Differentialgeometrie I

Wintersemester 2002/2003

Skript zur Vorlesung

Prof. D.A. Salamon

R. Janner J. Mandozzi L. Rapetti M. Rigotti

Dieses Skript bezieht sich vollständig auf die an der ETHZ im Wintersemester 2002/2003 gehaltene Vorlesung Differentialgeometrie I, die wir Prof. Dr. Dietmar A. Salamon zu verdanken haben.
Wir möchten uns auch bei Fabian Ziltener für die unersetzbaren Korrekturen und die freundliche Unterstützung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Erinnerung an die Analysis

Seien $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ offen.
$f : U \to V$ heisst **glatt** (C^∞), wenn f unendlich oft stetig differenzierbar ist, d.h. alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}$ existieren und sind stetig.

Seien $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ beliebige Teilmengen.
$f : X \to Y$ heisst glatt (C^∞), wenn es für jeden Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^l$ gibt, so dass $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. F heisst glatte Fortsetzung von f.

Bemerkung.

1. *$f : X \to Y$ glatt und $g : Y \to Z$ glatt $\Longrightarrow g \circ f : X \to Z$ glatt.*
2. *$id : X \to X$ ist glatt.*

1.1 Diffeomorphismen und Mannigfaltigkeiten

Definition. *Seien $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ beliebige Teilmengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst **Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv ist und f, f^{-1} glatt sind. Falls es einen solchen Diffeomorphismus gibt, nennen wir X und Y diffeomorph.*

Differential-Topologie: Eigenschaften von Mengen $X \subset \mathbb{R}^k$, die invariant sind unter Diffeomorphismen.
Differential-Geometrie: Eigenschaften, die invariant sind unter Diffeomorphismen, die eine "Metrik" erhalten.

Sei $\gamma : [0, 1] \to X \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Kurve.
Die länge von γ ist definiert als $L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt$. Sei $f : X \to Y$ ein Diffeomorphismus, f heisst **Isometrie**, wenn $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$ für alle glatte Abbildungen $\gamma : [0, 1] \to X$.

Definition. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^k$ heisst glatte **Mannigfaltigkeit** der Dimension m (oder m-Mannigfaltigkeit), wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von p gibt, so dass $U \cap M$ diffeomorph ist zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$.*
*Ein Diffeomorphismus $\varphi : U \cap M \to V$ heisst **Karte** von M und $\varphi^{-1} : V \to U \cap M$ heisst **Parametrisierung** von $U \cap M$.*

Bemerkung. *$M \subset \mathbb{R}^k$ eine m-Mannigfaltigkeit $\Longrightarrow m \leq k$.*

Beispiel (Mannigfaltigkeiten).

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} = S^2 \qquad 2-\textit{Sphäre} \\
M_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\} = \textit{ Rotationshyperboloid} \\
M_3 &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid |z_1| = |z_2| = 1\} = \mathbb{T}^2 \qquad \textit{Torus} \\
M_4 &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbb{1}\} = O(n) \qquad \textit{Menge der orthogonalen Matrizen} \\
M_5 &= \{V \in \mathbb{C}^n \mid V \textit{ ist ein } \mathbb{C}\textit{-linearer Unterraum der Dimension } k\} = \\
&= G(k,n) \quad \textit{komplexe Grassmann'sche Mannigfaltigkeit} \\
M_6 &= \mathbb{R}^n \\
M_7 &= \textit{offene Teilmenge von } \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Beispiel (Karte).
$M = S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$
$U = \{(x,y,z) \mid z > 0\}$
$V = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$
$\varphi(x,y,z) = (x,y)$, $\varphi : S^2 \cap U \to V$
$\varphi^{-1} = (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$

Ableitung
Seien $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ offen, $f : U \to V$ glatt, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^k$.
$df(x)\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x+t\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t}$
$df(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ linear

$$
df(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_k \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_l/\partial x_1 & \dots & \partial f_l/\partial x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times k} \qquad \text{Jacobi-Matrix}
$$

1. Kettenregel: $f : U \to V$, $g : V \to W$, $x \in U \Longrightarrow d(g\circ f)(x) = dg(f(x))df(x)$.
2. $A \in \mathbb{R}^{l\times k}$, $f(x) = Ax \Longrightarrow df(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Lemma 1.1. *Seien $U \in \mathbb{R}^k$, $V \in \mathbb{R}^l$ offen, $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann folgt:*

1. $k = l$.
2. $\det(df(x)) \neq 0, \quad \forall x \in U$.

Beweis. Sei $x \in U$ und $y := f(x)$. Sei $g := f^{-1} : V \to U$.
$\Longrightarrow g\circ f = id_U, \quad f\circ g = id_V \Longrightarrow dg(y)df(x) = \mathbb{1}_{k\times k}, \quad df(x)dg(y) = \mathbb{1}_{l\times l}$
$\Longrightarrow k = l$.
$df(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k=l}$ bijektiv. □

Satz 1.2 (Inverse Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ glatt, $x \in \Omega$, $\det(df(x)) \neq 0$. Dann $\exists\, U \subset \Omega$ offen so dass $x \in U$, $f(U)$ offen ist, und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beispiel. $f = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$
$\det(df(x,y)) \neq 0, \quad \forall x, y.$
Beachte, dass f nicht global injektiv.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ glatt.

Definition. *$y \in \mathbb{R}^l$ heisst **regulärer Wert** von f, wenn $df(x)$ surjektiv ist für jedes $x \in f^{-1}(y)$. y heisst **singulärer Wert** von f, wenn es kein regulärer Wert ist.*

Beispiel (Reguläre Werte).

1. $l = 1, \quad df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$
   y regulärer Wert $\Longleftrightarrow df(x) \neq 0, \quad \forall x \in f^{-1}(y)$.
2. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$
   y regulärer Wert $\Longleftrightarrow y \neq 0$.
3. $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$
   y regulärer Wert $\Longleftrightarrow y \neq 0$.
4. $l > k, \quad df(x) \in \mathbb{R}^{l \times k}$ *nie surjektiv*
   y regulärer Wert $\Longleftrightarrow y \notin f(x)$.

Satz 1.3 (Satz von Sard). *$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ glatt.*
$\Longrightarrow$ Die Menge der singulären Werte von f hat Mass null.

Satz 1.4 (Implizite Funktionen). *$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $l < k$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ glatt, $y \in \mathbb{R}^l$ regulärer Wert. Dann ist $M := f^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^k$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k - l$.*

Beweis. Sei $p \in M$.

1. $df(p) \in \mathbb{R}^{l \times k}$ surjektiv.
   Wähle $A \in \mathbb{R}^{(k-l) \times k}$ so dass $\det(\binom{df(p)}{A}) \neq 0$.
2. Definiere $F : \Omega \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$, $F(x) := \binom{f(x)}{Ax}$.
   Es gilt $dF(p) = \binom{df(p)}{A}$ und $\det dF(p) \neq 0$.
3. Nach Satz 1.2 $\exists\, U \subset \Omega, \exists\, W \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$ offen so, dass $p \in U$ und $F|_U : U \to W = F(U)$ ein Diffeomorphismus ist.
4. Definiere $V := \{z \in \mathbb{R}^{k-l} \mid (y,z) \in W\}$, dies ist eine offene Umgebung von Ap.
   $\Rightarrow$ Die Abbildung $U \cap f^{-1}(y) \to V$, $x \mapsto Ax$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $V \to U \cap f^{-1}(y)$, $z \mapsto F^{-1}(y,z)$.
   $\Rightarrow M$ erfüllt die Definition einer Mannigfaltigkeit.

$\square$

1.2 Tangentialraum

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$.

Definition. *Der* ***Tangentialraum*** *von M an der Stelle $p \in M$ ist definiert durch*

$$T_pM := \{\dot\gamma(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \to M \textit{ glatt}, \gamma(0) = p\}.$$

Lemma 1.5. *$T_pM \subset \mathbb{R}^k$ ist ein linearer Unterraum der Dimension $m = \dim M$.*

Beweis. Wähle Parametrisierung $\psi : V \to U \cap M$,
so dass für $x_0 \in V$ und $p \in U$ gilt $\psi(x_0) = p$.
Beachte ψ ist ein Diffeomorphismus.

Behauptung. $T_pM = \operatorname{im} d\psi(x_0)$.
Aus der Behauptung folgt, dass T_pM ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^k$ ist und $d\psi(x_0)$ injektiv ist.
Dann gilt $\dim T_pM = m$.

Beweis der Behauptung.

1. Wir zeigen $T_pM \subset \operatorname{im} d\psi(x_0)$:
   Sei $v \in T_pM \Rightarrow \exists\, \gamma : \mathbb{R} \to M$ glatt, so dass $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$.
   $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \ |t| < \varepsilon \Rightarrow \gamma(t) \in U$.
   Definiere $\beta := \psi^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$.
   $\Rightarrow \gamma(t) = \psi(\beta(t)), \quad$ für $-\varepsilon < t < \varepsilon$.
   $\Rightarrow \dot\gamma(t) = d\psi(\beta(t))\dot\beta(t)$.
   Zusammen mit $\beta(0) = \psi^{-1}(\gamma(0)) = \psi^{-1}(p) = x_0$ folgt
   $v = \dot\gamma(0) = d\psi(\beta(0))\dot\beta(0) = d\psi(x_0)\dot\beta(0)$,
   d.h. $v \in \operatorname{im} d\psi(x_0)$.

2. Wir zeigen $\operatorname{im} d\psi(x_0) \subset T_pM$:
   Definiere $v := d\psi(x_0)\xi, \ \xi \in \mathbb{R}^m$.
   Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B}_{\varepsilon|\xi|}(x_0) \subset V$, wobei $\overline{B}_{\varepsilon|\xi|}(x_0) = \{x \mid |x - x_0| \le \varepsilon|\xi|\}$.
   Wähle $\rho : \mathbb{R} \to [-\varepsilon, \varepsilon]$ so dass $\rho(0) = 0$ und $\dot\rho(0) = 1$.
   Definiere $\gamma(t) := \psi(\underbrace{x_0 + \rho(t)\xi}_{\in V\, \forall t})$.
   Es gilt $\gamma(0) = \psi(x_0) = p$ und $\dot\gamma(0) = d\psi(x_0)\xi = v$.

□
□

Beispiel (Tangentialraum)**.** *$M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$;*
$T_xS^n = x^\perp = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\xi_i = 0\}$;
Betrachte eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ mit $\gamma(0) = x$, $1 = |\gamma(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i(t)^2 \ \forall t$
$\Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} 2\gamma_i(t)\dot\gamma_i(t) = 2\langle\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle$
Für $t = 0 \Longrightarrow \langle x, \dot\gamma(0)\rangle = 0$.

Beispiel (Tangentialraum). *$M = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbb{1}\}$;*
$T_A O(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T X + X^T A = 0\}$;
Betrachte eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to O(n)$, $t \mapsto A(t)$, $A(0) = A$, $A(t)^T A(t) = \mathbb{1}$
$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} A(t)^T A(t) = A(t)^T \dot{A}(t) + \dot{A}(t)^T A(t)$
Für $t = 0 \Rightarrow A^T \dot{A}(0) + \dot{A}(0)^T A = 0$.

Lemma 1.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ glatt, $y \in \mathbb{R}^l$ regulärer Wert, $x \in M := f^{-1}(y)$*
$\Longrightarrow T_x M = \ker df(x)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $T_x M \subset \ker df(x)$.
Sei $\xi \in T_x M \Rightarrow \exists \gamma : \mathbb{R} \to M = f^{-1}(y)$ so, dass $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = \xi$.
$\Rightarrow f(\gamma(t)) = y, \ \forall t$
$\Rightarrow df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0$
Für $t = 0$ gilt: $df(x)\xi = 0$,
d.h. $\xi \in \ker df(x)$.
Jetzt beachte, dass nach Satz 1.4 und Lemma 1.5 gilt:
$\dim T_x M = \dim M = k - l$.
Da $\dim \ker df(x) = \dim \mathbb{R}^k - \dim \underbrace{\operatorname{bild} df(x)}_{=\mathbb{R}^l} = k - l$, folgt die gewünschte Gleichheit. $\square$

1.3 Tangentialbündel

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition. *Das **Tangentialbündel** ist definiert als*

$$TM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\} \ \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k.$$

Lemma 1.7. *Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte m-Mannigfaltigkeit $\Longrightarrow TM \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ ist eine glatte $2m$-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Sei $\varphi : U \cap M \to V$ eine Karte von M. O.B.d.A. φ lässt sich auf ganz U fortsetzen: $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$.
Seien $\tilde{U} := U \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{V} := V \times \mathbb{R}^m$.
Definiere $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\tilde{\varphi}(p, v) := (\varphi(p), d\varphi(p)v)$,
$\Rightarrow \tilde{\varphi}|_{\tilde{U}\cap TM} : \tilde{U} \cap TM \to \tilde{V}$ ist ein Diffeomorphismus. $\square$

1.4 Tangentialabbildung

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte m-Mannigfaltigkeit und $N \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung.

Definition. *Die* ***Tangentialabbildung*** $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ *an der Stelle* $p \in M$ *ist wie folgt definiert:*
sei $v \in T_pM$, *wähle eine glatte Kurve* $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *so dass* $\gamma(0) = p$ *und* $\dot\gamma(0) = v$, *dann definiere*

$$df(p)v := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) \ \in T_{f(p)}N.$$

Lemma 1.8.

1. $df(p)v$ *ist wohldefiniert, d.h.* $df(p)v$ *ist unabhängig von der Wahl von* γ.
2. $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ *ist linear.*
3. $df : TM \to TN,\ (p, v) \mapsto (f(p), df(p)v)$ *ist glatt.*

Beweis. Sei $p \in M$. Nach der Definition von Glattheit gilt: $\exists U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $p \in U$ und $\exists\, F : U \to \mathbb{R}^l$ glatt so, dass $F|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$.

Behauptung. $df(p) = dF(p)|_{T_pM}$.

Beachte, dass $dF(p) \in \mathbb{R}^{l\times k}$ die Jacobi-Matrix von F an der Stelle p ist, d.h.

$$dF(p) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1(p) & \dots & \partial F_1/\partial x_k(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_l/\partial x_1(p) & \dots & \partial F_l/\partial x_k(p) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l.$$

Da $dF(p)$ unabhängig von γ ist, folgt 1.
Da die rechte Seite der Gleichung in der Behauptung linear ist, ist auch die linke Seite linear, damit folgt 2.
Für die dritte Eigenschaft, bemerke zuerst, dass $df|_{U\times\mathbb{R}^k\cap TM} = dF|_{U\times\mathbb{R}^k\cap TM}$.
Betrachte dann die Funktion $U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, $(x, \xi) \mapsto (F(x), dF(x)\xi)$, d.h. $df|_{U\times\mathbb{R}^k\cap TM}$ ist die Restriktion einer glatten Funktion auf $U \times \mathbb{R}^k$, damit ist auch die Glattheit bewiesen.

Beweis der Behauptung. Sei $v \in T_pM$. Dann gibt es eine glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^k$ so, dass $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$.
$\Rightarrow df(p)v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(\gamma(t)) = dF(p)v.$ □ □

Grundregeln
Kettenregel: $f : M \to N, g : N \to P, p \in M \Longrightarrow d(g \circ f)(p) = dg(f(p))df(p)$.
Identität: $id : M \to M$ glatt $\Longrightarrow d(id)(p) = id : T_pM \to T_pM$.

Korollar 1.9. *Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann folgt:*

1. $\dim M = \dim N$.
2. $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ *ist ein Isomorphismus* $\forall p \in M$.

Beweis. Wie in Lemma 1.1. $\square$

Satz 1.10 (Inverse Funktionen)**.** *Seien $M \subset \mathbb{R}^k, N \subset \mathbb{R}^l$ glatte Mannigfaltigkeiten mit* $\dim M = \dim N$. *Sei $f : M \to N$ glatt mit $df(p_0) : T_{p_0}M \to T_{f(p_0)}N$ bijektiv.*
$\Longrightarrow \exists$ *offene Menge $U \subset M, p_0 \in U, V \subset N, f(p_0) \in V$ so dass $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Sei $\varphi : \hat{U} \to U$ eine Parametrisierung von $U \cap M$ und $\psi : \hat{V} \to V$ eine Parametrisierung von $V \cap N$. Sei $x_0 \in \hat{U}$ so, dass $\varphi(x_0) = p_0$ und $y_0 \in \hat{V}$ so, dass $\psi(y_0) = f(p_0)$. O.B.d.A. $f(\varphi(\hat{U})) \subset \psi(\hat{V})$.
Definiere $g := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \hat{U} \to \hat{V}$. Betrachte das Differential von g an der Stelle x_0:
$dg(x_0) = \underbrace{d\psi(y_0)^{-1}}_{T_{f(p_0)}N \to \mathbb{R}^n} \circ df(p_0) \circ \underbrace{d\varphi(x_0)}_{\mathbb{R}^n \to T_{p_0}M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, bijektiv.
$\overset{\text{Satz 1.2}}{\Longrightarrow} \exists$ offene Mengen $U' \subset \hat{U}$ und $V' \subset \hat{V}$, $x_0 \in U'$ und $y_0 \in V'$ so, dass $g|_{U'} : U' \to V'$ ein Diffeomorphismus ist.
$\Rightarrow f|_{\varphi(U')} = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U')}_{=U} \to \underbrace{\psi(V')}_{=V}$ ist ein Diffeomorphismus. $\square$

Definition. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $q \in N$ heisst **regulärer Wert** von f, wenn für alle $p \in M$ gilt:*

$$f(p) = q \Longrightarrow df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N \text{ ist surjektiv.}$$

Satz 1.11 (Implizite Funktionen)**.** *Seien $M^m \subset \mathbb{R}^k$ und $N^n \subset \mathbb{R}^l$ glatte Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ glatt und $q \in N$ regulärer Wert von f. Dann folgt:*

1. $f^{-1}(q)$ *ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension* $m - n$.
2. $T_pf^{-1}(q) = \ker df(p)$.

Beweis. Wie Satz 1.4.
Hinweis: Sei $p_0 \in f^{-1}(q)$.

1. Wähle lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$ so dass
$$\left.\begin{array}{l} v \in T_{p_0}M \\ df(p_0)v = 0 \\ Av = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0.$$
2. Definiere $F : M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}, F(p) := (f(p), Ap)$.
3. Wende Satz 1.10 auf F an.

$\square$

1.5 Vektorfeld

Definition. *Ein **Vektorfeld** auf einer Mannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^k$ *ist eine glatte Abbildung* $X : M \to \mathbb{R}^k$ *so dass* $X(p) \in T_pM \ \forall p \in M$.

Bemerkung. *Ein Vektorfeld* $X : M \to \mathbb{R}^k$ *induziert eine glatte Abbildung* $\tilde{X} : M \to TM,\ p \mapsto (p, X(p))$ *für die gilt* $\Pi \circ \tilde{X} = id$,
d.h. $\tilde{X}$ *ist ein "Schnitt" des Vektorbündels* $TM \to M$.

Bemerkung. *Im Allgemeinen schreiben wir* X *statt* $\tilde{X}$.

Definition. $\mathrm{Vect}(M) := \{X : M \to \mathbb{R}^k \mid X$ *Vektorfeld auf* $M\}$.

Beispiel (Vektorfeld)**.** $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad T_pM = p^\perp$.
Für $p \in M$ *sei* $X(p) := p \times \xi$, *mit* $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^3$ *ein Vektorfeld auf* M.

Beispiel (Vektorfeld)**.** $M := S^2, \quad X(p) = p \times (p \times \xi)$.

Beispiel (Vektorfeld)**.** $M = \mathbb{R}^2, \quad X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.

Definition. *Sei* $X \in \mathrm{Vect}(M)$ *und* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall. Eine glatte Kurve* $\gamma : I \to M$ *heisst **Integralkurve** von* X *wenn gilt* $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)),\ \forall t \in I$.

Satz 1.12. *Sei* $M \subset \mathbb{R}^k$ *eine glatte Mannigfaltigkeit, sei* $X \in \mathrm{Vect}(M)$ *und* $p_0 \in M$.
Dann gilt:

1. $\exists\ I \subset \mathbb{R}$ *offenes Intervall,* $0 \in I$, $\exists\ \gamma : I \to M$ *so dass*
$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = p_0. \tag{1}$$
2. *Wenn* $\gamma_1 : I_1 \to M,\ \gamma_2 : I_2 \to M$ *zwei Lösungen von (1) sind, so gilt*
$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Beweis.

- Wähle $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ offen und einen Diffeomorphismus $\psi : U \to \psi(U) \subset M$ so, dass $\psi(x_0) = p_0$.
  Definiere $f : U \to \mathbb{R}^m$ durch $f(x) = d\psi(x)^{-1}X(\psi(x))$.
- Wähle eine Abbildung $x : I \to U,\ t \mapsto x(t)$. Definiere $\gamma := \psi(x(t))$.
  Behauptung. $\dot{x}(t) = f(x(t)),\ x(0) = x_0 \Longleftrightarrow \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)),\ \gamma(0) = p_0$.

Beweis der Behauptung.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \dot\gamma(t) = d\psi(x(t))\,\dot x(t) = d\psi(x(t))\,f(x(t)) = X(\psi(x(t))) = X(\gamma(t)) \text{ und}\\
&\quad \gamma(0) = \psi(x(0)) = \psi(x_0) = p_0.\\
&\Leftarrow \dot x(t) = (d\psi(\psi^{-1}\gamma(t)))^{-1}\,\dot\gamma(t) =\\
&\qquad\qquad = d\psi(x(t))^{-1}\,X(\gamma(t)) = d\psi(x(t))^{-1}\,X(\psi(x(t))) = f(x(t)) \text{ und}\\
&\quad x(0) = \psi^{-1}(\gamma(0)) = \psi^{-1}(p_0) = x_0.
\end{aligned}$$

□

- Existenz für gewöhnliche Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m \Rightarrow 1$.
- Eindeutigkeit für gewöhnliche Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ lokale Eindeutigkeit in 2.

- Globale Eindeutigkeit: $I := I_1 \cap I_2$, $A := \{t \in I \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset,\ 0 \in A\\ A \text{ abgeschlossen (in } I)\\ A \text{ offen (lokale Eindeutigkeit)}\end{array}\right\} \Rightarrow A = I.$$

□

Beispiel (Integralkurve)**.** *$M = \mathbb{R}$, $X(x) = x^2$.*
Die Lösung von $\dot x = x^2$, $x(0) = 1$ existiert nicht für alle Zeiten.

