu betrachten, wie in der ersten gegebenen Konstruktion Kategorien $\mathcal{E}(B)$ von „Strukturen über B “ zu betrachten. Es gibt verschiedene Möglichkeiten das zu formalisieren (siehe [JT94, 247]), auf die wir hier nicht näher eingehen werden. Für unsere Zwecke soll ein intuitiver Zugang genügen.

Auch dann können wir die Kategorie $\text{Des}_{\mathcal{E}}(p)$ der Abstiegsdaten relativ zu p definieren und einen Vergleichsfunktor

$$\Phi^p : \mathcal{E}(B) \rightarrow \text{Des}_{\mathcal{E}}(p)$$

finden. Unter gewissen hier unterschlagenen Bedingungen, den so genannten *Beck-Chevalley-Bedingungen*, ist dann die Kategorie $\text{Des}_{\mathcal{E}}(p)$ zur Eilenberg-Moore Kategorie der Algebren der zu p^* gehörenden Monade äquivalent und Φ^p ist eine Kategorienäquivalenz genau dann, wenn p^* monadisch ist, womit sich also herausstellt, dass unsere Verallgemeinerung gerade die richtige Wahl ist.

Damit haben wir also eine weitere, dieses Mal konzeptionelle, Anwendung unserer Monadentheorie gefunden. Die allgemeinste Formulierung erfolgt im Kontext des so genannten *monadischen Abstiegs*²⁸, auf den wir hier nur verweisen.

²⁸Siehe [vSBS17, zuletzt abgerufen am 05.07.2017].

Danksagung

Mein herzlichster Dank gilt meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Richard Pink, der geradezu fahrlässig viel Zeit in zahlreichen Besprechungen darauf verwandte, mit mir nicht nur über die involvierte Mathematik zu sprechen, sondern auch die Prinzipien einer stilistisch hochwertigen Arbeit zu erläutern und in Diskussionen zu verteidigen, die sich meine auführerische Persönlichkeit nicht besser hätte wünschen.

Außerdem danke ich Andreas Mono für seine Korrektur- und Verbesserungsvorschläge.

A. Freie Objekte und Kommakategorien

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige kategorientheoretische Begriffe. Der Abschnitt dient in erster Linie der Klärung von Notation und Konventionen.

Proposition-Definition A.0.11. Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Sei $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Die *Kategorie der Objekte unter X via \mathcal{G}* , notiert X/\mathcal{G} , besteht aus allen Paaren (Y, f) mit Objekten $Y \in \mathcal{D}$ und Morphismen $f : X \rightarrow \mathcal{G}Y$. Morphismen $(Y, f) \rightarrow (Y', f')$ sind gerade Morphismen $g : Y \rightarrow Y'$, sodass $f' = \mathcal{G}g \circ f$. Das heißt, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \searrow f' & \\ \mathcal{G}Y & \xrightarrow{\mathcal{G}g} & \mathcal{G}Y' \end{array}$$

Komposition ist durch Komposition in \mathcal{D} induziert. Dies liefert eine wohldefinierte Kategorie.

Definition A.0.12. Ist $\mathcal{G} = \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$, so schreiben wir X/\mathcal{D} statt X/\mathcal{G} und bezeichnen die Kategorie als *Kategorie der Objekte unter X* .

Proposition-Definition A.0.13. Die duale Konstruktion, in der wir Morphismen $f : \mathcal{G}Y \rightarrow X$ betrachten und die restliche Konstruktion analog durchführen, liefert die Kategorie \mathcal{G}/X , die wir als *Kategorie der Objekte über X via \mathcal{G}* bezeichnen. Für $\mathcal{G} = \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$ schreiben wir \mathcal{D}/X und sprechen von der *Kategorie der Objekte über X* .

Bemerkung A.0.14. Es ist möglich, diesen Begriff noch allgemeiner zu fassen. Dafür nehme man Funktoren $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sowie $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$. Die *Kommakategorie \mathcal{G}/\mathcal{H}* ist dann wie folgt definiert: Objekte sind alle Tripel (X, Y, f) , wobei $X \in \mathcal{D}$ und $Y \in \mathcal{E}$ Objekte sind und $f : \mathcal{G}X \rightarrow \mathcal{H}Y$ ein Morphismus aus \mathcal{C} ist. Morphismen $(X, Y, f) \rightarrow (X', Y', f')$ sind dann gerade Paare (g, h) aus Morphismen $g : X \rightarrow X'$ und $h : Y \rightarrow Y'$, sodass $\mathcal{H}h \circ f = f' \circ \mathcal{G}g$ ist. Also kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}X & \xrightarrow{\mathcal{G}g} & \mathcal{G}X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{H}Y & \xrightarrow{\mathcal{H}h} & \mathcal{H}Y' \end{array}$$

Die Kategorien der Objekte über und unter X ergeben sich hieraus jeweils als Spezialfall, indem man genau einen der Funktoren \mathcal{G}, \mathcal{H} als Identität und den Definitionsbereich des jeweils anderen Funktors als terminal wählt.

Abschließend wiederholen wir den Begriff des freien Objekts.