Definition. *Sei $X \in \mathrm{Vect}(M)$ und $p_0 \in M$.*
*Das **Existenzintervall** von p_0 ist definiert wie folgt:*

$$I(p_0) := \bigcup\{I \subset \mathbb{R} \mid I \textit{ offenes Intervall, } 0 \in I,\ \exists \textit{ Lösung } \gamma : I \to M \textit{ von } (1)\}.$$

Definition. *Sei $\mathcal{D} := \{(t, p_0) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I(p_0)\}$.*
*$\varphi : \mathcal{D} \to M$ sei definiert durch $\varphi(t, p_0) := \gamma(t)$, wobei $\gamma : I(p_0) \to M$ die eindeutige Lösung von (1) ist. φ heisst **Fluss** oder **Strömung** von X.*

Satz 1.13. *$\mathcal{D}$ und φ haben folgende Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{D}$ ist offen in $\mathbb{R} \times M$;*
2. *$\varphi : \mathcal{D} \to M$ ist glatt;*
3. *$t \in I(p_0)$, $s \in I(\varphi(t, p_0)) \Longrightarrow t + s \in I(p_0)$ und $\varphi(s + t, p_0) = \varphi(s, \varphi(t, p_0))$.*

Beweis. Ohne Beweis □

Definition. *Ein Vektorfeld $X \in \mathrm{Vect}(M)$ heisst* ***vollständig****, wenn $I(p_0) = \mathbb{R}$ für jedes $p_0 \in M$ (d.h. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$).*

Lemma 1.14. *M kompakt $\Longrightarrow$ jedes Vektorfeld auf M ist vollständig.*

Beweis. Sei X ein Vektorfeld und $U_\varepsilon = \{p \in M \mid [-\varepsilon, \varepsilon] \subset I(p)\}$. Dann gilt:

1. U_ε ist offen;
2. $M = \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$.

Da M kompakt ist $\exists\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ so dass $M = U_{\varepsilon_1} \cup \ldots \cup U_{\varepsilon_N}$.
Wähle $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\} > 0$.
$\Rightarrow [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset I(p)\ \forall p \in M$.
$\Rightarrow I(p) = \mathbb{R}\ \forall p \in M$, d.h. X ist vollständig. □

Sei $X \in \mathrm{Vect}(M)$ vollständig ($\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$) und sei $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ Fluss von X.
Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi^t : M \to M$ durch $\varphi^t(p) := \varphi(t, p)$.

Eigenschaften von φ^t:

1. $\varphi^t : M \to M$ ist glatt;
2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$;
3. $\varphi^0 = id$;
4. φ^t ist ein Diffeomorphismus, $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$.

Definiere $\mathrm{Diff}(M) := \{\varphi : M \to M \mid \varphi \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}$.

Der Fluss eines vollständigen Vektorfeldes X ist ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, $t \mapsto \varphi^t$ charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(p) = X(\varphi^t(p)), \quad \varphi^0(p) = p$$

$$\frac{d}{dt}\varphi^t = X \circ \varphi^t, \quad \varphi^0 = id.$$

Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, $\psi : N \to M$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren "Pullback" $\psi^* X \in \mathrm{Vect}(N)$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} q \in N & \xrightarrow{\psi^* X} & TN \\ {\scriptstyle \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\psi} \\ \psi(q) \in M & \xrightarrow{X} & TM \end{array}$$

Explizit heisst das folgendes:

Definition. *Das **Pullback** ist definiert durch:*

$$\psi^* X(q) := d\psi(q)^{-1} X(\psi(q)) \in T_q N.$$

Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Ebenso definieren wir das "Pushforward" $\varphi_* X \in \mathrm{Vect}(N)$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(q) \in M & \xrightarrow{X} & TM \\ {}^{\varphi}\downarrow & & \downarrow^{d\varphi} \\ q \in N & \xrightarrow{\varphi_* X} & TN \end{array}$$

Das heisst:

Definition. *Das **Pushforward** ist definiert wie folgt:*

$$\varphi_* X(q) := d\varphi(\varphi^{-1}(q)) X(\varphi^{-1}(q)) \in T_q N.$$

Bemerkung. *Sei $X \in \mathrm{Vect}(M)$.*

1. $(\psi^{-1})_* X = \psi^* X$.
2. $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to P$ *Diffeomorphismen* $\Rightarrow \psi_* \varphi_* X = (\psi \circ \varphi)_* X$.
3. $\varphi : N \to M$, $\psi : P \to N$ *Diffeomorphismen* $\Rightarrow \psi^* \varphi^* X = (\varphi \circ \psi)^* X$.

1.6 Lieklammer

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine glatte Mannigfaltigkeit.
Seien $X,\ Y : M \to \mathbb{R}^k$ vollständige Vektorfelder (d.h. die Flüsse existieren für alle Zeiten).
Seien $\varphi^t,\ \psi^t \in \mathrm{Diff}(M)$ die Flüsse von X, Y.
Sei $p \in M$. Definiere $\gamma : \mathbb{R} \to M$ durch $\gamma(t) := \varphi^t \circ \psi^t \circ \varphi^{-t} \circ \psi^{-t}(p)$.

Lemma 1.15. *Es gilt:*

1. $\dot{\gamma}(0) = 0$;
2. $\frac{1}{2}\ddot{\gamma}(0) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}((\varphi^s)_* Y)(p) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\big|_{t=0}((\psi^t)^* X)(p) \overset{(**)}{=} dX(p)Y(p) - dY(p)X(p) \in T_p M$.

Bemerkung. $dX(p) : T_p M \to \mathbb{R}^k$, $v \in T_p M \not\Rightarrow dX(p)v \in T_p M$.

Beweis. Definiere $\beta(s,t) := \varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s} \circ \psi^{-t}(p) \in M$.
Also ist $\gamma(t) = \beta(t,t)$.

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(0,t) = X(p) - d\psi^t(\psi^{-t}(p))X(\psi^{-t}(p)). \tag{2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}(s,0) = d\varphi^s(\varphi^{-s}(p))Y(\varphi^{-s}(p)) - Y(p). \tag{3}$$

$\Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial s}(0,0) = 0 = \frac{\partial \beta}{\partial t}(0,0)$.
$\Rightarrow \dot\gamma(0) = \frac{\partial \beta}{\partial s}(0,0) + \frac{\partial \beta}{\partial t}(0,0) = 0$, damit ist 1. bewiesen.
$\Rightarrow \ddot\gamma(0) = \underbrace{\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}(0,0)}_{=0 \text{ da } \beta(s,0)=p} + 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0) + \underbrace{\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}(0,0)}_{=0 \text{ da } \beta(0,t)=p} = 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0)$.

Da β eine glatte Funktion ist, spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keine Rolle.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ddot\gamma(0) &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial \beta}{\partial t}(s,0) \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}((\varphi^s)_* Y)(p). \\
\frac{1}{2}\ddot\gamma(0) &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial \beta}{\partial s}(0,t) \overset{(2)}{=} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} d\psi^t(\psi^{-t}(p))X(\psi^{-t}(p)) = \\
&= +\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \underbrace{d\psi^{-t}(\psi^t(p))}_{d\psi^t(p)^{-1}} X(\psi^t(p)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}((\psi^t)^* X)(p).
\end{aligned}$$

Das heisst $(*)$.
Jetzt zeigen wir $(**)$, aus (3) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ddot\gamma(0) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} d\varphi^s(\varphi^{-s}(p))Y(\varphi^{-s}(p)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s}(p) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s}(p) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (X(\psi^t(p)) - d\psi^t(p)X(p)) = \\
&= dX(p)Y(p) - \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \psi^t \circ \varphi^s(p) = \\
&= dX(p)Y(p) - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} Y(\varphi^s(p)) = \\
&= dX(p)Y(p) - dY(p)X(p).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $(**)$. $\square$

Definition. *Die **Lieklammer** von $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ ist das Vektorfeld*

$$[X,Y](p) := dX(p)Y(p) - dY(p)X(p) \ \in T_pM.$$

Bemerkung. *Manche AutorInnen definieren die Lieklammer mit umgekehrtem Vorzeichen.*

Lemma 1.16.

1. $\varphi^*[X,Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$.
2. $[X,Y] + [Y,X] = 0$.
3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \qquad$ *(Jacobi-Identität).*

Bemerkung. *Es gilt:*

1. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$;
2. $[X, \lambda Y] = \lambda[X,Y], \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Vect}(M)$ *ist eine Lie-Algebra, d.h. ein Vektorraum (über* $\mathbb{R}$*) mit einer bilinearen Abbildung* $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M)$ *welche schiefsymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.*

Beispiel (Lie-Algebra)**.** $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist eine Lie-Algebra:* $[A,B] := AB - BA$.

Bemerkung. *Seien* $X, Y \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$ *so, dass* $X, Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : X(x) = Ax, Y(x) = Bx$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\Longrightarrow [X,Y](x) = (AB - BA)x$.

Lemma 1.17. *Seien* $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ *vollständig,* φ^t, ψ^t *Flüsse. Äquivalent sind:*

1. $[X,Y] = 0$;
2. $\varphi^s \circ \psi^t = \psi^t \circ \varphi^s, \quad \forall s,t$.

Beweis.

2. $\Rightarrow$ 1. :
Definiere $\gamma(t) := \varphi^t \circ \psi^t \circ \varphi^{-t} \circ \psi^{-t}(p) = p \quad \forall t$.
$\Longrightarrow [X,Y](p) = \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(0) = 0$.

1. $\Rightarrow$ 2. :
Schritt 1: Wir wollen zeigen $(\varphi^s)_* Y = Y, \quad \forall s$.
Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\varphi^s)_* Y =& \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (\varphi^r \circ \varphi^s)_* Y = \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (\varphi^r)_*(\varphi^s)_* Y = [X, (\varphi^s)_* Y] = \\ =& [\varphi^s_* X, (\varphi^s)_* Y] = (\varphi^s)_*[X,Y] = 0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow (\varphi^s)_* Y = Y, \quad \forall s$.

Schritt 2: Sei $s \in \mathbb{R}$ fest. Definiere $\gamma(t) := \varphi^s(\psi^t(p))$. Dann gilt:

a) $\gamma(0) = \varphi^s(p)$;

b) $\dot\gamma(t) = d\varphi^s(\psi^t(p))Y(\psi^t(p)) = d\varphi^s(\varphi^{-s}(\gamma(t)))Y(\varphi^{-s}(\gamma(t))) =$
$= (\varphi^s)_* Y(\gamma(t)) \overset{Schritt\,1}{=} Y(\gamma(t))$.

$\Longrightarrow \gamma(t) = \psi^t(\gamma(0)) = \psi^t(\varphi^s(p))$.
$\Longrightarrow \varphi^s(\psi^t(p)) = \gamma(t) = \psi^t(\varphi^s(p))$.

□

$\gamma(t) = \varphi^t \circ \psi^t \circ \varphi^{-t} \circ \psi^{-t}(p) \Rightarrow \dot\gamma(0) = 0,\ \frac{1}{2}\ddot\gamma(0) = [X,Y](p)$.

Allgemein: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ glatt, $\dot\gamma(0) = 0 \Rightarrow$ Die Abbildung $t \mapsto \gamma(\sqrt{t})$, $t \geq 0$ ist differenzierbar an der Stelle $t = 0$ und

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\ddot\gamma(0).$$

Also folgt

$$\begin{aligned}[X,Y](p) =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{\sqrt{t}} \circ \psi^{\sqrt{t}} \circ \varphi^{-\sqrt{t}} \circ \psi^{-\sqrt{t}}(p) = \\ =& \lim_{t\to 0} \frac{\varphi^{\sqrt{t}} \circ \psi^{\sqrt{t}} \circ \varphi^{-\sqrt{t}} \circ \psi^{-\sqrt{t}}(p) - p}{t}.\end{aligned}$$

1.7 Lie-Gruppen

Definition. *Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, heisst **Lie-Gruppe** wenn gilt*

1. *G ist eine Mannigfaltigkeit;*
2. *G ist eine Untergruppe von $Gl(n,\mathbb{R})$, das heisst:*
   a) *$g, h \in G \Rightarrow gh \in G$;*
   b) *$g \in G \Rightarrow \det(g) \neq 0$ und $g^{-1} \in G$.*

Beispiel (Lie-Gruppen)**.**

1. *$G = GL(n,\mathbb{R})$*
2. *$G = SL(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(g) = 1\}$*
3. *$G = SO(n) = \{g \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid g^T g = \mathbb{1},\ \det(g) = 1\}$*
4. *$G = U(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid U^*U = \mathbb{1}\}$, wobei $U^* = \bar U^T$*
   ($n = 1 : U(1) = S^1 \subset \mathbb{C}$)
5. *$G = SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det(U) = 1\}$*

Bemerkung.

1. *$G \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ Lie-Gruppe $\Rightarrow$ Die Abbildungen $G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$ und $G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ sind glatt.*

2. *$v \in T_gG$, $h \in G \Rightarrow vh \in T_{gh}G$.*
   Die Abbildung $T_gG \to T_{gh}G,\ v \mapsto vh$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis. Wähle $\gamma : \mathbb{R} \to G$ so, dass $\gamma(0) = g$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.
$\Rightarrow$ Die Kurve $t \mapsto \gamma(t)h \in G$ ist glatt.
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t)h = vh \in T_{gh}G$.
Die inverse Abbildung ist $T_{gh}G \to T_gG,\ w \mapsto wh^{-1}$. $\square$

Definition. *Sei $G \subset Gl(n)$ eine Lie-Gruppe. Der Vektorraum $T_{\mathbb{1}}G$ heisst **Lie-Algebra** von G. Abkürzung: $Lie(G) := T_{\mathbb{1}}G =: \mathfrak{g}$.*

Beispiel. *$sl(n) := Lie(SL(n)) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{Spur}(\xi) = 0\}$*
$so(n) := Lie(SO(n)) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \xi^T + \xi = 0\}$

Wir werden zeigen, dass $\xi, \eta \in \mathfrak{g} = Lie(G) \Rightarrow [\xi,\eta] = \xi\eta - \eta\xi \in \mathfrak{g}$.

1.8 Exponential-Abbildung

Definition. *Sei $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \in \mathbb{R}$. Wir definieren die **Exponential-Abbildung***

$$\exp(t\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\xi^k}{k!} \ \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Bemerkung. *Es gilt:*

1. *die Reihe konvergiert;*

2. *$\frac{d}{dt}\exp(t\xi) = \xi\exp(t\xi) = \exp(t\xi)\xi$;*

3. *$\exp((t+s)\xi) = \exp(t\xi)\exp(s\xi)$.*

Lemma 1.18. *Sei $G \in GL(n)$ eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g} := Lie(G)$.*

1. *$\xi \in \mathfrak{g} \Longrightarrow \exp(t\xi) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.*

2. *$\gamma : \mathbb{R} \to G$ glatt, $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$, $\gamma(0) = \mathbb{1}$, $\dot{\gamma}(0) = \xi \Longrightarrow \gamma(t) = \exp(t\xi), \quad \forall t$.*

3. *$\xi \in \mathfrak{g}$, $g \in G \Longrightarrow g\xi g^{-1} \in \mathfrak{g}$.*

4. *$\xi, \eta \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [\xi,\eta] = \xi\eta - \eta\xi \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Sei $\xi \in \mathfrak{g}$.

1. Definiere ein Vektorfeld $X_\xi : G \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $X_\xi(g) := \xi g \ \in T_gG$.
   $\overset{Satz\,1.12}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ so, dass $\gamma(0) = \mathbb{1}$ und
   $\dot\gamma(t) = X_\xi(\gamma(t)) = \xi\gamma(t)\ \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.
   Sei $\beta(t) := \gamma(t) - \exp(t\xi)$.
   $\Rightarrow \beta(0) = 0,\ \dot\beta(t) = \xi\beta(t)$.
   $\overset{Eindeutigkeit}{\Longrightarrow} \beta(t) = 0\ \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.
   Für t beliebig gilt $\exp(t\xi) = \exp(\frac{t}{N}\xi)^N \in G$, wobei N so gewählt ist, dass $|\frac{t}{N}| < \varepsilon$.

2. $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) \Rightarrow \dot\gamma(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma(t+s) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma(s)\gamma(t) = \xi\gamma(t)$.
   $\Rightarrow \dot\gamma(t) = \xi\gamma(t) = X_\xi(\gamma(t))$.
   $\Rightarrow \gamma(t) = \exp(t\xi)\ \forall t$.

3. $\gamma(t) := g\exp(t\xi)g^{-1} \in G,\ \gamma(0) = \mathbb{1}$.
   $\Rightarrow g\xi g^{-1} = \dot\gamma(0) \in T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$.

4. $\eta(t) := \exp(t\xi)\eta\exp(-t\xi) \in \mathfrak{g} = Lie(G)$ nach 3.
   $\Rightarrow [\xi,\eta] = \xi\eta - \eta\xi = \dot\eta(0) \in \mathfrak{g}$.

□

Definition. *Seien G, H Lie-Gruppen. Eine Abbildung $\rho : G \to H$ heisst* ***Lie-Gruppen-Homomorphismus****, wenn ρ glatt ist und ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Notation. $\dot\rho := d\rho(\mathbb{1}) : \mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G \to T_{\mathbb{1}}H = \mathfrak{h}$.

Lemma 1.19. *$\dot\rho$ ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus, d.h.*

$$\dot\rho([\xi,\eta]) = [\dot\rho(\xi), \dot\rho(\eta)] \quad \forall\, \xi,\eta \in \mathfrak{g}.$$

Beweis.
Schritt 1: $\exp(t\dot\rho(\xi)) = \rho(\exp(t\xi))$.
Definiere $\gamma(t) := \rho(\exp(t\xi))$. Dann gilt: $\gamma(0) = \rho(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H$ und

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) =& \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\rho(\exp(s\xi)\exp(t\xi)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\rho(\exp(s\xi))\rho(\exp(t\xi)) = \\ =&(d\rho(\mathbb{1})\xi)\rho(\exp(t\xi)) = \dot\rho(\xi)\rho(\exp(t\xi)) = \dot\rho(\xi)\gamma(t).\end{aligned}$$

$\Rightarrow \rho(\exp(t\xi)) = \gamma(t) = \exp(t\dot\rho(\xi))$.

Schritt 2: $\dot\rho(g\xi g^{-1}) = \rho(g)\dot\rho(\xi)\rho(g)^{-1}$.
Definiere $\gamma(t) := g\exp(t\xi)g^{-1} \in G$.
$\Rightarrow \rho(\gamma(t)) = \rho(g)\rho(\exp(t\xi))\rho(g)^{-1} \overset{Schritt\,1}{=} \rho(g)\exp(t\dot\rho(\xi))\rho(g)^{-1}$.
$\Rightarrow \dot\rho(g\xi g^{-1}) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho(\gamma(t)) = \rho(g)\dot\rho(\xi)\rho(g)^{-1}$.

Schritt 3: $\dot\rho([\xi,\eta]) = [\dot\rho(\xi),\dot\rho(\eta)]$.

$$\begin{aligned}
\dot\rho([\xi,\eta]) =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \dot\rho(\exp(t\xi)\eta\exp(-t\xi)) \overset{Schritt\,2}{=} \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(t\xi))\dot\rho(\eta)\rho(\exp(-t\xi)) \overset{Schritt\,1}{=} \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\dot\rho(\xi))\dot\rho(\eta)\exp(-t\dot\rho(\xi)) = \\
=& \dot\rho(\xi)\dot\rho(\eta) - \dot\rho(\eta)\dot\rho(\xi) = [\dot\rho(\xi),\dot\rho(\eta)].
\end{aligned}$$

□

Beispiel (Lie-Gruppen)**.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) :=& \{\Phi : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g} \mid \Phi \ \textit{VR-Isomorphismus},\ \Phi([\xi,\eta]) = [\Phi(\xi),\Phi(\eta)]\} \\
& \text{Lie-Gruppe.} \\
\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) :=& \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) = \{A : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g} \mid A \ \textit{linear},\ A[\xi,\eta] = [A\xi,\eta] + [\xi,A\eta]\} \\
& \text{Lie-Algebra.} \\
\mathrm{ad} : G \to& \ \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ \ \mathrm{ad}(g)\eta := g\eta g^{-1} \\
& \text{Lie-Gruppen-Homomorphismus.} \\
\mathrm{Ad} =& \ \dot{\mathrm{ad}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}), \\
\mathrm{Ad}(\xi)\eta =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{ad}(\exp(t\xi))\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi)\eta\exp(-t\xi) = [\xi,\eta] \\
\mathrm{Ad}(\xi) =& \ [\xi,\cdot] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \\
& \text{Lie-Algebra-Homomorphismus.}
\end{aligned}$$

Übung. $\xi,\eta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\gamma(t) := \exp(t\xi)\exp(t\eta)\exp(-t\xi)\exp(-t\eta) \Rightarrow \dot\gamma(0) = 0,\ \frac{1}{2}\ddot\gamma(0) = [\xi,\eta]$.

Beispiel.

Lie-Gruppe	$\{$*Diffeomorphismen*$\}$
$G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Lie-Gruppe* $\mathfrak{g} = Lie(G)$ *Lie-Algebra*	$\mathrm{Diff}(M)$ $\mathrm{Vect}(M)$
Exponential-Abbildung: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $t\mapsto\exp(t\xi)$	*Fluss eines (vollständigen) Vektorfeldes:* $M\to M$, $p\mapsto\varphi^t(p)$
Adjungierte Abbildung: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $\xi\mapsto g\xi g^{-1}$	*Push forward:* $\mathrm{Vect}(M)\to\mathrm{Vect}(M)$, $X\mapsto\varphi_*X$
Lie Klammer: $[\xi,\eta] = \xi\eta-\eta\xi$	*Lie Klammer:* $[X,Y] = dXY - dYX$

Beispiel. $\mathcal{F}(M) := C^\infty(M) = \{f : M\to\mathbb{R} \mid \textit{glatt}\}$.

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(M) \ \textit{heisst Automorphismus} \ \Leftrightarrow\ & \Phi(f+g) = \Phi(f)+\Phi(g), \\
& \Phi(f\cdot g) = \Phi(f)\cdot\Phi(g), \\
& \Phi(1) = 1, \\
& \Phi \ \textit{bijektiv und linear.}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Aut}(\mathcal{F}(M)) = \{Automorphismen\}$.
$\delta : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ *heisst Derivation, wenn* δ *linear ist und* $\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$.
$\mathrm{Der}(\mathcal{F}(M)) = Lie(\mathrm{Aut}(\mathcal{F}(M)))$.

$$\begin{cases} \mathrm{Diff}(M) & \to & \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(M)) \\ \varphi & \mapsto & \{f \mapsto f \circ \varphi =: \varphi^* f\} \end{cases} \quad \textit{Gruppen-Antihomomorphismus } (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(M) & \to & \mathrm{Der}(\mathcal{F}(M)) \\ X & \mapsto & \mathcal{L}_X \end{cases} \qquad \textit{Lie-Algebra-Antihomomorphismus}$$

Wobei $\mathcal{L}_X$ *wie folgt definiert ist:* $\mathcal{L}_X f := df \circ X$.
Es gilt: $\mathcal{L}_{[X,Y]} = -[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = -\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X$.

Übung. Zeige $df[X,Y] = -d(dfY)X + d(dfX)Y$.

1.9 Immersionen und Einbettungen

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine m-Mannigfaltigkeit und sei $n \leq m$.

Definition. *Eine Teilmenge* $N \subset M$ *heisst* ***Untermannigfaltigkeit*** *(der Dimension* n*), wenn* N *selbst eine* n*-Mannigfaltigkeit ist.*

Definition. $N \subset \mathbb{R}^l$ n*-Mannigfaltigkeit.*
Eine glatte Abbildung $f : N \to M$ *heisst* ***Immersion****, wenn* $df(q) : T_qN \to T_{f(q)}M$ *injektiv ist* $\forall q \in N$.

Definition. $f : N \to M$ *heisst* ***Einbettung****, wenn gilt:*

i) f *ist eine Immersion;*

ii) f *ist injektiv;*

iii) f *ist eigentlich, d.h.* $K \subset f(N)$ *kompakt* $\Rightarrow f^{-1}(K)$ *kompakt.*

Bemerkung. f *ist eigentlich genau dann wenn für jede Folge* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ *in* N *gilt:*
$f(q_i)$ *konvergiert gegen ein Element von* $f(N) \Rightarrow q_i$ *besitzt eine konvergente Teilfolge mit Limes in* N.

Beispiel (Einbettung)**.** $N \subset M$ *Untermannigfaltigkeit. Sei* $f : N \to M$ *definiert durch* $f(q) := q$
$\Rightarrow f$ *ist eine Einbettung.*

Beispiel (Immersion)**.** $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x, xy)$ *Immersion, nicht injektiv.*

Satz 1.20. *$f : N \to M$ Einbettung $\Longrightarrow f(N) \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M.*

Beispiel. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ist nicht injektiv.*

Satz 1.21. *Sei $M \in \mathbb{R}^k$ eine m-Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine Teilmenge und $n \leq m$. Äquivalent sind:*

i) N ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n;

ii) $\forall p_0 \in N\ \exists U \subset M$ offen, $p_0 \in U$, $\exists V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ offen, $\exists$ Karte $\varphi : U \to V$ so, dass $\forall p \in U$

$$p \in N \Longleftrightarrow \varphi(p) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

Lemma 1.22. *Sei $f : N \to M$ eine Einbettung und $q_0 \in N$.*
$\Longrightarrow \exists U \subset M$ offen, $f(q_0) \in U$, $\exists V \subset N$ offen, $q_0 \in V$, $\exists W \in \mathbb{R}^{m-n}$ offen, $0 \in W$, $\exists F : V \times W \to U$ Diffeomorphismus mit

i) $F(q, 0) = f(q) \quad \forall q \in V$;

ii) $F(q, z) \in f(N) \Longleftrightarrow z = 0 \quad \forall q \in V, \forall z \in W$.

Korollar 1.23. *$f|_V : V \to f(N) \cap U$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis von Korollar 1.23. Sei $\pi : V \times W \to V$ die Projektion $\pi(q, z) := q$. Dann folgt:

1. $f(V) = f(N) \cap U$;
2. $f|_V : V \to f(N) \cap U$ ist bijektiv;
3. $(f|_V)^{-1} = \pi \circ (F^{-1}|_{f(N) \cap U})$ ist glatt. □

Beweis von Satz 1.20. Sei $p_0 = f(q_0) \in f(N)$.
$\overset{Korollar\ 1.23}{\Longrightarrow} \exists V \in N$ offen, $q_0 \in V$, $\exists U \in M$ offen, $p_0 \in U$ so, dass

$$f|_V : V \to f(N) \cap U \quad \text{Diffeomorphismus.}$$

O.B.d.A. $\exists$ Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ für N.
$\Rightarrow \psi \circ (f|_V)^{-1} : f(N) \cap U \to \mathbb{R}^n$ ist Karte für $f(N)$. □

Beweis von Satz 1.21.

$ii) \Rightarrow i)$:
$W := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, 0) \in V\}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Definiere $\psi : W \to N$ durch $\psi(y) := \varphi^{-1}(y, 0)$.
$\Rightarrow \psi$ ist ein Diffeomorphismus von W nach $N \cap U$.
$\Rightarrow \psi^{-1}$ ist eine Karte für N.

i) $\Rightarrow$ *ii)* :

Sei $q_0 \in N$ gegeben. Wir können Lemma 1.22 auf die Abbildung $N \to M,\ q \mapsto q$ anwenden.
$\Rightarrow \exists U \subset M, U \subset N, W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ offen, mit $q_0 \in U$, $0 \in W$, und $\exists$ ein Diffeomorphismus $F : V \times W \to U$ so, dass die Bedingungen von Lemma 1.22 gelten. O.B.d.A. $\exists$ Karte $\psi : V \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ für N. Sei $\varphi := (\psi \times id) \circ F^{-1} : U \to \Omega \times W$. Sei $p \in U = F(V \times W)$. φ ist also durch folgendes kommutatives Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccll} M \supset U & \xrightarrow{F^{-1}} & V \times W & \subset N \times \mathbb{R}^{m-n} \\ & \overset{\varphi}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \psi\times id} & \\ & & \Omega \times W & \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \end{array}$$

$\Rightarrow \exists\, q \in V, \exists\, z \in W$ so, dass $p = F(q,z) \Rightarrow \varphi(p) = (\psi(q), z)$.
$p \in N \Leftrightarrow F(q,z) \in N = f(N) \Leftrightarrow z = 0$ (Lemma 1.22) $\Leftrightarrow \varphi(p) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. $\square$

Beweis von Lemma 1.22. Sei $f : N \to M$ eine Einbettung, $q_0 \in N$
$\Rightarrow df(q_0) : T_{q_0}N \to T_{f(q_0)}M$ ist injektiv.

1. Wähle Karte $\varphi : U \cap N \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $p_0 := f(q_0) \in U$, $\varphi(U \cap M) \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \cap M \to \varphi(U \cap M)$ Diffeomorphismus.

2. Beachte dass $d(\varphi \circ f)(q_0) : T_{q_0}N \to \mathbb{R}^m$ injektiv ist.

$$\begin{array}{ccccc} & & T_{p_0}M & & \\ & {\scriptstyle df(q_0) \atop inj.}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle d\varphi(p_0) \atop \cong} & \\ T_{q_0}N & & \xrightarrow{d(\varphi\circ f)(q_0)\, inj.} & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$\Rightarrow \exists$ lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ so dass die lineare Abbildung

$$T_{q_0}N \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m,\ (w, \zeta) \mapsto d(\varphi \circ f)(q_0)w + A\zeta$$

bijektiv ist.

3. Definiere $\Omega := \{(q,z) \in N \times \mathbb{R}^{m-n} \mid f(q) \in U, \varphi(f(q)) + Az \in \varphi(U)\} \ni (q_0, 0)$ und $F : \Omega \to M$ durch $F(q,z) := \varphi^{-1}(\varphi(f(q)) + Az)$.
$\Rightarrow dF(q_0, 0) : T_{q_0}N \times \mathbb{R}^{n-m} \to T_{f(q_0)}M$ ist bijektiv.

4. Nach Satz 1.10 folgt: $\exists V \subset N$ offen, $q_0 \in V$, $\exists W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ offen, $0 \in W$ so, dass:

   a) $V \times W \subset \Omega$;

   b) $F(V \times W) \subset M$ offen;

   c) $F|_{V\times W} : V \times W \to F(V \times W)$ Diffeomorphismus.

5. $F(q, 0) = f(q)\ \forall q \in V$ nach Konstruktion.

6. *Behauptung.* $\exists V_0 \subset V$ offen, $q_0 \in V_0$, $\exists W_0 \subset W$ offen, $0 \in W_0$ so, dass:

$$q \in V_0, z \in W_0, F(q,z) \in f(N) \Rightarrow z = 0.$$

Beweis. Wir nehmen per Widerspruch an, dass keine solchen V_0 und W_0 existieren. Dann $\exists\, q_i \in V, q_i \to q_0$ und $\exists\, z_i \in W, z_i \to 0, z_i \neq 0$ mit $F(q_i, z_i) \in f(N)$.
$\Rightarrow \exists\, q_i' \in N$ so, dass $f(q_i') = F(q_i, z_i)$.
$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} f(q_i') = \lim_{i\to\infty} F(q_i, z_i) = F(q_0, 0) = f(q_0)$.
$\overset{f\text{ eigentlich}}{\Longrightarrow}$ q_i' hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in N. O.B.d.A. $q_i' \to q_0' \in N$.
$\overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(q_0') = \lim_{i\to\infty} f(q_i') = f(q_0)$.
$\overset{f\text{ injektiv}}{\Longrightarrow} q_0' = q_0$, d.h. $q_i' \to q_0 \in V$.
$\Rightarrow \exists\, i_0$ so, dass $\forall i \geq i_0\ q_i' \in V$.
$\Rightarrow \forall i \geq i_0 : (q_i', 0) \in V \times W$ und $F(q_i', 0) = f(q_i') = F(q_i, z_i)$.
$\Rightarrow$ Da $F : V \times W \to U$ injektiv ist, gilt: $(q_i', 0) = (q_i, z_i)\ \forall i \geq i_0$.
$\Rightarrow z_i = 0\ \forall i \geq i_0$. Widerspruch. □

□

1.10 Submersionen

Definition. *Eine glatte Abbildung $f : N^n \to M^m$ heisst **Submersion**, wenn die Ableitung $df(q) : T_qN \to T_{f(q)}M$ surjektiv ist für jedes $q \in N$.*

Bemerkung.

1. *Submersion $\Longrightarrow n \geq m$.*
2. *f Submersion $\Longleftrightarrow$ Jeder Punkt $p \in M$ ist ein regulärer Wert von f.*

Lemma 1.24. *Sei $f : N \to M$ eine Submersion, $q_0 \in N$.*
$\Longrightarrow \exists\, U \subset M$ offen, $f(q_0) \in U$, $\exists\, g : U \to N$ so, dass

$$f \circ g(p) = p,\ \ \forall p \in U,$$

$$g(f(q_0)) = q_0.$$

Beweis. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$, $N^n \subset \mathbb{R}^l$ und $df(q_0) : T_{q_0}N \to T_{f(q_0)}M$ surjektiv, also gilt $\dim \ker df(q_0) = n - m$.
$\Rightarrow \exists$ lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{n-m}$ so, dass $A|_{\ker df(q_0)} : \ker df(q_0) \to \mathbb{R}^{n-m}$ bijektiv ist.
Definiere $\psi : N \to M \times \mathbb{R}^{n-m}$ durch $\psi(q) := (f(q), A(q - q_0))$.
$\Rightarrow d\psi(q_0) : T_{q_0}N \to T_{f(q_0)}M \times \mathbb{R}^{n-m},\ v \mapsto (df(q_0)v, Av)$ ist injektiv.
$\Rightarrow d\psi(q_0)$ bijektiv.
$\overset{\text{Satz 1.10}}{\Longrightarrow} \exists\, V \subset N$ offen, $q_0 \in V$, $\exists\, W \subset M \times \mathbb{R}^{n-m}$ offen, $(f(q_0), 0) \in W$ so, dass $\psi|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.
Sei $U := \{p \in M \mid (p, 0) \in W\}$. Definiere $g : U \to N$ durch $g(p) := \psi^{-1}(p, 0)$.
$\Rightarrow U$ offen, $f(q_0) \in U$, $g(f(q_0)) = \psi^{-1}(f(q_0), 0) = q_0$ und
$(f(g(p)), A(g(p) - q_0)) = \psi(g(p)) = \psi(\psi^{-1}(p, 0)) = (p, 0)$.
$\Rightarrow f(g(p)) = p$. □

Korollar 1.25.

i) *$f : N \to M$ Submersion $\Longrightarrow f(N) \subset M$ ist offen.*

ii) *$f : N \to M$ Submersion, $N \neq \emptyset$, N kompakt, M zusammenhängend $\Longrightarrow f$ ist surjektiv.*

Beweis.

i) Seien $q_0 \in N$, $f(q_0) \in f(N)$, $U \subset M$ und $g : U \to M$ wie in Lemma 1.24.
$\Rightarrow f(g(p)) = p,\ \forall p \in U \Rightarrow U \subset f(N)$.

ii) $f(N) \neq \emptyset$, $f(N)$ kompakt, daher abgeschlossen, $f(N)$ offen relativ zu $M \Rightarrow f(N) = M$.
□

Beispiel. *Sei $f : N \to M$ glatt $\Longrightarrow$ Die Mengen $U := \{q \in N \mid df(q) \text{ injektiv}\}$, $V := \{q \in N \mid df(q) \text{ surjektiv}\}$ sind offen in N.*

Beweis. Übung. □

1.11 Vektorbündel

Definition. *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorbündel** (über M vom Rang n) ist eine Teilmenge $E \subset M \times \mathbb{R}^l$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) *für jedes $p \in M$ ist die Menge $E_p := \{\xi \in \mathbb{R}^l \mid (p, \xi) \in E\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^l$ und $\dim E_p = n$;*

ii) *E ist eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.*

Bemerkung.

1. *$E \subset M \times \mathbb{R}^l$ Vektorbündel $\Rightarrow \exists$ Projektion $\pi : E \to M,\ \pi(p, \xi) = p$.*
2. *$\pi^{-1}(p) = \{p\} \times E_p$ heisst Faser von E über p.*
3. *Ein Schnitt von E ist eine glatte Abbildung $\sigma : M \to E$ so, dass $\pi \circ \sigma = id_M$. Jeder Schnitt hat die Form $\sigma(p) = (p, s(p)),\ s : M \to \mathbb{R}^l,\ s(p) \in E_p,\ \forall p \in M$.*
4. *$\sigma(p) = (p, 0)$ heisst Nullschnitt von E.*
5. *Beispiel: $E := TM$ ist ein Vektorbündel, $E_p = T_pM$, {Schnitte von TM}={Vektorfelder}.*

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung von Vektorbündeln.

Erinnerung: Eine Matrix $\Pi \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ist eine orthogonale Projektion wenn $\Pi^T = \Pi = \Pi^2$.

Satz 1.26. *Es wird vorausgesetzt:*

1. $M \subset \mathbb{R}^k$ *ist eine Mannigfaltigkeit;*
2. $E \subset M \times \mathbb{R}^l$ *ist eine Teilmenge;*
3. $E_p = \{\xi \in \mathbb{R}^l \mid (p, \xi) \in E\}$ *ist ein Vektorraum und* $\dim E_p = n$ *für jedes* $p \in M$*;*
4. *Für jedes* $p \in M$ *sei* $\Pi(p) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ *die orthogonale Projektion auf* E_p*, d.h.* $\Pi^T = \Pi = \Pi^2$*,* $\operatorname{im} \Pi(p) = E_p$*.*

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) E *ist ein Vektorbündel;*

ii) $\forall p_0 \in M$ $\exists$ *glatte Abbildungen* $s_1, \dots, s_n : M \to \mathbb{R}^l$ *so dass* $s_i(p) \in E_p,\ i = 1, \dots, n,$ $p \in M$*, und* $s_1(p_0), \dots, s_n(p_0)$ *eine Basis von* E_{p_0} *bilden.*

iii) $\Pi : M \to \mathbb{R}^{l \times l}$ *ist glatt.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *ii)* :

Schritt 1: π ist eine Submersion. Beweis:

a) $d\pi(p, 0) : T_{(p,0)}E \to T_pM$ ist surjektiv.
$\sigma(p) := (p, 0) \Rightarrow \pi \circ \sigma = id \Rightarrow d\pi(p, 0)d\sigma(p) = id : T_pM \to T_pM.$

b) (Aus Beispiel 1.10) $\forall p \in M\ \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in E_p$: $|\xi| < \varepsilon \Rightarrow d\pi(p, \xi)$ surjektiv.

c) $d\pi(p, \xi)$ surjektiv, $\forall \xi \in E_p$. Definiere $f_\lambda : E \to E$ durch $f_\lambda(p, \xi) := (p, \lambda\xi),\ \lambda > 0$.
$\Rightarrow \pi \circ f_\lambda = \pi,\ f_\lambda^{-1} = f_{1/\lambda}$.
$\Rightarrow df_\lambda(p, \xi) : T_{(p,\xi)}E \to T_{(p,\lambda\xi)}E$ ist ein Isomorphismus.

$\Longrightarrow d\pi(p, \lambda\xi)df_\lambda(p, \xi) = d\pi(p, \xi)$ ist surjektives Isomorphismus, falls $\lambda|\xi| < \varepsilon$.
Da $\lambda > 0$ beliebig ist, folgt, dass $d\pi(p, \xi)$ surjektiv ist, $\forall (p, \xi)$.

Schritt 2: Wähle Basis $\xi_1, \dots, \xi_n$ von E_p. Nach Lemma 1.24 $\exists U \subset M$ offen, $p_0 \in U$, $\exists \sigma_1, \dots, \sigma_n : U \to E$ glatt so, dass $\pi \circ \sigma_i = id$, $\sigma_i(p_0) = (p_0, \xi_i),\ i = 1, \dots, n.$
$\Longrightarrow \sigma_i(p) = (p, s_i(p)),\ s_i : U \to \mathbb{R}^l$ glatt, $s_i(p) \in E_p,\ \forall p \in U$.

a) Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $p \in M,\ |p - p_0| \le \varepsilon \Rightarrow p \in U$.

b) Wähle $\beta : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ glatt so, dass $\beta(p_0) = 1$ und $\beta(p) = 0$, falls $|p - p_0| \ge \varepsilon$.

c) Definiere $\tilde{s}_i(p) := \begin{cases} \beta(p)s_i(p) & p \in U \\ 0 & p \notin U \end{cases}$ $\quad\tilde{s}_i$ glatt, $\tilde{s}_i(p) \in E_p\ \forall p \in M$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* :

Sei $p_0 \in M$. $s_1, \dots, s_n : M \to E$ wie in *ii)*.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ so, dass $\forall p \in M$ mit $|p - p_0| < \varepsilon$ gilt: $s_1(p), \dots, s_n(p)$ sind linear unabhängig ($\Rightarrow s_1(p), \dots, s_n(p)$ Basis von E_p).
Definiere $D(p) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ durch $D(p)\eta = \sum_{i=1}^n \eta^i s_i(p)$. $U := B_\varepsilon(p_0) \subset \mathbb{R}^l$.
$\Rightarrow D : U \cap M \to \mathbb{R}^{l \times n}$ glatt, $\operatorname{im} D(p) = E_p$, $D(p)$ injektiv $\forall p \in U \cap M$.
$\Rightarrow \Pi(p) = D(p)(D(p)^T D(p))^{-1} D(p)^T$.
$\Rightarrow \Pi$ ist glatt.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* :

Sei $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E_{p_0}$ eine Basis, $s_i(p) := \Pi(p)\xi_i \in E_p$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* :

Wir müssen zeigen, dass $E \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ eine Mannigfaltigkeit ist. Sei $p_0 \in M$ und $\psi : V \to U \cap M$ eine Parametrisierung, mit $p_0 \in M \cap U$.
O.B.d.A. $\exists\, s_1, \ldots, s_n : M \to \mathbb{R}^l$ glatt so, dass $s_1(p), \ldots, s_n(p)$ Basis von E_p für alle $p \in U \subset M$.
Definiere $\Psi : V \times \mathbb{R}^n \to (U \times \mathbb{R}^l) \cap E$ durch $\Phi(x, \eta) := \big(\varphi(x), \sum_{i=1}^n \eta_i s_i(\varphi(x))\big)$.
$\Rightarrow$ Φ ist Parametrisierung von E, $\Phi^{-1} : (U \times \mathbb{R}^l) \cap E \to V \times \mathbb{R}^n$ Karte für E.
Es ist noch zu zeigen, dass Φ ein Diffeomorphismus ist:

a) $D(p)\eta := \sum_{i=1}^n \eta^i s_i(p)$.

b) $\Phi(x, \eta) = (\varphi(x), D(\varphi(x))\eta) \Rightarrow \Phi$ ist glatt.

c) $\Phi^{-1}(p, \xi) = (\varphi^{-1}(p), (D(p)^T D(p))^{-1} D(p)^T \xi)$ glatt.

$\square$

Beispiel (Vektorbündeln)**.**

1. *Pullback:*

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow^{\pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

$f^*E = \{(q, \xi) \in N \times \mathbb{R}^l \mid \xi \in E_{f(q)}\}$
$\Pi^{f^*E} = \Pi^E \circ f$.

2. *Orthogonales Komplement:* $(E^\perp)_p := E_p^\perp$
$\Pi^{E^\perp} = \mathbb{1} - \Pi^E$.

1.12 Satz von Frobenius

Definition. *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ glatte Mannigfaltigkeit. Sei $F \subset TM$ Vektorbündel. Eine Untermannigfaltigkeit $E \subset F$ heisst **Unterbündel** (von Rang n), wenn es selbst ein Vektorbündel ist, d.h. wenn $E_p \subset F_p$ ein Untervektorraum ist,* $\dim E_p = n$, $\forall p \in M$.
*Ein Unterbündel von TM heisst **Distribution**.*

Sei $E \subset TM$ eine Distribution.

Definition. *E heisst **integrabel**, wenn für jeden Punkt $p_0 \in M$ eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ existiert so, dass $p_0 \in N$ und $T_pN = E_p$, $\forall p \in N$.*

Definition. *E heisst **involutiv**, wenn für alle Vektorfelder $X, Y \in$* Vect(M) *folgendes gilt:*

$$X(p), Y(p) \in E_p \;\forall p \in M \Longrightarrow [X, Y](p) \in E_p \;\forall p \in M.$$

Definition. *Eine* ***Blätterungskarte*** *für E ist eine Karte $\varphi : U \cap M \to V$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ offen so, dass $\forall p \in U \cap M$, $\forall v \in T_pM$ folgendes gilt.*
Sei $\varphi(p) =: (x, y)$ und $d\varphi(p)v =: (\xi, \eta)$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $y, \eta \in \mathbb{R}^{m-n}$.
Dann $v \in E_p \iff \eta = 0$, d.h. $\forall p \in U \cap M$ gilt $d\varphi(p)E_p = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Satz 1.27 (Frobenius)**.** *Sei $E \subset TM$ Unterbündel. Äquivalent sind:*

i) E ist involutiv;

ii) E ist integrabel;

iii) $\forall p_0 \in M$ $\exists$ Blätterungskarte $\varphi : U \cap M \to V$ so, dass $p_0 \in U$.

Lemma 1.28. *Sei $E \subset TM$ involutiv. Sei $X \in \mathrm{Vect}(M)$ vollständig so, dass $X(p) \in E_p$, $\forall p \in M$. Sei φ^t der Fluss von X. Dann gilt $d\varphi^t(p) : E_p \to E_{\varphi^t(p)}$, $\forall p \in M$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Beweis von Satz 1.27.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* :
Sei $\varphi(p_0) =: (x_0, y_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^{m-n}$.
$N := \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{y_0\} \cap V)$ ist die gewünschte Untermannigfaltigkeit.

ii) $\Rightarrow$ *i)* :
Seien $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, mit $X(p), Y(p) \in E_p$, $\forall p \in M$. Sei $p_0 \in M$.
$\overset{ii)}{\Rightarrow}$ $\exists$ Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ so, dass $p_0 \in N$, $T_pN = E_p$, $\forall p \in N$.
$\Rightarrow X(p), Y(p) \in T_pN$, $\forall p \in N$.
$\Rightarrow X|_N, Y|_N \in \mathrm{Vect}(N)$.
$\Rightarrow [X, Y](p) = [X|_N, Y|_N](p) \in T_pN = E_p$, $\forall p \in N$.

i) $\Rightarrow$ *iii)* :
Sei $p_0 \in M$. Nach Satz 1.26 $\exists$ Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n \in \mathrm{Vect}(M)$ so, dass $X_i(p) \in E_p$, $\forall p \in M$, $\forall\, i$, $X_1(p_0), \ldots, X_n(p_0)$ Basis von E_p. O.B.d.A. X_i vollständig. Seien $\varphi_1^t, \ldots, \varphi_n^t$ die Flüsse von $X_1, \ldots, X_n$. Seien $Y_1, \ldots, Y_{m-n} \in \mathrm{Vect}(M)$ vollständig so, dass $X_1(p_0), \ldots, X_n(p_0), Y_1(p_0), \ldots, Y_{m-n}(p_0)$ Basis von $T_{p_0}M$. Sei ψ_j^t der Fluss von Y_j.
Definiere $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to M$ durch $\psi(x, y) := \varphi_1^{x_1} \circ \varphi_2^{x_2} \circ \cdots \circ \varphi_n^{x_n} \circ \psi_1^{y_1} \circ \cdots \circ \psi_{m-n}^{y_{m-n}}(p_0)$.
Dann folgt:

a) $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0) = X_i(p_0)$, $\frac{\partial \psi}{\partial y_j}(0) = Y_j(p_0)$.
Also $d\psi(0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to T_{p_0}M$ bijektiv.

b) $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, y) \in E_{\psi(x,y)}$, $\forall x, y$ (nach Lemma 1.28) $\Rightarrow E_{\psi(x,y)} = \mathrm{Span}\{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\}$.