Definition A.0.15. Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und C ein Objekt von \mathcal{C} . Ein *freies \mathcal{D} -Objekt von C hinsichtlich \mathcal{G}* ist ein Objekt D aus \mathcal{D} , für welches es einen Morphismus $f : C \rightarrow \mathcal{G}D$ gibt, sodass (D, f) ein initiales Objekt der Kommakategorie A/\mathcal{G} ist. Das heißt, für alle Paare (D', f') mit $D' \in \mathcal{D}$ und $f' : C \rightarrow \mathcal{G}D'$ gibt es genau einen Morphismus $g : D \rightarrow D'$ mit $\mathcal{G}(g) \circ f = f'$.

Bemerkung A.0.16. Dieser Begriff ist vor allem dann von Belang, wenn es sich bei \mathcal{G} um einen Vergissfunktorkategorie handelt — das ist der Fall, für den die meisten gewöhnlichen freien Objekte definiert sind: Man denke an freie Halbgruppen, Gruppen, Moduln und so weiter. Da aber der Begriff Vergissfunktorkategorie nicht formalisiert ist, ist es sinnvoll, freie Objekte für allgemeine Funktorkategorien zu definieren.

Literatur

- [Asu14] Ash Asudeh. Auf der Homepage des Autors, users.ox.ac.uk/~cpg10036/handouts/asudeh-se-lfg13.pdf, 2014.
- [Bö87] Reinhard Börger. Coproducts and ultrafilters. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 46:35–47, 1987.
- [Bec03] Jonathan Mock Beck. Triples, algebras and cohomology. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, (2):1–59, 2003. Reprint. Ursprünglich veröffentlicht 1967, Columbia University: PhD Thesis.
- [Ber11] Carsen Berger. On some aspects of the theory of monads. REU Paper, VIGRE at the University of Chicago 2011, abgerufen via <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Berger.pdf>, 2011.
- [BJ08] Francis Borceux and George Janelidze. *Galois Theories*. Cambridge University Press, 1 edition, 2008.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron Models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [Bra16] Martin Brandenburg. *Kategorientheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2016.
- [BvS⁺17] Toby Bartels, Zoran Škoda, Mike Shulman, Eric Forgy, Urs Schreiber, et al. Congruences. <https://ncatlab.org/nlab/show/congruence>, Juni 2017.
- [BW05] Michael Barr and Charles Wells. *Toposes, Triples and Theories*. Reprints in Theory and Applications of Categories (12), 2005. Reprint. Ursprünglich veröffentlicht via Springer-Verlag, New York, 1985.
- [BW12] Michael Barr and Charles Wells. *Category Theory for Computing Science*. Reprints in Theory and Applications of Categories (22), 2012. Reprint. Ursprünglich veröffentlicht in Prentice-Hall International Series in Computer Science, 1995.
- [CLW93] Aurelio Carboni, Stephen Lack, and R.F.C. Walters. Introduction to extensive and distributive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 84:145–158, 1993.
- [Dob04] Ernst-Erich Doberkat. Characterizing the eilenberg-moore algebras for a monad of stochastic relations. *Internes Memorandum des Lehrstuhls für Software-Technologie*, 2004.
- [HP07] Martin Hyland and John Power. The category theoretic understanding of universal algebra: Lawvere theories and monads. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 172:437–458, 2007.
- [JT94] George Janelidze and Walter Tholen. Facets of descent, i. *Applied Categorical Structures*, 2:245–281, 1994.

- [McL90] Colin McLarty. The uses and abuses of the history of topos theory. *British Journal for the Philosophy of Science*, 41:351–375, 1990.
- [Meu97] Wolfgang De Meuter. Monads as a theoretical foundation for aop. In *In International Workshop on Aspect-Oriented Programming at ECOOP*, page 25. Springer-Verlag, 1997.
- [ML78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Science+Business Media, New York, 1978.
- [SCS⁺16] Urs Schreiber, David Corfield, Mike Shulman, Toby Bartels, et al. monad. <https://ncatlab.org/nlab/show/monad>, 2016.
- [SCS⁺17] Mike Shulman, David Corfield, Urs Schreiber, Thomas Holder, et al. topos. <https://ncatlab.org/nlab/show/topos>, 2017.
- [SHC⁺17] Urs Schreiber, Peter Heinig, David Corfield, Mike Shulman, Todd Trimble, Thomas Holder, et al. pretopos. <https://ncatlab.org/nlab/show/pretopos>, 2017.
- [STB⁺17] Mike Shulman, Todd Trimble, Toby Bartels, David Roberts, and Urs Schreiber. extensive category. <https://ncatlab.org/nlab/show/extensive+category>, 2017.
- [Tay99] Paul Taylor. *Practical Foundations of Mathematics*. Cambridge University Press, 1999.
- [TCS⁺17] Todd Trimble, David Corfield, Urs Schreiber, Ingo Blechschmidt, et al. colimits in categories of algebras. <https://ncatlab.org/nlab/show/exact+category>, 2017.
- [TSBv17] Todd Trimble, Urs Schreiber, Toby Bartels, and Zoran Škoda. compactum. <https://ncatlab.org/nlab/show/compactum>, 2017.
- [vBC⁺17] Zoran Škoda, Toby Bartels, David Corfield, Todd Trimble, et al. ultrafilter. <https://ncatlab.org/nlab/show/ultrafilter>, 2017.
- [vSBS17] Zoran Škoda, Urs Schreiber, Toby Bartels, and Mike Shulman. monadic descent. <https://www.ncatlab.org/nlab/show/monadic+descent>, 2017.