$\Rightarrow E_{\psi(x,y)} = d\psi(x, y)(\mathbb{R}^n \times \{0\})$.
$\Rightarrow \exists V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ offen, $0 \in V$ so dass $(\psi|_V)^{-1}$ Blätterungskarte ist.

$\square$

Für den Beweis von Lemma 1.28 brauchen wir:

Lemma 1.29.
Sei $E \subset TM$ involutiv, $\beta : \mathbb{R}^2 \to M$ glatt so, dass $\frac{\partial\beta}{\partial s}(s,0) \in E_{\beta(s,0)}$, $\frac{\partial\beta}{\partial t}(s,t) \in E_{\beta(s,t)}$ $\Longrightarrow \frac{\partial\beta}{\partial s}(s,t) \in E_{\beta(s,t)}$.

Lemma 1.29 $\Rightarrow$ *Lemma* 1.28*:*
Sei $p \in M$, $v \in E_p$. $\Rightarrow \exists$ Vektorfeld $Y \in \mathrm{Vect}(M)$ so dass $Y(q) \in E_q$, $\forall q \in V$ und $Y(p) = v$.
O.B.d.A. Y vollständig.
$\Rightarrow \exists\, \gamma : \mathbb{R} \to M$ so dass $\dot\gamma(s) = Y(\gamma(s))$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\gamma(0) = p$. Insbesondere $\dot\gamma(0) = v$ und $\dot\gamma(s) \in E_{\gamma(s)}$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
Definiere $\beta(s,t) := \varphi^t(\gamma(s))$, $\beta : \mathbb{R}^2 \to M$.
Es folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\beta}{\partial s}(s,0) = \dot\gamma(s) \in E_{\gamma(s)} = E_{\beta(s,0)},\ \forall s \in \mathbb{R}. \\ \frac{\partial\beta}{\partial t}(s,t) = \frac{d}{dt}\varphi^t(\gamma(s)) = X(\varphi^t(\gamma(s))) = X(\beta(s,t)) \in E_{\beta(s,t)} \end{array}\right\} \overset{Lemma\,1.29}{\Longrightarrow} \frac{\partial\beta}{\partial s}(0,t) \in E_{\beta(0,t)}.$$

Beachte dass $\frac{\partial\beta}{\partial s}(0,t) = d\varphi^t(\gamma(0))\dot\gamma(0) = d\varphi^t(p)v$ und $E_{\beta(0,t)} = E_{\varphi^t(p)}$.
Das heisst $v \in E_p \Rightarrow d\varphi^t(p)v \in E_{\varphi^t(p)}$. $\square$

Beweis von Lemma 1.29. Definiere $p_0 := \beta(0,0) \in M$. Wähle Karte $\varphi : U \cap M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $p_0 \in U$, $V = \varphi(U \cap M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ offen. $d\varphi(p_0)E_{p_0} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{d\varphi(p)} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ \bigcup & & \bigcup \\ E_p & \xrightarrow{\varphi(p)=(x,y)} & \tilde E_{(x,y)} \end{array}$$

$\tilde E_{(x,y)} := d\varphi(p)E_p =$ Graph einer linearen Abbildung $A(x,y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-n}$, wobei $p := \varphi^{-1}(x,y)$.
$\tilde E(x,y) = \{(\xi,\eta) \mid \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta = A(x,y)\xi\}$
$V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $A : V \to \mathbb{R}^{(m-n)\times n}$.

Notation. $\frac{\partial A}{\partial x}\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial x_i}(x,y)\xi_i$, $\quad \frac{\partial A}{\partial y}\eta = \sum_{j=1}^{m-n} \frac{\partial A}{\partial y_j}(x,y)\eta_j$.

Behauptung 1. E involutiv, $(x,y) \in V$, $\eta := A(x,y)\xi$, $\eta' := A(x,y)\xi'$
$\Rightarrow (\frac{\partial A}{\partial x}\xi + \frac{\partial A}{\partial y}\eta)\xi' = (\frac{\partial A}{\partial x}\xi' + \frac{\partial A}{\partial y}\eta')\xi$.

Beweis der Behauptung 1. $z := (x,y) \in V$, $\xi, \xi' : V \to \mathbb{R}^n$.
Definiere $\zeta(z) := (\xi(z), \underbrace{A(z)\xi(z)}_{\eta(z)})$ und $\zeta'(z) := (\xi'(z), \underbrace{A(z)\xi'(z)}_{\eta'(z)})$.

$\zeta(z), \zeta'(z) \in \tilde E_z$.
$\Rightarrow [\zeta,\zeta'](z) \in \tilde E_z$. Also gilt:

$$\begin{aligned} [\zeta,\zeta'](z) =& d\zeta(z)\zeta'(z) - d\zeta'(z)\zeta(z) = \\ =& (d\xi(z)\zeta'(z) - d\xi'(z)\zeta(z), d\eta(z)\zeta'(z) - d\eta'(z)\zeta(z)) = \\ =& (d\xi\zeta' - d\xi'\zeta, A(d\xi\zeta' - d\xi'\eta)) + (0, (dA\zeta')\xi - (dA\zeta)\xi') \in \tilde E_z. \end{aligned}$$

$\square$

$\Rightarrow\ (dA\zeta')\xi - (dA\zeta)\xi' = 0.$

$\beta : \mathbb{R}^2 \to U \cap M,\ \varphi(\beta(s,t)) =: \binom{x(s,t)}{y(s,t)}.$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(s,0) \in E_{\beta(s,0)} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial s}(s,0) = A(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,0).$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial t}(s,t) \in E_{\beta(s,t)} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = A(x,y)\frac{\partial x}{\partial t}(s,t).$$

Behauptung 2. $\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = A(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,t),\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$

Lemma 1.28 folgt aus Behauptung 2.

Beweis der Behauptung 2. Stimmt für $t = 0$.
Sei $\eta(s,t) := \frac{\partial y}{\partial s}(s,t) - A(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)$, $\eta(s,0) = 0$.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - A\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s} = \\
&\overset{Beh1}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - A\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial y}\left(A\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right)\frac{\partial x}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big(\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t} - A\frac{\partial x}{\partial t}}_{=0}\Big) + \Big(\frac{\partial A}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial y}{\partial s} - A\frac{\partial x}{\partial s}}_{=\eta}\Big)\Big)\frac{\partial x}{\partial t} = \\
&= \Big(\frac{\partial A}{\partial y}\eta\Big)\frac{\partial x}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Das heisst $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\eta\right)\frac{\partial x}{\partial t}$ mit $\eta(s,0) = 0$.
$\Longrightarrow \eta(s,t) = 0,\ \forall t.$ □
□

2 Geodäten

2.1 1ste Fundamentalform

Länge einer glatten Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. $L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt$.

Bemerkung. $L(\gamma) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N |\gamma(\frac{i}{N}) - \gamma(\frac{i-1}{N})| \geqslant |\gamma(1) - \gamma(0)|$
$\gamma_0(t) = p + t(q-p)$; $L(\gamma_0) = |p-q| \leqslant L(\gamma)$.
(Eine gerade Linie minimiert Länge unter den Bedingungen $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.)

Bemerkung (Reparametrisierung)**.** *Sei $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ so, dass $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, $\dot{\alpha}(s) \geq 0$. Dann gilt $L(\gamma \circ \alpha) = L(\gamma)$.*

Beweis. $L(\gamma\circ\alpha) = \int_0^1 |\frac{d}{ds}\gamma(\alpha(s))| ds = \int_0^1 |\dot{\gamma}(\alpha(s))| \dot{\alpha}(s) ds = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma)$. □

Beispiel. *Wir definieren zu einem $0 < \delta < \frac{1}{2}$ eine Reparamentrisierung*
$\alpha : [0,1] \to [0,1]$ *mit:*

$$\alpha(s) := \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant \delta \\ 1, & 1-\delta \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \dot{\alpha}(s) \geqslant 0.$$

Dann: $\qquad \tilde{\gamma}(s) := \gamma(\alpha(s)) \Rightarrow L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende m-Mannigfaltigkeit.

Definition. *Sei $\Omega_{p,q} := \{\gamma : [0,1] \to M \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$.*
Wir definieren eine ***Abstandsfunktion*** *$d : M \times M \to \mathbb{R}$ durch $d(p,q) := \inf_{\gamma\in\Omega_{p,q}} L(\gamma)$.*

Lemma 2.1. *d ist eine Metrik, das heisst $\forall\, p,q,r \in M$ gilt:*

1. *$d(p,q) = d(q,p)$;*
2. *$d(p,r) \leqslant d(p,q) + d(q,r)$;*
3. *$d(p,q) \geqslant 0$, $d(p,q) = 0 \Longrightarrow p = q$.*

Beweis.

1. $\gamma \in \Omega_{p,q}$; $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t) \Rightarrow \tilde{\gamma} \in \Omega_{q,p}$. $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$. Daher $d(p,q) = d(q,p)$.
2. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\gamma_0 \in \Omega_{p,q} : L(\gamma_0) \leq d(p,q) + \varepsilon$.
   Sei $\gamma_1 \in \Omega_{q,r} : L(\gamma_1) \leq d(q,r) + \varepsilon$.
   O.B.d.A $\gamma_0(t) = q$, $1-\delta \leq t \leq 1$, $\gamma_1(t) = q$, $0 \leq t \leq \delta$ (siehe vorheriges Beispiel).

   Definiere: $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t)\ , \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_1(2t-1)\ , \ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \gamma \in \Omega_{p,r}$

   $L(\gamma) = L(\gamma_0) + L(\gamma_1) \leq d(p,q) + d(q,r) + 2\varepsilon$
   $\Rightarrow d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$
   $\Rightarrow d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$.

3. $d(p,q) \geq |p-q| \geq 0$.
$d(p,q) = 0 \Rightarrow |p-q| = 0 \Rightarrow p = q$. $\square$

Beispiel (Abstandsfunktion). $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$;
$d(p,q) = \cos^{-1}(\langle p,q\rangle)$ *mit* $0 \leq d(p,q) \leq \pi$.

Auf M haben wir zwei Metriken:

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{p,q}} L(\gamma);$$

$$d_0(p,q) = |p-q|.$$

Frage. Definieren diese Metriken dieselbe Topologie auf M?
Das heisst $U \subset M$ offen bezüglich $d_0 \Leftrightarrow U$ offen bezüglich d?
Äquivalent: $A \subset M$ abgeschlossen bezüglich $d_0 \Leftrightarrow$ A abgeschlossen bezüglich d?
Äquivalent: Sei $p_i \in M$ Folge und $p_0 \in M$. $\lim_{i\to\infty} |p_i - p_0| = 0 \Leftrightarrow \lim_{i\to\infty} d(p_i, d_0) = 0$?
Antwort. Ja.

Lemma 2.2. *Für jedes* $p_0 \in M$ *gilt:* $\lim_{p,q\to p_0} \frac{d(p,q)}{|p-q|} = 1$ *d.h.* $\forall p_0 \in M, \forall \varepsilon > 0\ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ *offen so, dass* $p_0 \in U$ *und* $\forall p,q \in M \cap U$:
$(1-\varepsilon)|p-q| \leq d(p,q) \leq (1+\varepsilon)|p-q|$.

Beweis. O.B.d.A $p_0 = 0 \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, $T_0M = \mathbb{R}^m \times \{0\}$.
$M = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ glatt, $f(0) = 0$, $df(0) = 0$.
Wähle $\delta > 0$ so, dass $|x| < \delta \Rightarrow |df(x)| < \varepsilon$.
Wähle U so, dass $U \cap M = \{(x, f(x)) \mid |x| < \delta\}$.
$p, q \in U \Rightarrow p = (x_0, f(x_0)), |x_0| < \delta$ und $q = (x_1, f(x_1)), |x_1| < \delta$
$\gamma(t) := (x_0 + t(x_1 - x_0), f(x_0 + t(x_1 - x_0))) \Rightarrow \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, |x(t)| < \delta, |df(x(t))| < \varepsilon$
$\dot\gamma(t) = (x_1 - x_0, df(x(t))(x_1 - x_0))$
$|\dot\gamma(t)| \leq |x_1 - x_0| + |df(x(t))||x_1 - x_0| \leq (1+\varepsilon)|x_1 - x_0| \leq (1+\varepsilon)|p-q|$ (da $|df(x(t))| < \varepsilon$)
$\Rightarrow L(\gamma) \leq (1+\varepsilon)|p-q| \Rightarrow d(p,q) \leq (1+\varepsilon)|p-q|$. $\square$

Frage. Können wir die Parametrisierung ψ so wählen, dass $L(\psi \circ c) = L(c)$, $\forall c : [0,1] \to V$?

Notation. $x = (x^1, ..., x^m) \in V \subset \mathbb{R}^m$; $\psi(x) = (\psi^1(x), ..., \psi^n(x))$; $c(t) = (c^1(t), ..., c^m(t))$.

$$\begin{aligned}
L(\psi \circ c) &= \int_0^1 |\frac{d}{dt}\psi(c(t))| dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{\sum_{\nu=1}^n \Big(\frac{d}{dt}\psi^\nu(c(t))\Big)^2} dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{\sum_{\nu=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}(c(t))\dot c^i(t)\Big)^2} dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{\sum_{\nu=1}^n \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}(c(t))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}(c(t))\dot c^i(t)\dot c^j(t)dt}
\end{aligned}$$

Definition.
$$g_{ij}(x) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}(x) = \langle\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x), \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(x)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$
heisst ***1ste Fundamentalform*** *von* M.

$x \in V \Rightarrow g(x) = d\psi(x)^T d\psi(x)$ symmetrisch positiv definit

$$L(\psi\circ c) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(c)\dot{c}^j(t)\dot{c}^i(t)dt} \tag{4}$$

$$L(\psi\circ c) = L(c),\, \forall c \iff g_{ij}(x) = \delta_{ij} \iff d\psi(x)^T d\psi(x) = \mathbb{1},\, \forall x \in V \tag{5}$$

$\Rightarrow \psi$ erhält Winkel und Flächeninhalt.

Beispiel. *Sei* $M = S^2$.
$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} \psi$ *bildet gerade Linien auf Grosskreissegmente ab.*
$\Rightarrow \nexists\, \psi : \mathbb{R}^2 \to S^2$*, die die Winkel und der Flächeninhalt erhählt.*
(da $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ *auf* $\mathbb{R}^2$ *und* $\alpha+\beta+\gamma = \pi + A$ *auf* S^2*,* A *= Flächeninhalt des Dreiecks* ABC *mit Winkel* α*,* β*,* γ*).*

Frage. Gibt es $\gamma \in \Omega_{p,q}$ so, dass $L(\gamma) = d(p,q)$? Ist dieses γ eindeutig?
D.h. wir untersuchen Minima der Länge $L : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$. Die gleiche Frage kann man für die Energie stellen. $E : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$, $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$.
Vorteil: E hängt "glatt" von γ ab. L hängt "glatt" von γ ab nur dort wo $\dot{\gamma}(t) \neq 0\ \forall t$.

2.2 Orthogonale Projektion auf Tangentialraum

$p \in M$, $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ ist ein linearer Unterraum. $\Pi(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die orthogonale Projektion auf T_pM (nicht zu verwechseln mit $\pi : TM \to M$ mit $\pi(p,v) := p$).

Erinnerung
i) $\Pi(p)^2 = \Pi(p)$; "Π Projektion"
ii) $\Pi(p)^T = \Pi(p)$; "Π orthogonal"
iii) $v \in T_pM \Leftrightarrow \Pi(p)v = v$;
(i),ii),iii) bestimmen $\Pi(p)$ eindeutig)
iv) $\Pi : M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist glatt (Satz 1.26).

Beispiel (Orthogonale Projektionen)**.**

1. $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *Hyperfläche (n=m+1). Es gibt für jedes* $p \in M$ *einen Einheitsnormalenvektor* $\nu(p) \in \mathbb{R}^{m+1}$*, dasheisst :*
   $\nu(p) \perp T_pM$, $|\nu(p)| = 1$
   $\Pi(p)v = v - \langle v, \nu(p)\rangle\nu(p)$
   $\Pi(p) = \mathbb{1} - \nu(p)\nu(p)^T \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$.

2. $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. $\nu(p) = p \Rightarrow \Pi(p) = \mathbb{1} - pp^T = \begin{pmatrix} 1-p_1^2 & -p_1p_2 & -p_1p_3 \\ -p_2p_1 & 1-p_2^2 & -p_2p_3 \\ -p_3p_1 & -p_3p_2 & 1-p_3^2 \end{pmatrix}$.

3. $M = f^{-1}(0)$; *0 regulärer Wert von* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n-m)}$, $T_pM = \ker df(p)$
$\Rightarrow \Pi(p) = \mathbb{1} - df(p)^T(df(p)df(p)^T)^{-1}df(p)$.

4. *Für eine Karte* $\psi : V \to M \cap U$; $V \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$
$T_{\psi(x)}M = \mathrm{im}\, d\psi(x)$; $\Pi(\psi(x)) = d\psi(x)(d\psi(x)^T d\psi(x))^{-1} d\psi(x)^T$.

2.3 Kovariante Ableitung (entlang Kurven)

$\gamma : I \to M$ glatt; $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Definition. *Ein* ***Vektorfeld entlang γ*** *ist eine glatte Abbildung* $X : I \to \mathbb{R}^n$ *so, dass* $X(t) \in T_{\gamma(t)}M \ \forall t \in I$.

Notation. $\mathrm{Vect}(\gamma) = \{X : I \to \mathbb{R}^n \mid X \text{ Vektorfeld entlang } \gamma\}$.

Für $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ ist im Allgemeinen $\dot{X}(t) \notin T_{\gamma(t)}M$, $\dot{X}(t) = \Pi(\gamma(t))\dot{X}(t) + (\mathbb{1} - \Pi(\gamma(t)))\dot{X}(t)$ mit $\Pi(\gamma(t))\dot{X}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ und $(\mathbb{1} - \Pi(\gamma(t)))\dot{X}(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$.

Definition. *Der Vektor* $\nabla X(t) = \Pi(\gamma(t))\dot{X}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ *heisst* ***kovariante Ableitung*** *von* X *an der Stelle* t.

Bemerkung.

1. $X \in \mathrm{Vect}(\gamma) \Rightarrow \nabla X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$;

2. $\nabla X = 0 \Leftrightarrow \dot{X}(t) \perp T_{\gamma(t)}M \ \forall t \in I$ *"X parallel entlang γ"*;

3. $\dot{\gamma}(t) \in \mathrm{Vect}(\gamma)$;

4. $\nabla\dot{\gamma}(t) = \Pi(\gamma(t))\ddot{\gamma}(t)$; $\nabla\dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M \ \forall t \in I$;

5. $X, Y \in \mathrm{Vect}(\gamma)$. *Dann folgt:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle =& \langle \dot{X}(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), \dot{Y}(t)\rangle = \\ =& \langle \Pi(\gamma(t))\dot{X}(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), \Pi(\gamma(t))\dot{Y}(t)\rangle = \\ =& \langle \nabla X(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), \nabla Y(t)\rangle. \end{aligned}$$

2.4 $\Omega_{p,q}$ als unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit

Eine Kurve in $\Omega_{p,q}$ ist ein glatte Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \Omega_{p,q}$; $s \mapsto \gamma_s$, d.h. die dazugehörige Abbildung: $\gamma : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$; $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ ist glatt.

Definition. *Der* ***Tangentialraum von $\mathbf{\Omega_{p,q}}$*** *an der Stelle $\gamma \in \Omega_{p,q}$ ist die Menge aller Ableitungen von Kurven in $\Omega_{p,q}$ mit $\gamma_0 = \gamma$:*
$T_\gamma\Omega_{p,q} := \{\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s \mid \gamma : \mathbb{R} \to \Omega_{p,q};\ s \mapsto \gamma_s \text{ glatt},\ \gamma_0 = \gamma\}$

Bemerkung. *Sei $X := \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s \in T_\gamma\Omega_{p,q}$, dann ist*
i) $X(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s(t) \in T_{\gamma(t)}M$;
ii) $X(0) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s(0) = 0,\ X(1) = 0$.

Übung. $T_\gamma\Omega_{p,q} = \{X \in \mathrm{Vect}(\gamma) \mid X(0) = 0,\ X(1) = 0\}$.
Zu zeigen: $\forall X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ mit $X(0) = 0 = X(1)$ gibt es eine glatte Kurve von Kurven $\mathbb{R} \to \Omega_{p,q}$; $s \mapsto \gamma_s$ so, dass $\gamma_0 = \gamma$, $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s = X$.

2.5 Kritische Punkte von Energie und Länge

$dE(\gamma) : T_\gamma\Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ linear ist definiert durch:
$dE(\gamma)X := \frac{d}{ds}\big|_{s=0}E(\gamma_s)$ für $X := \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s$. Genauso $dL(\gamma)X := \frac{d}{ds}\big|_{s=0}L(\gamma_s)$.
Vorsicht: $dL(\gamma)$ ist nur wohldefiniert, wenn $\dot\gamma(t) \neq 0\ \forall t \in [0,1]$.

Definition. *$I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $\gamma : I \to M$ glatt heisst* ***Geodäte*** *wenn $\nabla\dot\gamma(t) = 0$, $\forall t \in I$.*

Satz 2.3. *Sei $\gamma \in \Omega_{p,q}$. Dann sind äquivalent:*

1. *γ ist ein kritischer Punkt von E, d.h. $dE(\gamma)X = 0\ \forall X \in T_\gamma\Omega_{p,q}$;*
2. *Entweder ist $\gamma(t) = p = q\ \forall t$ oder $|\dot\gamma(t)| \equiv$ konst $\neq 0$ und γ ist ein kritischer Punkt von L, d.h. $dL(\gamma)X = 0$, $\forall X \in T_\gamma\Omega_{p,q}$;*
3. *$\nabla\dot\gamma = 0$.*

Beweis. Gegeben sei $X = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s \in T_\gamma\Omega_{p,q}$ mit $\gamma : \mathbb{R} \to \Omega_{p,q}$; $s \mapsto \gamma_s$, $\gamma_0 = \gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
dE(\gamma)X &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}E(\gamma_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{1}{2}\int_0^1 \langle\dot\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\dot\gamma_s(t), \dot\gamma_0(t)\rangle dt = \\
&= \int_0^1 \langle\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\gamma_s(t), \dot\gamma_0(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle\frac{\partial}{\partial t}X(t), \dot\gamma_0(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle\dot X(t), \dot\gamma(t)\rangle dt = \\
&= \int_0^1 \langle\dot\gamma(t), \frac{d}{dt}X(t)\rangle dt \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt}\langle\dot\gamma(t), X(t)\rangle dt - \int_0^1 \langle\ddot\gamma(t), X(t)\rangle dt \overset{X(0)=X(1)=0}{=} \\
&= \langle\dot\gamma(t), X(t)\rangle\big|_0^1 - \int_0^1 \langle\nabla\dot\gamma(t), X(t)\rangle dt = -\int_0^1 \langle\nabla\dot\gamma(t), X(t)\rangle dt \qquad (*)
\end{aligned}$$

mit $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ und $\nabla\dot\gamma(t) \in \Pi(\gamma(t))\dot\gamma(t)$.

1. $\Leftrightarrow$ 3. :

$dE(\gamma)X = 0 \; \forall X \in T_\gamma\Omega_{p,q} \Leftrightarrow \ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}M \; \forall t \in [0,1]$

"$\Leftarrow$" in $(*)$ einsetzen

"$\Rightarrow$" Angenommen $\exists\, t_0 \in [0,1] : \ddot\gamma(t_0) \notin (T_{\gamma(t_0)}M)^\perp$.

Wir suchen ein $X \in T_\gamma\Omega_{p,q}$ so, dass $dE(\gamma)X \neq 0$.

Nach Annahme $\exists\, v_0 \in T_{\gamma(t)}M : 0 < \langle \ddot\gamma(t_0), v_0\rangle = \langle \ddot\gamma(t_0), \Pi(\gamma(t_0))v_0\rangle$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0,1] : \langle \ddot\gamma(t), \Pi(\gamma(t))v_0\rangle > 0$ (wegen Stetigkeit).

O.B.d.A. $t_0 \in (0,1)$, $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset [0,1]$. Wähle $\beta : [0,1] \to [0,1]$ so, dass β glatt,

$\beta(t_0) = 1,\; \beta(t) = 0$ für $|t - t_0| > \varepsilon$. $X(t) := \beta(t)\Pi(\gamma(t))v_0$.

Nun ist $X \in T_\gamma\Omega_{p,q}$ und $dE(\gamma)X = -\int_{t_0-\varepsilon}^{t_o+\varepsilon} \beta(t)\langle \Pi(\gamma(t))v_0, \ddot\gamma(t)\rangle dt < 0$.

1. $\Leftrightarrow$ 2. :

Auch unter Annahme von 1. gilt: $|\dot\gamma(t)| = konst$. Beweis:

1) $\Rightarrow \frac{d}{dt}|\dot\gamma(t)|^2 = 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle = 0$. Denn wäre $\langle \ddot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle \neq 0$, für ein $t_0 \in [0,1]$, so gäbe ein β (wie im Beweis "1. $\Rightarrow$ 3.") so, dass für $X(t) := \beta(t)\dot\gamma(t)$:

$dE(\gamma)X = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \beta(t)\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle dt \neq 0$. (Widerspruch zu 1.)

Fall 1: $|\dot\gamma(t)| \equiv 0$: 1) gilt, 2) gilt trivial.

Fall 2: $|\dot\gamma(t)| = c > 0$. Sei $X = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s \in T_\gamma\Omega_{p,q}$.

$$\begin{aligned} dL(\gamma)X &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_0^1 |\dot\gamma_s(t)|dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\langle \dot\gamma_0(t), \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\dot\gamma_s(t)\rangle}{|\dot\gamma_0(t)|} dt = \\ &= \frac{1}{c}\int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \frac{d}{dt}X(t)\rangle dt = \\ &= \frac{1}{c} dE(\gamma)X \end{aligned}$$

d.h. für $|\dot\gamma| \equiv c$ haben E und L die gleichen kritischen Punkte.

$\square$

2.6 Geodäten in lokalen Koordinaten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ glatte m-Mannigfaltigkeit, $\psi : V \to U$ lokale Parametrisierung,
$V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset M$ offen, $\gamma : I \to U$ glatte Kurve in M, $c : I \to V$ glatt so, dass $\gamma = \psi \circ c$.
Wir wollen die Geodäten-Bedingung $\nabla\dot\gamma = 0$ in eine Bedingung an c übersetzen.
Für $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ wollen wir ∇X in lokalen Koordinaten berechnen.
$X(t) \in T_{\gamma(t)}M = \operatorname{im} d\psi(c(t))$, also gibt es eine (eindeutige) Abbildung $\xi : I \to \mathbb{R}^m$ so, dass $X(t) = d\psi(c(t))\xi(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c(t))\xi^i(t)$.
Wie können wir $\nabla X(t) = \Pi(\gamma(t))\dot X(t)$ in lokalen Koordinaten ausdrücken?

$\dot{X}(t) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(c(t))\dot{c}^j(t)\xi^i(t) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c(t))\dot{\xi}^i(t);$

$\Pi(\psi(x))\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x) \in T_{\gamma(t)}M = \operatorname{im} d\psi(x).$

Wir definieren die **Christoffel-Symbole** Γ_{ij}^k durch $\Pi(\psi(x))\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x) =: \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial\psi}{\partial x^k}(x)$ mit $\Gamma_{ij}^k(x) \in \mathbb{R}$.
Berechnung: $\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x)$.

Damit haben wir bewiesen:

Lemma 2.4. *Sei* $X(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c(t))\xi^i(t)$, *dann ist*

$$\nabla X(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^k}(c(t))\left(\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(c(t))\dot{c}^i(t)\xi^j(t)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^k}(c(t))(\nabla\xi(t))^k$$

mit

$$(\nabla\xi)^k = \dot{\xi}^k + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \dot{c}^j \xi^i. \tag{6}$$

Korollar 2.5. *Sei* $c : I \to V$ *glatt. Dann gilt die Geodäten-Gleichung:*

$$\gamma = \psi \circ c \text{ Geodäte} \iff \ddot{c}^k + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(c)\dot{c}^i\dot{c}^j \equiv 0 \ \forall k = 1, \ldots, m.$$

Beweis. Lemma 2.4 mit $X = \dot{\gamma} = d\psi(x)\xi$.
$\nabla\dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = 0 \Leftrightarrow \nabla\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \ddot{c}^k + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(c)\dot{c}^i\dot{c}^j = 0 \quad \forall k = 1, ..., m.$ $\square$

Erinnerung.
1ste Fundamentalform $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x), \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(x)\rangle$ mit $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,m} = d\psi^T(x)d\psi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Bemerkung.

1. $\det(g_{ij}) \neq 0$, *denn:* $d\psi(x)^T d\psi(x)\xi = 0 \Rightarrow 0 = \langle \xi, d\psi^T d\psi\xi\rangle = |d\psi(x)\xi|^2$
   $\Rightarrow d\psi(x)\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0;$
2. *Wir bezeichnen* $(g_{ij}(x))^{-1}$ *mit* $(g^{kl}(x))$, *d.h.* $\sum_{j=1}^m g_{ij}(x)g^{jl}(x) = \delta_i^l;$
3. $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{kl} = g^{lk};$
4. $X, Y \in \operatorname{Vect}(\gamma)$: $X(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c(t))\xi^i(t)$ *und* $Y(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(c(t))\eta^j(t)$
   $\Rightarrow \langle X(t), Y(t)\rangle = \sum_{i,j}^m g_{ij}(c(t))\xi^i(t)\eta^j(t) = \langle\xi(t), \eta(t)\rangle_{g(c(t))};$
   Notation. $\langle\xi, \eta\rangle_{g(c)} := \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(c)\xi^i\eta^j.$

5. $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \nabla X(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), \nabla Y(t)\rangle$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \xi, \eta\rangle_{g(c)} = \langle \nabla\xi, \eta\rangle_{g(c)} + \langle \xi, \nabla\eta\rangle_{g(c)}$ *mit* $(\nabla\xi)^k$ *wie in (6).*

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle &= \langle \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c)(\nabla\xi)^i, \sum_j \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(c)\eta^j\rangle + \langle \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(c)\xi^i, \sum_j \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(c)(\nabla\eta)^j\rangle = \\ &= \sum_{i,j} g_{ij}(c)(\nabla\xi)^i\eta^j + \sum_{i,j} g_{ij}(c)\xi^i(\nabla\eta)^j = \\ &= \langle \nabla\xi, \eta\rangle_{g(c)} + \langle \xi, \nabla\eta\rangle_{g(c)}. \qquad (7)\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.

- *Die Christoffel-Symbole* $\Gamma_{ij}^k : V \to \mathbb{R}$ *sind eindeutig bestimmt durch* (7) *und* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$*;*
- $\Gamma_{lij} := \sum_k g_{lk}\Gamma_{ij}^k$*. Dann gilt* $\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}\Gamma_{lij}$ *und* $\Gamma_{lij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}) = \Gamma_{lji}$*.*

Beweis.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\langle \xi, \eta\rangle_{g(c)} - \langle \nabla\xi, \eta\rangle_{g(c)} - \langle \xi, \nabla\eta\rangle_{g(c)} = \\ &= \sum_{i,j} \frac{d}{dt}(g_{ij}(c)\xi^i\eta^j) - \sum_{k,j} g_{kj}(c)(\dot{\xi}^k + \sum_{i,l}\Gamma_{il}^k(c)\xi^i\dot{c}^l)\eta^j - \sum_{k,i} g_{ik}(c)\xi^i(\dot{\eta}^k + \sum_{j,l}\Gamma_{jl}^k(c)\eta^j\dot{c}^l) = \\ &= \sum_{i,j,l}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(c)\xi^i\eta^j\dot{c}^l - \sum_{i,j,k,l} g_{kj}(c)\Gamma_{il}^k(c)\xi^i\eta^j\dot{c}^l - \sum_{i,j,k,l} g_{ik}(c)\Gamma_{ji}^k(c)\xi^i\eta^j\dot{c}^l = \\ &= \sum_{i,j,l}\Big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(c) - \sum_k g_{kj}(c)\Gamma_{il}^k(c) - \sum_k g_{ik}(c)\Gamma_{jl}^k(c)\Big)\xi^i\eta^j\dot{c}^l.\end{aligned}$$

Also (2., 3. gelten durch Vertauschen von Indizes):

1. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{ijl}$
2. $\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{lij} = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lij}$
3. $\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} = \Gamma_{jli} + \Gamma_{lji} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{lij}$

$2. + 3. - 1. \Rightarrow\ 2\Gamma_{lij} = \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$. □

Lemma 2.7. *Sei* $p \in M$, $v \in T_pM$*. Dann existiert eine (eindeutige) Geodäte* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *mit* $\varepsilon > 0$ *so, dass* $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$*.*

Beweis. $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$ lokale Parametrisierung nahe p. $\psi(x) = p$; $d\psi(x)\xi = v$. Gesucht: Lösung $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ von:

$$\begin{cases} \ddot{c}^k + \Gamma^k_{ij}(c)\dot{c}^i\dot{c}^j = 0 \qquad \forall k = 1, ..., m \\ c(0) = x \\ \dot{c}(0) = \xi \end{cases}$$

Das Lemma folgt mit $\gamma = \psi \circ c$ aus der Existenz und Eindeutigkeit für gewöhnliche Differentialgleichungen. □

Alternative Berechnung der Γ^k_{ij}
Energie in lokale Koordinaten: $c : [0, 1] \to V$.
$E(c) = \int_0^1 \sum_{i,j}^m g_{ij}(c)\dot{c}^i\dot{c}^j dt = \int_0^1 F(c, \dot{c})dt$;
c erfüllt $\nabla\dot{c} = 0 \iff \psi \circ c = \gamma$ Geodäte
$\iff \gamma$ kritischer Punkt von $E \iff c$ kritischer Punkt von E
$\Leftrightarrow c$ erfüllt Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{c}^i}(c(t), \dot{c}(t)) = \frac{\partial F}{\partial c^i}(c(t), \dot{c}(t)). \tag{8}$$

Vergleich von (8) und (6) = 0 gibt Formel für Γ^k_{ij}.

Beispiel (Geodäten)**.**

1. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$, $p = 0$, $v \in T_0M = \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, $\gamma(t) = tv$, $-1 < t < 1$.
2. $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, $p \in S^{n-1}$, $v \in T_pM$, $|v| = 1$. $\langle p, v\rangle = 0$, $\gamma(t) = p\cos t + v\sin t$, $t \in \mathbb{R}$. $\ddot{\gamma} = -\gamma \perp T_{\gamma(t)}M$.

2.7 Geodätisch vollständige Mannigfaltigkeiten

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst* ***geodätisch vollständig****, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Tangentialvektor $v \in T_pM$ eine Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to M$ gibt so, dass $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Definition. *Sei M eine geodätisch vollständige Mannigfaltigkeit Sei $p \in M$.*
Die ***Exponentialabbildung von M im Punkt p*** *ist die Abbildung $\exp_p : T_pM \to M$ die durch $\exp_p(v) := \gamma(1)$ definiert ist, wobei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ die Geodäte mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Lemma 2.8. *M geodätisch vollständig, $p \in M$, $v \in T_pM$, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v \Longrightarrow \gamma(t) = \exp_p(tv)$.*

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man $\gamma_\lambda(t) := \gamma(\lambda t)$
$\Rightarrow \dot{\gamma}_\lambda(t) = \lambda\dot{\gamma}(\lambda t)$; $\ddot{\gamma}_\lambda(t) = \lambda^2\ddot{\gamma}(\lambda t)$
$\Rightarrow \nabla\dot{\gamma}_\lambda(t) = \Pi(\gamma_\lambda(t))\ddot{\gamma}_\lambda(t) = \lambda^2\Pi(\gamma(t\lambda))\ddot{\gamma}(\lambda t) = \lambda^2\nabla\dot{\gamma}(\lambda t) = 0$
$\gamma_\lambda : \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte, $\gamma_\lambda(0) = p$, $\dot{\gamma}_\lambda(0) = \lambda v$
$\Rightarrow \gamma(\lambda) = \gamma_\lambda(1) = \exp_p(\lambda v)$. □

Korollar 2.9. *$d\exp_p(0) = id : T_pM \to T_pM$.*

Beweis. $d\exp_p(0)v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp_p(tv) = \dot\gamma(0) = v$. $\square$

Korollar 2.10. *M geodätisch vollständig, $p \in M$, $B_r(p) = \{v \in T_pM \mid |v| < r\}$.*
$U_r := \exp_p(B_r(p)) \subset M$.
$\Longrightarrow \exists\, r > 0$ (hinreichend klein) so, dass U_r offen ist und $\exp_p : B_r(p) \to U_r$ ein Diffeomorphismus ist.

Satz 2.11. *Sei M geodätisch vollständig. Sei $p \in M$ und $r > 0$ wie im Korollar 2.10. Sei $v \in T_pM$ so, dass $|v| < r$. Sei $q := \exp_p(v)$. Es gilt:*

1. *$d(p, q) = |v|$;*
2. *Falls $\gamma : [0, 1] \to M$ eine glatte Kurve ist so, dass $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, so gilt $L(\gamma) \geq |v|$. Falls $L(\gamma) = |v|$ so gilt $\gamma(t) = \exp_p(\beta(t)v)$, wobei $\beta : [0, 1] \to [0, 1]$ eine glatte Abbildung ist so, dass $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$, $\dot\beta(t) \geq 0\ \forall t$.*

Lemma 2.12 (Gauss Lemma)**.** *Sei $w(t) \in T_pM$, $|w(t)| = \varepsilon\ \forall t$.*
Sei $\alpha(s, t) := \exp_p(sw(t)) \in M$. Dann gilt $\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle \equiv 0$.

Beweis.

1. $s = 0$, $\alpha(0, t) = \exp_p(0) = p$; $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0, t) = 0 \Rightarrow \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0, t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0, t)\rangle = 0$;
2. $s \mapsto \alpha(s, t)$ ist eine Geodäte (Lemma 2.8)
   $\Rightarrow$ die Abbildung $s \mapsto \left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s, t)\right| = |w(t)| = \varepsilon$ ist konstant $\Rightarrow \left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s, t)\right| = \varepsilon \quad \forall s, t$;
3. da $\nabla_s \frac{\partial\alpha}{\partial s} = 0$ ($s \mapsto \alpha(s, t)$ Geodäte):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle &= \langle \nabla_s \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle + \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \nabla_s \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle = \\ &= \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \Pi(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial s\partial t}\rangle = \langle \Pi(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial s\partial t}\rangle = \\ &= \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\alpha}{\partial s})\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right|^2 = 0.\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. \Rightarrow & \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0, t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0, t)\rangle = 0 \\ 3. \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial s}\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle \equiv 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\rangle \equiv 0.$$ $\square$

Beweis von Satz 2.11. $q = \exp_p(v)$, $|v| = \varepsilon < r$, $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.

Fall 1: $\gamma(t) \in \exp_p(\overline{B_\varepsilon(p)}) \quad \forall t \in [0,1]$.
O.B.d.A. $\gamma(t) \neq p \quad \forall t > 0$. Dann:
$\gamma(t) = \exp_p(\beta(t)w(t))$, $\beta(t)w(t) \in \overline{B_\varepsilon(p)}$, $w(t) \in T_pM$, $|w(t)| = \varepsilon$.
$\beta(t) \in [0,1]$.
$\Rightarrow \beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$, $w(1) = v$. $\alpha(s,t) := \exp_p(sw(t)) \Rightarrow \gamma(t) = \alpha(\beta(t), t)$
$\Rightarrow \dot\gamma(t) = \dot\beta(t)\frac{\partial\alpha}{\partial s}(\beta(t),t) + \frac{\partial\alpha}{\partial t}(\beta(t),t)$.
$|\dot\gamma(t)|^2 \overset{Lemma\,2.12}{=} \dot\beta(t)^2\left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right|^2 \geq \dot\beta(t)^2\left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right|^2 = \dot\beta(t)^2\varepsilon^2$
$\Rightarrow |\dot\gamma(t)| \geq |\dot\beta(t)|\varepsilon$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^1 |\dot\gamma(t)|dt \geq \varepsilon \int_0^1 |\dot\beta(t)|dt \geq \varepsilon \int_0^1 \dot\beta(t)dt = \varepsilon(\beta(1) - \beta(0)) = \varepsilon.$$

Wir nehmen nun an, dass $L(\gamma) = |v| = \varepsilon$.
Dann gilt $\dot\beta(t) \geq 0\ \forall t$, und $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(\beta(t),t) \equiv 0$.
$\Rightarrow \dot\beta(t) \geq 0$ und $\dot w(t) = 0 \quad \forall t$.
$\Rightarrow \gamma(t) = \exp_p(\beta(t)v)$.

Fall 2: $\exists\, t$ so, dass $\gamma(t) \notin \exp_p(\overline{B_\varepsilon(p)})$.
Dann gilt für die Länge: $L(\gamma) > \varepsilon$. $\square$

$M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, $d(p,q) = \inf_{\gamma\in\Omega_{p,q}} L(\gamma)$.

Definition. *Eine Teilmenge $A \subset M$ heisst **beschränkt**, wenn es einen Punkt $p_0 \in M$ gibt so, dass $\sup_{p\in A} d(p_0, p) < \infty$.* $(*)$

Bemerkung. *Wenn $(*)$ für ein $p_0 \in M$ gilt, dann gilt es für jedes $p_0 \in M$.*

Bemerkung. *Sei M eine nicht zusammenhängende Mannigfaltigkeit; p,q in verschiedenen Zusammenhangskomponenten. Dann gilt $\Omega_{p,q} = \emptyset$ und $d(p,q) = \infty$.*

Beispiel (Beschränkte Teilmenge)**.** $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\frac{1}{x}\}$,
$B := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. $A := M \cap B$ *nicht beschränkt!*

Beispiel (Beschränkte Teilmenge)**.** $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $d(p,q) = |p-q| \leq 1$ *für alle* $p,q \in M$.
$A = M$ *beschränkt, abgeschlossen (rel. M), nicht kompakt.*

Übung. Sei (M,d) metrischer Raum. Jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von M ist kompakt $\iff$ Jede beschränkte Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge. $(\star)$
($p_k \in M$ beschränkt $\iff \{p_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt).

Frage. Für welche Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt $(\star)$?

Satz 2.13. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

1. *M ist geodätisch vollständig;*
2. *(M,d) ist ein vollständiger metrischer Raum;*
3. *Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von (M,d) ist kompakt.*

Beweis. 3. $\Rightarrow$ 2.:
Sei $p_k \in M$ eine Cauchy-Folge bezüglich d, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k, l \geq k_0, \; d(p_k, p_l) < \varepsilon$.
$\varepsilon = 1 : \; \exists \, k_0 \, \forall k, l \geq k_0 \; d(p_k, p_l) < 1$.
Sei $c := \max_{1 \leq k \leq k_0} d(p_1, p_k) + 1$.
Dann $d(p_1, p_k) \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}$:

- $k \leq k_0 \qquad \surd$.
- $k \geq k_0 : \; d(p_1, p_k) \leq d(p_1, p_{k_0}) + d(p_{k_0}, p_k) \leq c - 1 + 1 \leq c \qquad \surd$.

$\Rightarrow p_k$ beschränkt $\overset{3.}{\Rightarrow} \exists$ eine konvergente Teilfolge $p_{k_i} \to p$
$\Rightarrow p_k \to p \in M$ (da p_k Cauchy-Folge).

Für den Rest des Beweises von Satz 2.13 brauchen wir folgendes Lemma. □

Lemma 2.14. *Sei $X \in \mathrm{Vect}(M)$. Sei $\gamma : (0, T) \to M$ eine Integralkurve von X. Sei $p_0 \in M$ so, dass $\lim_{t \to 0, t > 0} \gamma(t) = p_0$. Sei* $\gamma_0(t) := \begin{cases} p_0 & t = 0 \\ \gamma(t) & 0 < t < T \end{cases}$
$\Longrightarrow \gamma_0$ *ist differenzierbar in $t = 0$ und $\dot{\gamma}_0(0) = X(p_0)$.*

Bemerkung. *D.h. γ_0 ist eine Lösung des Anfangswert Problems $\dot{\gamma}_0(t) = X(\gamma_0(t))$ $(t \geq 0)$, $\gamma_0(0) = p_0$*
$\Longrightarrow \exists$ *Integralkurve $\beta : (-\varepsilon, T) \to M$ von X so, dass $\beta(t) = \gamma(t) \quad \forall t > 0$.*

Beweis von Lemma 2.14.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben: wähle $\rho > 0$ so, dass $|p - p_0|_{p \in M} \leq \rho \Rightarrow |X(p) - X(p_0)| \leq \varepsilon$
und wähle $\delta > 0 \; \forall t \in (0, T) : \; 0 < t < \delta \; \Rightarrow \; |\gamma(t) - p_0| < \rho$.

Behauptung. $0 < t \leq \delta \; \Rightarrow \; \left| \frac{\gamma_0(t) - p_0}{t} - X(p_0) \right| \leq \varepsilon$.

Beweis der Behauptung. Sei $0 < s < t \leq \delta$.

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma(s) - (t - s) X(p_0)| &= \left| \int_s^t \dot{\gamma}(r) dr - (t - s) X(p_0) \right| = \left| \int_s^t \Big(X(\gamma(r)) - X(p_0) \Big) dr \right| \leq \\ &\leq \int_s^t \big| X(\gamma(r)) - X(p_0) \big| dr \leq \int_s^t \varepsilon \, dr = (t - s) \varepsilon \leq t \varepsilon. \end{aligned}$$

$\overset{s \to 0}{\Longrightarrow} |\gamma(t) - p_0 - t X(p)| \leq \varepsilon t$. □

Das Lemma folgt aus der Behauptung und der Definition von Differenzierbarkeit.

□

2te Fundamentalform

Sei $p \in M$, $\Pi(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Projektion auf T_pM.
D.h. $\Pi(p)^2 = \Pi(p) = \Pi^T$; $\quad \Pi(p)v = \begin{cases} v & \forall v \in T_pM \\ 0 & \forall v \in T_pM^\perp \end{cases}$
$\Pi : M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist glatt, $d\Pi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^{n\times n}$.
$d\Pi(p)v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Pi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in T_pM$; $\gamma : \mathbb{R} \to M$, $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$.

Lemma 2.15. *Sei $p \in M$, $v, w \in T_pM \Rightarrow (d\Pi(p)v)w = (d\Pi(p)w)v \in T_pM^\perp$ d.h. wir erhalten eine Bilinearform: $h_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$. h_p heisst* ***2te Fundamentalform*** *von M an der Stelle p.*

$$h_p(v, w) := (d\Pi(p)v)w.$$

Bemerkung. *Die erste Fundamentalform von M an der Stelle p ist das innere Produkt (des $\mathbb{R}^n$ eingeschränkt auf T_pM) :*

$$\begin{cases} T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \end{cases}$$

Beweis des Lemmas. Seien $p \in M$, $v, w \in T_pM$.
Wähle $\gamma : \mathbb{R} \to M$ glatt, $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$.
Wähle $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ so, dass $X(0) = w$. (z.B. $X(t) := \Pi(\gamma(t))w \in T_{\gamma(t)}M$)
$\Rightarrow X(t) = \Pi(\gamma(t))X(t)$
$(\frac{d}{dt}) \Rightarrow \dot X(t) = \Pi(\gamma(t))\dot X(t) + (d\Pi(\gamma(t))\dot\gamma(t))X(t) = \nabla X + h_\gamma(\dot\gamma, X)$,

$$h_\gamma(\dot\gamma, X) = (\mathbb{1} - \Pi(\gamma))\dot X \in T_{\gamma(t)}M^\perp,\ t = 0;$$

$h_p(v, w) \in T_pM^\perp$ "Gauss-Weingarten Formel".

Sei $\tilde\gamma : \mathbb{R}^2 \to M$ glatt mit $\tilde\gamma(0, 0) = p$, $\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial s}(0, 0) = v$ und $\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t}(0, 0) = w$.
$X(s, t) := \frac{\partial\tilde\gamma}{\partial s}(s, t) \in T_{\tilde\gamma(s,t)}M$, $Y(s, t) := \frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t}(s, t)$.

$$\begin{aligned} h_{\tilde\gamma}(\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t}) = h_{\tilde\gamma}(\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial s}, Y) &= (\mathbb{1} - \Pi(\tilde\gamma))\frac{\partial Y}{\partial s} = \\ &= (\mathbb{1} - \Pi(\tilde\gamma))\frac{\partial^2\tilde\gamma}{\partial s\partial t} = (\mathbb{1} - \Pi(\tilde\gamma))\frac{\partial X}{\partial t} = \\ &= h_{\tilde\gamma}(\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t}, X) = h_{\tilde\gamma}(\frac{\partial\tilde\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\tilde\gamma}{\partial s}) \end{aligned}$$

$\overset{s=t=0}{\Longrightarrow} h_p(v, w) = h_p(w, v)$. $\square$

Beispiel (2te Fundamentalform)**.** *Sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$, $X = \dot\gamma$. Gauss-Weingarten:*

$$\ddot\gamma = \nabla\dot\gamma + h_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) \tag{9}$$

$$\gamma \text{ Geodäte} \iff \nabla\dot\gamma = 0 \overset{(9)}{\iff} \ddot\gamma = h_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma). \tag{10}$$

Was ist TTM? Was ist, für $(p, v) \in TM$, $T_{(p,v)}TM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*?*

Kurve in TM ist ein Paar (γ, X), $\gamma : \mathbb{R} \to M$, $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$, $(\gamma(t), X(t)) \in TM$,
$(\dot\gamma, \dot X) = (\dot\gamma, \nabla X + h_\gamma(\dot\gamma, X))$;

$T_{(p,v)}TM = \{(w_0, w_1 + h_p(w_0, v) \mid w_0, w_1 \in T_pM\}$; $\quad \dim T_{(p,v)}TM = 2 \dim M$.

Beispiel eines Vektorfeldes auf TM, $Y \in \mathrm{Vect}(TM)$
$Y(p, v) \in T_{(p,v)}TM$.

$$Y(p, v) := (v, h_p(v, v)).$$

Integralkurven von $Y : t \mapsto (\gamma(t), \dot\gamma(t))$; γ *Geodäte nach* (10).
$(\dot\gamma, \dot X) = Y(\gamma, X)$, $\ddot\gamma = h_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma)$, $X = \dot\gamma$.

Satz 2.16 (Hopf-Rinow)**.** *Sei M zusammenhängend, geodätisch vollständig*
$\Longrightarrow \forall p, q \in M \,\exists$ *Geodäte* $\gamma : [0, 1] \to M$ *so, dass* $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $L(\gamma) = d(p, q)$.

Beweis von Satz 2.13 (Fortsetzung).

2. $\Rightarrow$ 1. :

Sei $p_0 \in M$, $v_0 \in T_{p_0}M$.
Sei $\gamma : [0, T) \to M$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = p_0$, $\dot\gamma(0) = v_0$, $T < \infty$.
Widerspruchsannahme: $[0, T)$ ist das maximale Existenzintervall (in $\mathbb{R}^+$).
$|\dot\gamma(t)| = konst = |v_0| \quad \forall t \in [0, T)$.
Sei $0 \le s < t < T$, es folgt:

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \le L(\gamma|_{[s,t]}) = \int_s^t |\dot\gamma(r)| dr = (t - s)|v_0|$$

$$\Rightarrow \lim_{t,s \to T;\, s<T} d(\gamma(s), \gamma(t)) = 0.$$

Für jede Folge $t_k \to T$, $t_k < T$ ist $\gamma(t_k)$ eine Cauchy-Folge in M.
Aus 2. folgt: für jede Folge $t_k \nearrow T$ existiert der Limes $\lim_{k\to\infty} \gamma(t_k)$.
$\Rightarrow \lim_{t \nearrow T} \gamma(t) =: p_1 \in M$ existiert.

Da M eine Mannigfaltigkeit ist, besitzt p_1 eine kompakte Umgebung in M, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ so, dass die Menge $\overline{B}_\varepsilon(p_1) := \{p \in M \mid d(p, p_1) \le \varepsilon\}$ kompakt ist.
Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{|v_0|} \Rightarrow \gamma(t) \in \overline{B}_\varepsilon(p_1) \quad \forall t \in [T - \delta, T)$.
γ ist eine Geodäte:

$$\ddot\gamma(t) = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)).$$

Da $\overline{B}_\varepsilon(p_1)$ kompakt ist, gibt es eine Konstante $c > 0$ so, dass:

$$(d\Pi(p)v)v = |h_p(v, v)| \le c|v|^2 \qquad \forall p \in \overline{B}_\varepsilon(p_1), \quad \forall v \in T_pM$$

$\Rightarrow \forall t \in [T - \delta, T)$ gilt: $|\ddot\gamma(t)| \le c|\dot\gamma(t)|^2 = c|v_0|^2$
$\Rightarrow |\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)| \le c|v_0|^2|t - s| \qquad \forall s, t \in [T - \delta, T)$

$\Rightarrow$ Der Limes $v_1 := \lim_{t \nearrow T} \dot\gamma(t)$ existiert in $\mathbb{R}^n$.

Da $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M \;\forall t$ folgt, dass $v_1 \in T_{p_1}M$; d.h. Limes $\lim_{t\nearrow T}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = (p_1, v_1)$ existiert in TM.
Nun ist $t \mapsto (\gamma(t), \dot\gamma(t))$ eine Integralkurve des Vektorfeldes $Y \in \mathrm{Vect}(TM)$ das durch $Y(p,v) = (v, h_p(v,v))$ definiert ist.
Aus Lemma 2.14 folgt, dass die Integralkurve $(\gamma, \dot\gamma)$ sich auf ein grösseres Intervall $[0, T+\varepsilon)$ fortsetzen lässt, d.h. $[0,T)$ ist nicht das maximale Existenzintervall von γ. (Widerspruch)

1. $\Rightarrow$ 3. :
Sei $K \subset M$ abgeschlossen und beschränkt (bezüglich d). $\exp_p : T_pM \to M$ glatt. Aus Satz von Hopf-Rinow folgt:
$\forall q \in K \,\exists\, v \in T_pM$ so, dass $\exp_p(v) = q$, $|v| = d(p,q)$
(Die Geodäte von p nach q hat die Form $\gamma(t) = \exp_p(tv)$)
K beschränkt $\Rightarrow$ $r := \sup_{q\in K} d(p,q) < \infty$
$\overline{B}_r := \{v \in T_pM \mid |v| \le r\} \;\Rightarrow\; K \subset \exp_p(\overline{B}_r)$
Sei $\tilde K := \{v \in B_r \mid \exp_p(v) \in K\} \subset T_pM$
$\tilde K = \overline{B}_r \cap \exp_p^{-1}(K)$ beschränkt und abgeschlossen
$\Rightarrow$ $\tilde K$ kompakt
$\Rightarrow$ $K = \exp_p(\tilde K)$ kompakt.

□

Lemma 2.17. $\Sigma_\varepsilon(p) := \{v \in T_pM \mid |v| = \varepsilon\}$, $S_\varepsilon(p) := \{p' \in M \mid d(p,p') = \varepsilon\}$
Wir nehmen an, dass ε so klein ist, dass $\exp_p : \Sigma_\varepsilon(p) \to S_\varepsilon(p)$ ein Diffeomorphismus ist. Seien $v, w \in T_pM$, so dass $|v| = |w| = \varepsilon$, $d(\exp_p(v); \exp_p(w)) = 2\varepsilon$. Dann gilt: $w = -v$.

Beweis.
Behauptung. $\forall v, w \in T_pM :\; \lim_{\delta\to 0} \frac{d(\exp_p(\delta v), \exp_p(\delta w))}{\delta} = |v - w|$.

Beweis der Behauptung.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \frac{d(\exp_p(\delta v), \exp_p(\delta w))}{\delta} &= \lim_{\delta\to 0} \frac{d(\exp_p(\delta v), \exp_p(\delta w))}{|\exp_p(\delta v) - \exp_p(\delta w)|}\frac{|\exp_p(\delta v) - \exp_p(\delta w)|}{\delta} = \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{|\exp_p(\delta v) - \exp_p(\delta w)|}{\delta} = \\
&= \lim_{\delta\to 0} \Big|\frac{\exp_p(\delta v) - p}{\delta} + \frac{p - \exp_p(\delta w)}{\delta}\Big| = \\
&= \big|d\exp_p(0)v + d\exp_p(0)(-w)\big| = \\
&= |v - w|.
\end{aligned}
$$

□

Sei nun $v, w \in T_pM$, so dass $|v| = |w| = 1$ und $v \neq -w$.
Dann gilt $|v - w| < 2$, weil:
$|v - w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v, w\rangle < 4$, da $\langle v, w\rangle > -1$.

Aus der Behauptung folgt: $\lim_{\delta\to 0} \frac{d(\exp_p(\delta v),\exp_p(\delta w))}{\delta} < 2$.
$\exists\, \delta > 0$: $d(\exp_p(\delta v), \exp_p(\delta w)) < 2\delta$, $\delta < \varepsilon$

$$\Rightarrow d(\exp_p(\varepsilon v), \exp_p(\varepsilon w)) \leq \left\{ \begin{array}{ll} d(\exp_p(\varepsilon v), \exp_p(\delta v)) & = \varepsilon - \delta \\ +d(\exp_p(\delta v), \exp_p(\delta w)) & < 2\delta \\ +d(\exp_p(\delta w), \exp_p(\varepsilon w)) & = \varepsilon - \delta \end{array} \right\} < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Übung. $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mannigfaltigkeit $\Longrightarrow$ M vollständig.

Beweis von Satz von Hopf-Rinow. M zusammenhängend, geodätisch vollständig. p, $q \in M$, $r := d(p,q)$. Nach Korollar 2.10 gilt:
$\Sigma_1(p) \to S_\varepsilon(p)$, $v \mapsto \exp_p(\varepsilon v)$ ist ein Diffeomorphismus für ε hinreichend klein.

Schritt 1 : $d(S_\varepsilon(p), q) = r - \varepsilon$ für ε klein.

Beweis. Sei $\delta > 0$
$\Rightarrow \exists\, \gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $L(\gamma) \leq r + \delta$.
Sei $\gamma(t_0)$ der letzte Punkt von $\gamma([0,1])$ auf $S_\varepsilon(p)$
$\Rightarrow d(\gamma(t_0), q) \leq L(\gamma\big|_{[t_0,1]}) = L(\gamma) - L(\gamma\big|_{[0,t_0]}) \leq r + \delta - \varepsilon$
$\Rightarrow d(S_\varepsilon(p), q) \leq r + \delta - \varepsilon \quad \forall \delta > 0$
$\Rightarrow d(S_\varepsilon(p), q) \leq r - \varepsilon$
$\Rightarrow d(S_\varepsilon(p), q) = r - \varepsilon$. $\square$

Schritt 2 : Nach Schritt 1 existiert ein $v \in \Sigma_1(p)$ so, dass $d(\exp_p(\varepsilon v), q) = r - \varepsilon$.
Sei $\gamma : [0, r] \to M$ definiert durch $\gamma(t) := \exp_p(tv)$
$\Rightarrow d(\gamma(t), q) = r - t \quad \forall t \in [0, r]$ (d.h. $\gamma(r) = q$, $L(\gamma) = r$).
(Schritt 2 $\Rightarrow$ Satz von Hopf-Rinow)

Beweis. $I := \{t \in [0, r] \mid d(\gamma(t), q) = r - t\}$

1. $I \neq \emptyset$, da $\varepsilon \in I$;
2. I abgeschlossen (trivial);
3. $t \in I \Rightarrow [0, t] \subset I$. Sei $0 \leq s \leq t$
   $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(\gamma(s), q) \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) = t - s + r - t = r - s \\ d(\gamma(s), q) \geq d(p, q) - d(p, \gamma(s)) \geqslant r - s \end{array} \right.$
   $\Rightarrow d(\gamma(s), q) = r - s$;
4. I offen:
   $t \in I \Rightarrow d(\gamma(t), q) = r - t$.
   Aus Schritt 1 folgt, dass $d(S_\varepsilon(\gamma(t)), q) = r - \varepsilon - t$ mit ε klein.
   Wähle $w \in T_{\gamma(t)}M$, $|w| = 1$ so, dass $d(\exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w), q) = r - \varepsilon - t$.

   Behauptung: $\exp_{\gamma(t)}(sw) = \gamma(t + s)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $d(\gamma(t-\varepsilon), \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) = 2\varepsilon$.
$r - t + \varepsilon = d(\gamma(t-\varepsilon), q) \leq d(\gamma(t-\varepsilon),$
$\exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) + d(\exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w), q) = d(\gamma(t-\varepsilon), \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) + r - t - \varepsilon$
$\Rightarrow\ d(\gamma(t-\varepsilon), \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) \geq 2\varepsilon$
$\Rightarrow\ d(\gamma(t-\varepsilon), \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) = 2\varepsilon.$

$\gamma(t-\varepsilon) = \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon v')$, $v' = -\dot{\gamma}(t)$, $|v'| = 1$
$d(\exp_{\gamma(t)}(\varepsilon v'), \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w)) = 2\varepsilon.$
Aus Lemma 2.17 folgt, dass $v' = -w$
$\Rightarrow\ \exp_{\gamma(t)}(-\varepsilon w) = \gamma(t-\varepsilon)$
$\Rightarrow\ \exp_{\gamma(t)}(sw) = \gamma(t+s)$. □

$\Rightarrow\ d(\gamma(t+\varepsilon), q) = d(\exp_{\gamma(t)}(\varepsilon w), q) = r - t - \varepsilon$
$\Rightarrow\ t + \varepsilon \in I\ \Rightarrow\ [0, t+\varepsilon] \subset I$ also ist I offen.

Aus 1., 2., 3. und 4. folgt $I = [0, r]$, $\gamma(r) = q$. □
□

3 Der Levi-Civita Zusammenhang

3.1 Kovariante Ableitung

$X \in \mathrm{Vect}(M)$;
$X : M \to \mathbb{R}^n$, $X(p) \in T_pM$;
$dX(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ im Allgemeinen $dX(p)v \notin T_pM$;
$\Pi(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die orthogonale Projektion auf T_pM.

Definition. *Der Tangentialvektor*

$$\nabla_v X(p) := \Pi(p)dX(p)v \in T_pM$$

*heisst **kovariante Ableitung** von X an der Stelle p in Richtung $v \in T_pM$.*

Bemerkung. $\gamma : \mathbb{R} \to M,\ X \in \mathrm{Vect}(M) \Longrightarrow X \circ \gamma \in \mathrm{Vect}(\gamma)$
und $\nabla(X \circ \gamma)(t) = \Pi(\gamma(t))\frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(t) = \Pi(\gamma(t))dX(\gamma(t))\dot\gamma(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}X(\gamma(t))$.

Bemerkung. *Seien* $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$.
Dann ist $\nabla_Y X \in \mathrm{Vect}(M)$ *das Vektorfeld* $\nabla_Y X(p) = \nabla_{Y(p)}X(p)$.

Lemma 3.1. *Es gilt:*

i) $\mathcal{L}_X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ *(∇ Riemannsch);*

ii) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y]$ *(∇ torsionsfrei).*

Beweis.

i) $f(p) := \langle Y(p), Z(p)\rangle$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\langle Y, Z\rangle(p) &= df(p)X(p) = \langle dY(p)X(p), Z(p)\rangle + \langle Y(p), dZ(p)X(p)\rangle = \\ &= \langle dY(p)X(p), \Pi(p)Z(p)\rangle + \langle \Pi(p)Y(p), dZ(p)X(p)\rangle = \\ &= \langle \Pi(p)dY(p)X(p), Z(p)\rangle + \langle Y(p), \Pi(p)dZ(p)X(p)\rangle = \\ &= \langle\nabla_X Y(p), Z(p)\rangle + \langle Y(p), \nabla_X Z(p)\rangle;\end{aligned}$$

ii) $[X, Y] = dXY - dYX = \Pi(dXY - dYX) = \nabla_Y X - \nabla_X Y$.

□

Gauss-Weingarten Formel

$\Pi : M \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad h_p(v) := d\Pi(p)v \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad d\Pi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^{n\times n},$
$h_p(v,w) := h_p(v)w \in \mathbb{R}^n, \qquad v \in T_pM, w \in \mathbb{R}^n.$
Wir hatten gezeigt $v, w \in T_pM \Longrightarrow h_p(v,w) = h_p(w,v) \in T_pM^\perp$.

Lemma 3.2 (Gauss-Weingarten)**.** *$X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. Dann gilt:*

$$dX(p)Y(p) = \nabla_Y X(p) + h_p(X(p), Y(p)).$$

Beweis. Durch ableiten von $X(p) = \Pi(p)X(p)$ erhelten wir:
$dX(p)Y(p) = (d\Pi(p)Y(p))X(p) + \Pi(p)dX(p)Y(p) = h_p(Y(p), X(p)) + \nabla X(p)$. □

Bemerkung. *2te Fundamentalform $h_p(v) : T_pM \to T_pM^\perp$.*
Was ist $h_p(v)^* : T_pM^\perp \to T_pM$?
Antwort: $h_p(v)^*w = (d\Pi(p)v)w$, $w \in T_pM^\perp$, $d\Pi(p)v : \begin{cases} T_pM & \to & T_pM^\perp \\ T_pM^\perp & \to & T_pM \end{cases}$.

Beispiel.

i) $M \subset \mathbb{R}^n \quad \dim M = n-1.$
$\nu \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n), \qquad |\nu(p)| = 1, \qquad \nu(p) \perp T_pM.$
$\Longrightarrow h_p(v,w) = \eta_p(v,w)\nu(p) \in T_pM^\perp = \nu(p)\mathbb{R}$,
wobei $\eta_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform.
Es gilt $\eta_p(v,w) = -\langle d\nu(p)v, w\rangle$, da
$\Pi(p) = \mathbb{1} - \nu(p)\nu(p)^T$
$\Longrightarrow d\Pi(p)v = -(d\nu(p)v)\nu(p)^T - \nu(p)(d\nu(p)v)^T$
$\Longrightarrow (d\Pi(p)v)w = -\langle d\nu(p)v, w\rangle\nu(p) = h_p(v,w).$

ii) $M = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m}), f(0) = df(0) = 0\}, \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}.$
$\Longrightarrow 0 \in M$ *mit* $T_0M = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ *und* $T_0M^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}$.
2te Fundamentalform $h_0 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$.

Behauptung. $h_0(v,w) = d^2f(0)(v,w) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)v^iw^j$.

Beweis. $\gamma : \mathbb{R} \to M, \quad \gamma(0) = (0,0), \quad \dot\gamma(0) = (v, 0)$, das heisst
$\gamma(t) = (x(t), f(x(t)))$ mit $x(0) = 0$ und $\dot x(0) = v$;
$Z \in \mathrm{Vect}(\gamma)$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$, $Y(t) = df(x(t))X(t)$, $Z(0) = (w, 0)$, $X(0) = w$.
Es gilt $\dot Z = \Pi \dot Z + h_\gamma(\dot\gamma, Z)$
$\overset{t=0}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} h_0((v,0),(w,0)) =& (\mathbb{1} - \Pi(0))\dot Z(0) = \dot Y(0) = \\ =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(df(x(t))X(t)) = \\ =& d^2f(0)(\dot x, X(0)) = d^2f(0)(v,w). \end{aligned}$$

□

Lokale Koordinaten

$\psi : \mathbb{R}^m \supset V \to M \subset \mathbb{R}^n, \quad x = (x^1, ..., x^m) \mapsto \psi(x) = p$ lokale Parametrisierung.
$v = d\psi(x)\xi,\ w = d\psi(x)\eta \in T_pM$, dann $\langle v, w\rangle = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x)\xi^i\eta^j$,
wobei $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x), \frac{\partial\psi}{\partial x^j}(x)\rangle$.

$\xi, \eta \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m), \quad X(\psi(x)) = d\psi(x)\xi(x), \quad Y(\psi(x)) = d\psi(x)\eta, \quad X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$.
Frage: Was ist $\nabla_Y X(\psi(x))$?
Wir wissen $\nabla_Y X(\psi(x)) = d\psi(x)\zeta(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\zeta^k(x)$. Was ist ζ ?

Lemma 3.3.

$$\zeta^k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\eta^j + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \xi^i\eta^j$$

mit $\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^m g^{kl}\Gamma_{lij}$, *wobei* $\Gamma_{lij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l})$.

Beweis. $\Pi(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x^i\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial\psi}{\partial x^k}$, Definition benutzen.
Siehe auch Serie 8, Aufgabe 3. □

3.2 Paralleltransport

$M \subset \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeit, $\gamma : I \to M$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.
$\mathrm{Vect}(\gamma) = \{X : I \to \mathbb{R}^n \text{ glatt} \mid X(t) \in T_{\gamma(t)}M\}$.

Definition. $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ *heisst* ***parallel*** *wenn*

$$\nabla X(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Beispiel (Parallel)**.** $m = n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ *offen.* X *parallel* $\iff \dot X = 0 \iff X \equiv const.$
Allgemein: X *parallel* $\iff \dot X(t) \perp T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t \iff \dot X(t) = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), X(t)), \quad \forall t.$

Satz 3.4. $\gamma \in C^\infty(I, M),\ t_0 \in I,\ v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. *Dann*

$$\exists!\ X \in \mathrm{Vect}(\gamma) \text{ so, dass } \nabla X \equiv 0,\ X(t_0) = v_0.$$

Beweis. Sei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $A(t) := d\Pi(\gamma(t))\dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Sei $X : I \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung des Anfangwertsproblems

$$\begin{cases} \dot X(t) = A(t)X(t), & t \in I \\ X(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Zu zeigen ist $X(t) \in T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t$.
(Wenn dies gezeigt ist, dann gilt:
$\dot X(t) = (d\Pi(\gamma(t))\dot\gamma(t))X(t) = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), X(t)) \in T_{\gamma(t)}M^\perp \Rightarrow \nabla X \equiv 0.$)
Sei $J := \{t \in I \mid X(t) \in T_{\gamma(t)}M\}$. Es gilt:

- $t_0 \in J \Rightarrow J \neq \emptyset$.
- J abgeschlossen als Teilmenge von I: $(t_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in J,\ t_\nu \to t \in I \Rightarrow X(t_\nu) \in T_{\gamma(t_\nu)}M \Rightarrow X(t) \in T_{\gamma(t)}M \Rightarrow t \in J$.
- J offen.
Sei $t_1 \in J$, wähle Vektorfelder $X_1, ..., X_m \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ so, dass $X_1(t_1), ..., X_m(t_1)$ eine Basis von $T_{\gamma(t_1)}M$ bilden.
(Wähle z.B. Basis $e_1, ..., e_m$ von $T_{\gamma(t_1)}M$ und definiere $X_i(t) := \Pi(\gamma(t))e_i$).
$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall t \in (t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon)\cap I$ sind die Vektoren $X_1(t), ..., X_m(t)$ linear unabhängig
$\Rightarrow X_1(t), ..., X_m(t)$ bilden eine Basis von $T_{\gamma(t)}M\ \forall t \in (t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon) =: I_1$
$\Rightarrow \exists\, B_i^k : I_1 \to \mathbb{R}$ so, dass
$$\nabla X_i(t) = \sum_{k=1}^m B_i^k(t)X_k(t),\ \forall t \in I_1. \tag{11}$$
$\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(t)X_i(t)\ \in T_{\gamma(t)}M,\ t \in I_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{\xi}^i(t)X_i(t) + \xi^i(t)\dot{X}_i(t)$
$\Rightarrow \nabla\hat{X} = \sum_{i=1}^m \dot{\xi}^i X_i + \xi^i\nabla X_i \overset{(11)}{=} \sum_{k=1}^m(\dot{\xi}^k + \sum_{i=1}^m B_i^k\xi^i)X_k$, das heisst
$$\nabla\hat{X} = 0 \Leftrightarrow \dot{\xi}^k + \sum_{i=1}^m B_i^k\xi^i = 0,\ \forall k \tag{12}$$
$X(t_1) = \sum_{i=1}^m \eta^i X_i(t_1)\ \in T_{\gamma(t_1)}M$.
Die Differentialgleichung (12) auf I_1 mit Anfangsbedindung $\xi^i(t_1) = \eta^i$ hat eine eindeutige Lösung
$\Rightarrow \exists\, \hat{X}(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(t)X_i(t)\ \in T_{\gamma(t)}M,\ t \in I_1$ so, dass $\nabla\hat{X} = 0,\ \hat{X}(t_1) = X(t_1)$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{X}(t) = A(t)\hat{X}(t) \Rightarrow X(t) = \hat{X}(t)\ \forall t \in I_1 \Rightarrow J$ offen (in I).

Aus obigem Punkte und da I zusammenhängend folgt $J = I$. □

Definition. *Sei $\gamma \in C^\infty(I, M)$. Für $t_0,\ t \in I$ definieren wir eine Abbildung*
$$\Phi(\gamma, t, t_0) = \Phi_\gamma(t, t_0) : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M \text{ durch } \Phi_\gamma(t, t_0)v_0 := X(t)$$
, wobei $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\nabla X \equiv 0,\ X(t_0) = v_0$ ist.
*Diese Abbildung heisst **Paralleltransport** entlang γ.*

Notation: $\gamma^*TM = \{(t, v)\,|\,t \in I,\ v \in T_{\gamma(t)}M\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Satz 3.5. *$\gamma \in C^\infty(I, M)$. Es gilt:*

i) Die Abbildung $I \times \gamma^*TM \to \gamma^*TM,\ (t, (s, v)) \mapsto (t, \Phi_\gamma(t, s)v)$ ist glatt;

ii) $\Phi_\gamma(t, s)$ ist linear $\forall\, t, s \in I$;

iii) $\Phi_\gamma(t, s) \circ \Phi_\gamma(s, u) = \Phi_\gamma(t, u), \qquad \Phi_\gamma(t, t) = id : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$;

iv) $\Phi_\gamma(t, s) = \Phi_\gamma(s, t)^{-1}$;

v) $\Phi_\gamma(t,s)^* = \Phi_\gamma(s,t)$;

vi) $\beta \in C^\infty(\tilde I, I) \Longrightarrow \Phi_{\gamma\circ\beta}(t,s) = \Phi_\gamma(\beta(t),\beta(s))$;

vii) $\forall\, X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ *gilt* $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} \underbrace{\Phi_\gamma(t_0,t)X(t)}_{\in T_{\gamma(t_0)}M} = \nabla X(t_0)$.

Beweis.

ii) trivial ($\nabla X = 0,\ \nabla Y = 0 \Rightarrow \nabla(X+Y) = 0$).

iii) Eindeutigkeit in Satz 3.4.

iv) Folgt aus *iii)* mit $u = t$.

v) $\left.\begin{array}{l} X(t) = \Phi_\gamma(t,t_0)v \\ Y(t) = \Phi_\gamma(t,t_0)w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla X = 0 \\ \nabla Y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \nabla X, Y\rangle + \langle X, \nabla Y\rangle = 0$
$\Rightarrow \langle X(t), Y(t)\rangle = \langle v, w\rangle, \quad \forall t$
$\langle \Phi_\gamma(t,t_0)v, \Phi_\gamma(t,t_0)w\rangle = \langle v, w\rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi_\gamma(t,t_0)^*\Phi_\gamma(t,t_0) = id : T_{\gamma(t)} \to T_{\gamma(t)}$
$\Rightarrow \quad \Phi_\gamma(t,t_0)^* = \Phi_\gamma(t,t_0)^{-1} = \Phi_\gamma(t_0,t)$.

vi) $\tilde\gamma := \gamma\circ\beta : \tilde I \to M$
$\tilde X := X\circ\beta : \tilde I \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde X \in \mathrm{Vect}(\tilde\gamma)$
$\Rightarrow \dot{\tilde X}(t) = \dot\beta(t)\dot X(\beta(t)) \Rightarrow \nabla\tilde X(t) = \dot\beta(t)\nabla X(\beta(t))$;
$\nabla X \equiv 0 \Rightarrow \nabla\tilde X = 0, \qquad X(\beta(t_0)) = v = \tilde X(t_0)$
$\Rightarrow \Phi_{\tilde\gamma}(t,t_0)v = \tilde X(t) = X(\beta(t)) = \Phi_\gamma(\beta(t),\beta(t_0))v$.

i) Sei $e_1,\dots,e_m$ eine orthonormale Basis von $T_{\gamma(t_0)}M$;
seien $X_1,\dots,X_m \in \mathrm{Vect}(M)$ die eindeutigen Lösungen von $\nabla X_i \equiv 0,\ X_i(t_0) = e_i$
$\overset{(vi)}{\Longrightarrow} \langle X_i, X_j\rangle \equiv const = \delta_{ij} \Rightarrow X_1(t),\dots,X_m(t)$ orthonormale Basis von $T_{\gamma(t)}M, \forall t$ es folgt

$$\Phi_\gamma(t,s)v = \sum_{i=1}^m \langle X_i(s), v\rangle X_i(t). \tag{13}$$

$\Rightarrow$ Die Abbildung $(t,s,v) \mapsto \Phi_\gamma(t,s)v$ ist glatt.

vii) $X_1,\dots X_m$ wie im Beweis von *i)*.

$X(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(t)X_i(t) \Rightarrow \nabla X(t) = \sum_{i=1}^m \dot\xi^i(t)X_i(t) + \overbrace{\xi^i(t)\nabla X_i(t)}^{=0}$.
Aus (13) folgt $\Phi_\gamma(t_0,t)X(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(t)X_i(t_0)$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\Phi_\gamma(t_0,t)X(t) = \sum_{i=1}^m \dot\xi^i(t_0)X_i(t_0) = \nabla X(t_0)$.

□

3.3 Abwicklung

Definition. *Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ glatte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension m.
Eine **Abwicklung** (von M entlang M') auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Tripel (Ψ,γ,γ'), wobei $\gamma \in C^\infty(I,M)$, $\gamma' \in C^\infty(I,M')$ und Ψ eine Abbildung ist, die jedem $t \in I$ einen Isomorphismus $\Psi(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'$ zuordnet so, dass folgendes gilt:*

1) Die Abbildung $\gamma^*TM \to \gamma'^*TM' : (t,v) \mapsto (t, \Psi(t)v)$ *ist glatt;*

2) $\Psi(t)^*\Psi(t) = id$*;*

3) $\Psi(t)\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(t)$ *("no sliding");*

4) $\Psi(t) \circ \Phi_\gamma(t,s) = \Phi'_{\gamma'}(t,s) \circ \Psi(s)$ *("no twisting").*

Lemma 3.6. $\Psi(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'$ *erfülle 1) von Definition* 3.3*. Äquivalent sind:*

i) Ψ *erfüllt 4) von Definition* 3.3*;*

ii) $X \in \mathrm{Vect}(\gamma),\ \nabla X \equiv 0 \Longrightarrow \nabla'(\Psi X) \equiv 0$*;*

iii) $X \in \mathrm{Vect}(\gamma) \Longrightarrow \nabla'(\Psi X) = \Psi \nabla X$*.*

Beweis.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* :
trivial.

ii) $\Rightarrow$ *i)* :
$X(t) := \Phi_\gamma(t,t_0)v_0,\ X'(t) := \Psi(t)X(t) \ \Rightarrow \nabla X \equiv 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow} \nabla' X' \equiv 0$
$\Rightarrow X'(t) = \Phi_{\gamma'}(t,t_0)X'(t_0) = \Phi_{\gamma'}(t,t_0)\Psi(t_0)v_0.$

i) $\Rightarrow$ *iii)* :
$X \in \mathrm{Vect}(\gamma),\ X' := \Psi X$
$\Rightarrow \Phi'_{\gamma'}(t_0,t)X'(t) = \Phi'_{\gamma'}(t_0,t)\Psi(t)X(t) \overset{(i)}{=} \Psi(t_0)\Phi_\gamma(t_0,t)X(t)$
Es folgt

$$\begin{aligned}\nabla X'(t_0) &\overset{Satz\,3.5\,(vii)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\Phi'_{\gamma'}(t_0,t)X'(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\Psi(t_0)\Phi_\gamma(t_0,t)X(t) = \\ &\overset{Satz\,3.5\,(vii)}{=} \Psi(t_0)\nabla X(t_0).\end{aligned}$$

□

Gegeben V reeller Vektorraum, $\dim V = m$, und $e_1,...,e_m$ Basis von V, dann entspricht jede Basis $e_1,...,e_m$ einem Isomorphismus $e : \mathbb{R}^m \to V,\ \xi = (\xi^1,...,\xi^m) \mapsto \sum_{i=1}^m \xi^i e_i = e(\xi).$ $(*)$
Umgekehrt: falls ein Isomorphismus $e : \mathbb{R}^m \to V$ gegeben ist, definieren wir eine Basis durch $e_i = e(0,...,1,0,...0)$ ("1" steht offenbar an der i-ten Stelle). Dann ist e durch $(*)$ gegeben.
Notation: $L_{ISO}(\mathbb{R}^m,V) := \{e : \mathbb{R}^m \to V \,|\, e \text{ ist linear über } \mathbb{R} \text{ und bijektiv}\}.$

Bemerkung. *Die Gruppe* $Gl(m)$ *operiert auf* $L_{ISO}(\mathbb{R}^m,V)$ *durch:*
$Gl(m) \times L_{ISO}(\mathbb{R}^m,V) \to L_{ISO}(\mathbb{R}^m,V);\ (a,e) \mapsto e \circ a.$

Notation: $a^*e := e \circ a,\ a \in \mathbb{R}^{m\times m},\ a = (a^i_j)^m_{i,j=1} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_m \end{pmatrix}, \quad (a^*e)_j = \sum_{i=1}^m a^i_j e_i.$

Bemerkung.

1. *"Rechte" oder "kontravariante" Gruppenaktion,*
   d.h. $(ab)^*e = b^*a^*e,\ \mathbb{1}^*e = e \quad (e \circ ab = (e \circ a) \circ b)$.

2. *Die Gruppenaktion ist "frei",*
   d.h. $\forall a \in Gl(m),\ \forall e \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, V) : a^*e = e \Rightarrow a = \mathbb{1}$.

3. *Die Gruppenaktion ist "transitiv",*
   d.h. $\forall e, e' \in L_{ISO}(\mathbb{R}, V)$, $\exists\, a \in Gl(m)$ *so, dass* $e' = a^*e$.

Bemerkung (Allgemein)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe. Eine (kontravariante) Gruppenaktion von G auf M ist eine glatte Abbildung* $G \times M \to M,\ (g,p) \mapsto g^*p$, *mit* $(gh)^*p = h^*g^*p,\ \mathbb{1}^*p = p, \quad \forall p \in M,\ \forall g, h \in G$.

$M \subset \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeit, $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ m-dimensionaler Vektorraum, $L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM) \subset \mathbb{R}^{n\times m}$.

Definition. *Das **Basenbündel** von M ist die Menge*

$$\mathcal{F}(M) := \{(p,e) \,|\, p \in M,\ e \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Definiere die Projektion $\pi : \mathcal{F}(M) \to M$ *durch* $\pi(p,e) := p$.
Definiere die kontravariante Gruppenaktion
$Gl(m) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M),\ (a,(p,e)) \mapsto a^*(p,e) := (p, a^*e)$.
*Die **Faser** von $\mathcal{F}(M)$ über p ist*

$$\mathcal{F}(M)_p := \{e \in \mathbb{R}^{n\times m} \,|\, (p,e) \in \mathcal{F}(M)\} = L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM).$$

Bemerkung.

1. *Die Gruppenaktion von $Gl(m)$ auf $\mathcal{F}(M)$ erhält die Fasern,*
   das heisst $\pi(a^*(p,e)) = \pi(p,e)$.

2. *Die Gruppenaktion ist frei.*

3. *Die Gruppenaktion ist transitiv auf jeder Faser.*

4. *Wir können die Faser $L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM)$ mit der Gruppe $Gl(m)$ identifizieren. Diese Identifikation ist nicht kanonisch: wenn $e \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM)$ gegeben ist, so ist $Gl(m) \to L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM),\ a \mapsto a^*e$ eine Bijektion.*

Lemma 3.7.

i) *$\mathcal{F}(M)$ ist eine Mannigfaltigkeit;*

ii) *$\pi : \mathcal{F}(M) \to M$ ist eine Submersion.*

Beweis.

i) Sei $p_0 \in M$. Wähle eine Parametrisierung $\Psi : V \longrightarrow U \cap M,\ V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p_0 \in U$. O.B.d.A. $\exists\, \varphi \in C^\infty(U,V)$ so, dass $\varphi|_{U\cap M} = \Psi^{-1}$.
Definiere $\tilde{\Psi} : V \times Gl(m) \to \mathcal{F}(M) \cap (U \times \mathbb{R}^{n\times m})$ durch
$\tilde{\Psi}(x,a) := (\Psi(x), d\Psi(x)\circ a),\ d\Psi(x)\circ a \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_pM)$. $\tilde{\Psi}$ ist bijektiv und glatt.
$\tilde{\Psi}^{-1}$ glatt! $\tilde{\Psi}^{-1}(p,e) = (\varphi(p), d\varphi(p)\circ e)$.

ii) Sei $(p_0,e_0) \in \mathcal{F}(M)$. Sei $v_0 \in T_{p_0}M$. Zu zeigen ist $v_0 \in d\pi(p_0,e_0)$.
Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ so, dass $\gamma(0) = p_0,\ \dot\gamma(0) = v_0$.
Definiere $e(t) := \Phi_\gamma(t,0)\circ e_0 \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{\gamma(t)}M)$.
Dann ist $(\gamma(t), e(t)) \in \mathcal{F}(M),\ \pi(\gamma(t),e(t)) = \gamma(t)$
$\Rightarrow v_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi(\gamma(t),e(t)) = d\pi(p_0,e_0)(v_0,\dot e(0)) \in \mathrm{im}(d\pi(p_0,e_0))$
$\Rightarrow d\pi(p_0,e_0)$ ist surjektiv $\forall\,(p_0,e_0)\in\mathcal{F}(M)$
$\Rightarrow \pi$ ist eine Submersion.

$\square$

Bemerkung. *$\mathcal{F}(M)$ ist ein Beispiel eines "Hauptfaserbündels" ("principal bundle").*

$\mathcal{F}(M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}$ Mannigfaltigkeit, $\dim \mathcal{F}(M) = m + m^2$. Was ist $T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M)$?

$$\begin{aligned} T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M) = \{(\dot\gamma(0), \dot e(0)) \mid \gamma : \mathbb{R} \to M,\ e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m},\\ e(t) \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{\gamma(t)}M),\ \gamma(0) = p_0,\ e(0) = e_0\} \end{aligned}$$

1. *Fall* : $\gamma(t) \equiv p_0,\ e(t) \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M),\ e(0) = e_0 \Longrightarrow \dot e(0) \in L(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M)$.

Definiere den vertikalen Tangentialraum

$$\begin{aligned} V_{(p_0,e_0)} :&= \{0\} \times L(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M) = \\ &= \{(0,\dot e(0)) \,|\, e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m},\ e(t) \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M),\ e(0) = e_0\} = \\ &= \{(0,\hat e) \,|\, \hat e \in L(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M)\} \subset T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M). \end{aligned}$$

2. *Fall* : $\gamma : \mathbb{R} \to M,\ \gamma(0) = p_0,\ \dot\gamma(0) = v_0,\ e(t) := \Phi_\gamma(t,0)\circ e_0$ horizontaler Lift von γ.
Was ist $\dot e(0)$?
Sei $\xi \in \mathbb{R}^m$ und definiere $X(t) := e(t)\xi = \Phi_\gamma(t,0)e_0\xi \in T_{\gamma(t)}M,\ X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$.
Nach Definition von X und Φ_γ (Paralleltransport) gilt
$\nabla X \equiv 0$ (X parallel), $X(0) = e_0\xi \Longrightarrow \dot X(t) = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))X(t)$ (Gauss Weingarten)
$\stackrel{t=0}{\Longrightarrow} \dot X(0) = h_{p_0}(v_0)e_0\xi,\ \dot X(0) = \dot e(0)\xi \Longrightarrow \dot e(0) = h_{p_0}(v_0)\circ e_0,$
$\mathbb{R}^m \xrightarrow{e_0} T_{p_0}M \xrightarrow{h_{p_0}(v_0)} T_{p_0}M^\perp.$

Definiere den horizontalen Tangentialraum

$$H_{(p_0,e_0)} := \{(v_0, h_{p_0}(v_0)\circ e_0) \,|\, v_0 \in T_{p_0}M\} \subset T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M).$$

Lemma 3.8.

$$T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M) = H_{(p_0,e_0)} \oplus V_{(p_0,e_0)} = \{(v, \hat e + h_{p_0}(v)e_0) \,|\, v \in T_{p_0}M,\ \hat e \in L(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M)\}$$

Beweis.

"$\supseteq$" Gerade gezeigt.

"$\subseteq$" $\dim T_{(p_0,e_0)}\mathcal{F}(M) = m + m^2,\ \dim H_{(p_0,e_0)} = m,\ \dim V_{(p_0,e_0)} = m^2,$
$H_{(p_0,e_0)} \cap V_{(p_0,e_0)} = \{0\}.$

□

$\mathcal{O}(M) := \{(p,e)\,|\,e : \mathbb{R}^m \to T_pM$ ist ein orthogonaler Isomorphismus $e^Te = \mathbb{1}_{m\times m}\}$
orthogonales Basenbündel.

Übung. (s. Serie 9 Aufgabe 2)

i) $\mathcal{O}(M)$ ist eine Mannigfaltigkeit;

ii) $\pi : \mathcal{O}(M) \to M$ ist eine Submersion;

iii) Was ist $T_{(p,e)}\mathcal{O}(M)$?

$\xi \in \mathbb{R}^m,\ B_\xi : \mathcal{F}(M) \to T\mathcal{F}(M),\ B_\xi(p,e) := (e\xi, h_p(e\xi)e) \in T_{(p,e)}\mathcal{F}(M),\ B_\xi$ Basisvektorfeld

$$\left.\begin{array}{l} B_\xi \text{ ist horizontal, } B_\xi(p,e) \in H_{(p,e)} \\ d\pi(p,e)B_\xi(p,e) = e\xi \end{array}\right\} \text{diese Bedingungen bestimmen } B_\xi \text{ eindeutig.}$$

Lemma 3.9. *Äquivalent sind:*

i) M ist (geodätisch) vollständig;

ii) $B_\xi \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}(M))$ *ist vollständig* $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^m$*;*

iii) $\forall$ *glatte Funktion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,\ t \mapsto \xi(t),\ \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\forall\,(p_0,e_0) \in \mathcal{F}(M)$
$\exists$ *eine Lösung* $\mathbb{R} \to \mathcal{F}(M),\ t \mapsto (\gamma(t), e(t))$ *der Differentialgleichung*

$$(\dot\gamma(t), \dot e(t)) = B_{\xi(t)}(\gamma(t), e(t)),\ \gamma(t_0) = p_0,\ e(t_0) = e_0. \qquad (*)$$

Beweis.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* :
trivial, folgt aus Definition mit $\xi(t) \equiv const.$

ii) $\Rightarrow$ *i)* :
Sei $p_0 \in M,\ v_0 \in T_{p_0}M$.
Wähle $\xi \in \mathbb{R}^m,\ e_0 \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M)$ so, dass $e_0\xi = v_0$
$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists$ eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{F}(M),\ t \mapsto (\gamma(t), e(t))$ so dass
$(\dot\gamma, \dot e) = B_\xi(\gamma, e),\ \gamma(0) = p_0,\ e(0) = e_0 \Rightarrow \dot\gamma(t) = e(t)\xi,\ \dot e(t) = h_{\gamma(t)}(e(t)\xi)e(t)$
$\Rightarrow \dot e(t)\xi = h_{\gamma(t)}(e(t)\xi)e(t)\xi = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \Rightarrow \ddot\gamma = h_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma)$
$\Rightarrow \gamma$ Geodäte, $\gamma(0) = p_0,\ \dot\gamma(0) = e(0)\xi = e_0\xi = v_0.$

$i) \Rightarrow iii)$:

Wir setzen voraus dass M vollständig ist.

Gegeben seien $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,\ t \mapsto \xi(t),\ t_0 = 0,\ p_0 \in M,\ e_0 \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{p_0}M)$.

Nimm an die Lösung von $(*)$ existiert nur für $0 \le t < T,\ T < \infty$.

$\gamma : [0,T) \to M,\ e(t) \in L_{ISO}(\mathbb{R}^m, T_{\gamma(t)}M) \quad (*) \begin{cases} \dot\gamma(t) = e(t)\xi(t) & \gamma(0) = p_0 \\ \dot e(t) = h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))e(t) & e(0) = e_0 \end{cases}$

1. $\xi_0 \in \mathbb{R}^m :\ \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|e(t)\xi_0|^2 = \langle \overbrace{e(t)\xi_0}^{\in T_{\gamma(t)}M}, \overbrace{\dot e(t)\xi_0}^{\in T^\perp_{\gamma(t)}M} \rangle = 0 \Rightarrow |e(t)\xi_0| \equiv const$
   $\Rightarrow \|e(t)\| \equiv \|e_0\|$ Matrix Norm;
2. $|\dot\gamma(t)| = |e(t)\xi(t)| \le \|e_0\||\xi(t)| \le \|e_0\| \max_{0\le t\le T}|\xi(t)| =: C_T$;
3. $d(\gamma(s),\gamma(t)) \le L(\gamma|_{[s,t]}) = \int_s^t |\dot\gamma(r)|dr \le \int_s^t C_T dr \le C_T(t-s) \quad \forall\, s,t\ 0 \le s < t < T$
   $\overset{\text{M vollständig}}{\Longrightarrow} \lim_{t\uparrow T}\gamma(t) = p \in M$ existiert;
4. Nach 3. $\exists\, C > 0$ so, dass $\|h_{\gamma(t)}(v)\| \le C|v|, \quad \forall\, t \in [0,T)$
   (da $\{\gamma(t),\ 0 \le t < T\} \cup \{p\}$ kompakt ist);
5. $\|\dot e(t)\| = \|h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))e(t)\| \le \|h_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\|\|e(t)\| \overset{\textit{nach 1. und 4.}}{\le} C\|\dot\gamma(t)\|\|e_0\| \overset{\textit{nach 2.}}{\le} CC_T\|e_0\|$;
6. $\|e(s) - e(t)\| \le CC_T\|e_0\||t-s|$;
7. $\lim_{t\uparrow T} e(t) = e$ existiert $\overset{\textit{Lemma 2.14}}{\Longrightarrow}$ Lösung existiert auf $[0, T+\varepsilon)$. Widerspruch!

$\square$

Satz 3.10. *M, M' m-Mannigfaltigkeiten, $p_0 \in M, p_0' \in M'$, $\Psi_0 : T_{p_0}M \to T_{p_0'}M'$ orthogonaler Isomorphismus, $\gamma' : \mathbb{R} \to M'$, $\gamma'(t_0) = p_0'$. Dann gilt:*

i) $\exists$ Abwicklung (Ψ, γ, γ') auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass $t_0 \in I$ und $\gamma(t_0) = p_0$, $\Psi(t_0) = \Psi_0$;

ii) Je zwei solche Abbildungen (auf Intervallen I, J) stimmen auf $I \cap J$ überein;

iii) M vollständig $\Longrightarrow$ die Abwicklung existiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Wähle einen orthogonalen Isomorphismus $e_0 : \mathbb{R}^m \to T_{p_0}M$.
Definiere $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\dot\gamma'(t) = \Phi'(\gamma', t, t_0)\Psi_0 e_0 \xi(t). \tag{14}$$

Sei $\gamma : I \to M$ so, dass $\gamma(t_0) = p_0$.
Definiere $\Psi(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'$ durch

$$\Psi(t) := \Phi'(\gamma', t, t_0)\Psi_0\Phi(\gamma, t_0, t) \tag{15}$$

$\Rightarrow \Psi(t)^*\Psi(t) = id,\ \Phi'(\gamma', t, s)\Psi(s) = \Psi(t)\Phi(\gamma, t, s)$.
$\Psi(t)\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(t)$?
Definiere

$$e(t) := \Phi(\gamma, t, t_0)e_0. \tag{16}$$

Behauptung. (Ψ, γ, γ') Abwicklung $\Longleftrightarrow (\dot\gamma, \dot e) = B_\xi(\gamma, e)$, $\xi(t)$ wie in (14).

Beweis der Behauptung. (Ψ, γ, γ') Abwicklung $\Leftrightarrow \Psi\dot{\gamma} = \dot{\gamma}'\ \forall\, t \in I$
$\overset{(15)}{\Leftrightarrow} \Phi'(\gamma', t, t_0)\Psi_0\Phi(\gamma, t_0, t)\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}'(t) \overset{(14)}{=} \Phi'(\gamma', t, t_0)\Psi_0 e_0\xi(t)$
$\Leftrightarrow \Phi(\gamma, t_0, t)\dot{\gamma}(t) = e_0\xi(t)$
$\Leftrightarrow \dot{\gamma}(t) = \Phi(\gamma, t, t_0)e_0\xi(t)$
$\overset{(16)}{\Leftrightarrow} \dot{\gamma}(t) = e(t)\xi(t)$ und $\dot{e}(t) = h_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))e(t)$
$\Leftrightarrow (\dot{\gamma}, \dot{e}) = B_\xi(\gamma, e)$. □

Aus der Behauptung folgen *i*), *ii*) und *iii*), insbesondere *iii*) aus Lemma 3.9.

□

4 Der Riemannsche Krümmungstensor

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Länge einer glatten Kurve γ auf M ist gegeben durch: $L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| \, dt$.

Wir betrachten wieder die glatten Kurven zwischen $p, q \in M$:

$$\Omega_{p,q} = \{\gamma : [0,1] \to M \mid \gamma \text{ glatt}, \ \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = q\}.$$

Nach Lemma 2.1 definiert $d : M \times M \to [0, \infty]$ mit $d(p,q) := \inf\limits_{\gamma \in \Omega_{p,q}} L(\gamma)$ eine Metrik.
Ausserdem wissen wir nach Lemma 2.2, dass die von d induzierte Topologie mit der kanonischen Topologie von $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Wir wollen in diesem Kapitel Isometrien zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M, M' betrachten, auf denen Metriken d bzw. d' definiert sind.

4.1 Isometrien

Satz 4.1. *Seien $M \subset \mathbb{R}^k$, $M' \subset \mathbb{R}^l$ Mannigfaltigkeiten und $f : M \to M'$ eine bijektive Abbildung. Äquivalent sind:*

1. *f ist ein Diffeomorphismus und $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}M'$ ist ein orthogonaler Isomorphismus für jeden Punkt $p \in M$;*
2. *f ist ein Diffeomorphismus und $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$ für jede glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to M$;*
3. *$d'(f(p), f(q)) = d(p,q) \quad \forall p, q \in M$.*

Definition. *Einen Diffeomorphismus $f : M \to M'$, der diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, nennen wir eine* ***Isometrie****.*

Lemma 4.2.
$\forall p \in M, \ \exists \varepsilon > 0, \ \forall v, w \in T_pM$ *mit* $0 < |w| < |v| < \varepsilon, \ d(\exp_p(w), \exp_p(v)) = |v| - |w|$
$\Longrightarrow w = \frac{|w|}{|v|} v$.

Beweis von Satz 4.1.

1. $\Rightarrow$ 2. :
$L(f \circ \gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right| dt = \int_0^1 |df(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| \, dt = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \, dt = L(\gamma)$.

2. $\Rightarrow$ 3. :
Direkt aus der Definition.

3. $\Rightarrow$ 1. :
Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass:

- $\exp_p : B_\varepsilon(p) \to U_\varepsilon(p)$ ist ein Diffeomorphismus;
- $\exp_{f(p)} : B_\varepsilon(f(p)) \to U_\varepsilon(f(p))$ ist ein Diffeomorphismus;
- Die Behauptung von Lemma 4.2 für $p' = f(p)$ ist erfüllt.

Wir definieren $\Phi_p : B_\varepsilon(p) \subset T_pM \to B_\varepsilon(f(p)) \subset T_{f(p)}M'$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert, $\Phi_p := \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p$.

$$\begin{tikzcd}
B_\varepsilon(p) \arrow[r, dashed, "\Phi_p"] \arrow[d, "exp_p"', "\text{Diffeo}"] & B_\varepsilon(f(p)) \arrow[d, "exp_{f(p)}"', "\text{Diffeo}"] \\
U_\varepsilon(p) \arrow[r, dashed, "f\ bij."] & U_\varepsilon(f(p))
\end{tikzcd}$$

Behauptung 1. Es gilt:

i) $\exp_{f(p)}(\Phi_p(v)) = f(\exp_p(v)) \qquad \forall v \in T_pM,\ |v| < \varepsilon;$

ii) $|\Phi_p(v)| = |v| \qquad \forall v \in T_pM,\ |v| < \varepsilon;$

iii) $\Phi_p(tv) = t\Phi_p(v),\ 0 \le t \le 1 \qquad \forall v \in T_pM,\ |v| < \varepsilon.$

Beweis.

i) ✓

ii) $|\Phi_p(v)| \overset{Satz\ 2.11}{=} d'(f(p), \exp_{f(p)}(\Phi_p(v))) \overset{(i)}{=} d'(f(p), f(\exp_p(v)))$
$\overset{Voraussetzung}{=} d(p, \exp_p(v)) \overset{Satz\ 2.11}{=} |v|\,.$ ✓

iii) $t = 0: \quad \Phi_p(0) = 0 = 0 \cdot \Phi_p(v).$ ✓
$t = 1:$ ✓

$$\begin{aligned}
0 < t < 1: \quad & d'(\exp_{f(p)} \Phi_p(tv), \exp_{f(p)} \Phi_p(v)) \overset{(i)}{=} d'(f(\exp_p(tv)), f(\exp_p(v))) \\
& \overset{3.}{=} d(\exp_p(tv), \exp_p(v)) \overset{Satz\ 2.11}{=} (1-t)\,|v| = |v| - |tv| \\
& \overset{(ii)}{=} |\Phi_p(v)| - |\Phi_p(tv)| \\
& \overset{Lemma\ 4.2}{\Rightarrow} \Phi_p(tv) = \frac{|\Phi_p(tv)|}{|\Phi_p(v)|}\Phi_p(v) \overset{(ii)}{=} t\Phi_p(v). \quad \checkmark
\end{aligned}$$

□

Wir definieren nun eine erweiterte Abbildung: $\Phi_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M'$ durch

$$\Phi_p(v) := \frac{1}{\delta}\Phi_p(\delta v), \text{ wobei } \delta > 0 \text{ so klein gewählt ist, dass } \delta\,|v| < \varepsilon. \tag{17}$$

Wegen *iii)* hängt die rechte Seite von Gleichung (17) nicht von δ ab.
Ausserdem folgt sofort aus dieser Definition, dass:

$$|\Phi_p(v)| = |v| \quad \forall v \in T_pM$$
$$\Phi_p(tv) = t\Phi_p(v) \quad \forall v \in T_pM,\ \forall t \ge 0$$

Behauptung 2. Φ_p ist linear.

Beweis. Wir wissen, dass:

$$\lim_{t\to 0}\frac{d(\exp_p(tv),\exp_p(tw))}{t\,|v-w|} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{d(\exp_p(tv),\exp_p(tw))}{\left|\exp_p(tv)-\exp_p(tw)\right|}}_{\to 1\ (\textit{Lemma } 2.2)}\cdot\underbrace{\frac{\left|\exp_p(tv)-\exp_p(tw)\right|}{t\,|v-w|}}_{\to 1\ (\textit{Bew. von Lemma } 2.17)} = 1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |v-w| \quad &= \quad \lim_{t\to 0}\frac{d(\exp_p(tv),\exp_p(tw))}{t} \overset{3.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{d'(f(\exp_p(tv)),f(\exp_p(tw)))}{t}\\ &\overset{(i)\&(iii)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{d'(\exp_{f(p)}(t\Phi_p(v)),\exp_{f(p)}(t\Phi_p w))}{t} = |\Phi_p(v)-\Phi_p(w)|\end{aligned}$$

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(|v|^2+|w|^2-|v-w|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\Phi_p v|^2+|\Phi_p w|^2-|\Phi_p v-\Phi_p w|^2\right) = \langle\Phi_p(v),\Phi_p(w)\rangle$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ \langle\Phi_p(v_1)+\Phi_p(v_2),\Phi_p(w)\rangle = \langle\Phi_p(v_1),\Phi_p(w)\rangle + \langle\Phi_p(v_2),\Phi_p(w)\rangle = \langle v_1,w\rangle + \langle v_2,w\rangle\\ &\quad = \langle v_1+v_2,w\rangle = \langle\Phi_p(v_1+v_2),\Phi_p(w)\rangle\,, \qquad \forall w\in T_pM\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Da } \Phi_p \text{ bijektiv} &\Rightarrow \Phi_p(v_1+v_2) = \Phi_p(v_1)+\Phi_p(v_2) \overset{v_2=-v_1}{\Rightarrow} \Phi_p(-v) = -\Phi_p(v)\\ &\Rightarrow \Phi_p(tv) = t\Phi_p(v) \qquad \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

Behauptung 3. f glatt, $df(p)=\Phi_p$.

Beweis.

$$f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(\Phi_p(v))\ \Rightarrow\ f(q) = \exp_{f(p)}\circ\Phi_p\circ\exp_p^{-1}(q), \qquad \forall q\in U_\epsilon(p)\ \textit{glatt}$$

$$df(p)v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp_p(tv)) \overset{(i)}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp_{f(p)}(t\Phi_p(v)) = \Phi_p(v).$$

□

□

Beweis von Lemma 4.2. Definiere

$$B_\varepsilon(p) := \{v\in T_pM \ \mid\ |v|<\varepsilon\}$$

$$U_\varepsilon(p) := \{q\in M \ \mid\ d(p,q)<\varepsilon\}.$$

Wähle $\varepsilon>0$ so klein, dass die Abbildung $\exp_{p'}: B_\varepsilon(p')\to U_\varepsilon(p')$ ein Diffeomorphismus ist $\forall p'\in M$ mit $d(p,p')<\varepsilon$ (Kor. 2.10, Satz 2.11).

$$\left.\begin{array}{l} p_1 := \exp_p(w)\\ p_2 := \exp_p(v)\end{array}\right\}\Rightarrow d(p,p_1)=|w|\,,\ d(p,p_2)=|v|\,,\ d(p_1,p_2)=|v|-|w|<\varepsilon$$

$$p_2\in U_\varepsilon(p_1)\Rightarrow \exists\, v_1\in B_\varepsilon(p_1) \text{ so, dass } |v_1| = d(p_1,p_2) = |v|-|w|\,,\ \exp_{p_1}(v_1)=p_2.$$

Definiere $\gamma : [0,2] \to M$ durch:

$$\gamma(t) := \begin{cases} \exp_p(tw), \ 0 \le t < 1, \\ \exp_{p_1}((t-1)v_1), \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = p_1, \ \gamma(2) = p_2, \ L(\gamma|_{[0,1]}) = |w|, \ L(\gamma|_{[1,2]}) = |v| - |w|$
$\Rightarrow L(\gamma) = |v| = d(p, p_2) \overset{\text{Satz 2.11}}{\Longrightarrow} \gamma(t) = \exp_p(\beta(t)v), \text{ mit } 0 \le \beta(t) \le 1, \ \dot\beta(t) \ge 0$
$\Rightarrow \exp_p(\underbrace{w}_{\in B_\varepsilon(p)}) = p_1 = \gamma(1) = \exp_p(\underbrace{\beta(1)v}_{\in B_\varepsilon(p)}) \Rightarrow w = \beta(1)v, \ |w| = \beta(1)\,|v| \Rightarrow w = \frac{|w|}{|v|}v.$ □

Bemerkung.

1. *$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie*
   $\Rightarrow \varphi(p) = \Phi \cdot p + b, \quad \Phi \in O(n), \ b \in \mathbb{R}^n$ (Übung).

2. *$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie*
   $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeiten, $\varphi(M) = M'$
   $\Rightarrow \varphi|_M : M \to M'$ ist eine Isometrie.

3. *$M, M' \subset \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeiten, $f : M \to M'$ eine Isometrie,*
   dann gibt es nicht *immer eine Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so, dass $f = \varphi|_M$.*

4.2 Riemannsche Krümmungstensor und Gauss-Krümmung

Erinnerung (2te Fundamentalform):
$h_p : T_pM \to \mathcal{L}\left(T_pM, T_pM^\perp\right)$
$h_p(v)w = (d\Pi(p)v)w, \quad w \in T_pM$
$h_p(v)^* \in \mathcal{L}\left(T_pM^\perp, T_pM\right)$
$h_p(v)^*w = (d\Pi(p)v)w, \quad w \in T_pM^\perp$
$(d\Pi(p)v) : T_pM \oplus T_pM^\perp \longrightarrow T_pM^\perp \oplus T_pM.$

Erinnerung (Gauss-Weingarten):
Seien: $\gamma : \mathbb{R}^2 \to M, \ X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, \ X \in \mathrm{Vect}(\gamma), \ X(s,t) \in T_{\gamma(s,t)}M$, dann:

$$\partial_s X = \underbrace{\nabla_s X}_{\in T_pM} + \underbrace{h_p(\partial_s\gamma)X}_{\in T_pM^\perp} \tag{18}$$

$$\nabla_s \partial_t \gamma = \nabla_t \partial_s \gamma. \tag{19}$$

Es kann aber für $Z \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ gelten:

$$\nabla_t \nabla_s Z - \nabla_s \nabla_t Z \neq 0.$$

Definition. *Der **Riemannsche Krümmungstensor** ordnet jedem $p \in M$ eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung $R_p : T_pM \times T_pM \to \mathcal{L}(T_pM, T_pM)$ zu, die durch folgende Gleichung bestimmt ist:*

$$R_p(u,v)w = \left(\nabla_s \nabla_t Z - \nabla_t \nabla_s Z\right)(0). \tag{20}$$

Hier sind $\gamma : \mathbb{R}^2 \to M$ und $Z \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ so gewählt, dass:

$$\begin{cases} \gamma(0,0) = p \\ \partial_s \gamma(0,0) = u \\ \partial_t \gamma(0,0) = v \\ Z(0,0) = w. \end{cases} \tag{21}$$

Satz 4.3.

i) Der Riemannsche Krümmungstensor ist wohldefiniert.

ii) Gauss-Codazzi Formel:

$$u, v, w, \in T_pM \implies R_p(u,v)w = h_p(u)^* h_p(v) w - h_p(v)^* h_p(u) w. \tag{22}$$

Beweis. Wähle γ, Z so, dass (21) erfüllt ist.

$$\nabla_t Z \overset{(18)}{=} \partial_t Z - h_\gamma(\partial_t \gamma) Z = \partial_t Z - (d\Pi(\gamma)\partial_t \gamma) Z = \partial_t Z - (\partial_t \Pi \circ \gamma) Z.$$

$$\Pi : M \to \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad \gamma : \mathbb{R}^2 \to M, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \Pi \circ \gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\begin{aligned} \partial_s \nabla_t Z &= \partial_s \partial_t Z - (\partial_s \partial_t (\Pi \circ \gamma)) Z - (\partial_t (\Pi \circ \gamma)) \partial_s Z \\ &= \partial_s \partial_t Z - (\partial_s \partial_t (\Pi \circ \gamma)) Z - (d\Pi(\gamma)\partial_t \gamma)(\underbrace{\nabla_s Z}_{\in T_\gamma M} + \underbrace{h_\gamma(\partial_s \gamma) Z}_{\in T_\gamma M^\perp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_s \nabla_t Z - \partial_t \nabla_s Z = &-(d\Pi(\gamma)\partial_t \gamma) h_\gamma(\partial_s \gamma) Z + (d\Pi(\gamma)\partial_s \gamma) h_\gamma(\partial_t \gamma) Z - (d\Pi(\gamma)\partial_t \gamma)\nabla_s Z \\ &+ (d\Pi(\gamma)\partial_s \gamma)\nabla_t Z = h_\gamma(\partial_s \gamma)^* h_\gamma(\partial_t \gamma) Z - h_\gamma(\partial_t \gamma)^* h_\gamma(\partial_s \gamma) Z \\ &+ \underbrace{h_\gamma(\partial_s \gamma)\nabla_t Z - h_\gamma(\partial_t \gamma)\nabla_s Z}_{\in T_\gamma M^\perp} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla_s \nabla_t Z - \nabla_t \nabla_s Z = h_\gamma(\partial_s \gamma)^* h_\gamma(\partial_t \gamma) Z - h_\gamma(\partial_t \gamma)^* h_\gamma(\partial_s \gamma) Z.$$

□

$M \subset \mathbb{R}^3$ sei eine 2-Mannigfaltigkeit.
Wähle Abbildung:

$$\nu : M \to \mathbb{R}^3, \qquad |\nu(p)| = 1, \quad \nu(p) \perp T_pM$$

$$\begin{array}{llll} & d\nu(p) : T_pM & \longrightarrow & T_{\nu(p)} S^2 \\ & & & \shortparallel \\ \nu : M \to S^2 & & \searrow & \nu(p)^\perp \\ & & & \shortparallel \\ & & & T_pM \end{array}$$

Definition. $K(p) := \det(d\nu(p) : T_pM \to T_pM)$ *heisst **Gauss-Krümmung** von M im Punkt p.*

Beispiel.

(i) $M^2 \subset \mathbb{R}^3$
A: "Flächeninhalt mit Vorzeichen"
$U_\delta := \{\xi \in S^n \mid |\nu(p) - \xi| < \delta\}$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{A(U_\delta)}{A(\nu^{-1}(U_\delta))} = K(p).$$

(ii) $M = S^2 \quad \Rightarrow \quad \nu = id \quad \Rightarrow \quad K(p) = 1.$

Lemma 4.4. $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ *eine Mannigfaltigkeit und $u, v \in T_pM$ linear unabhängig. Dann:*

$$K(p) = \frac{\langle R_p(u,v)v, u\rangle}{|u|^2\,|v|^2 - \langle u, v\rangle^2}.$$

Beweis.

$$\Pi(p) = \mathbb{1} - \nu(p)\nu(p)^\perp \qquad \Rightarrow \qquad d\Pi(p)v = \underbrace{-\nu(p)(d\nu(p)v)^\perp}_{=h_p(v)} \underbrace{-(d\nu(p)v)\nu(p)^\perp}_{=h_p(v)^*}$$

$$\langle R_p(u,v)v, u\rangle = \langle h_p(u)^* h_p(v)v - h_p(v)^* h_p(u)v, u\rangle = \langle d\nu(p)v, v\rangle \langle d\nu(p)u, u\rangle - \langle d\nu(p)u, v\rangle^2$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^3$$

$$A := \begin{pmatrix} \nu(p) \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} \nu(p) & u & v \end{pmatrix}, \qquad B\xi := \begin{cases} d\nu(p)\xi, & \xi \perp \nu(p) \\ \xi, & \xi \in \mathbb{R}\nu(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^T B A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & \langle d\nu(p)u, u\rangle & \langle d\nu(p)v, u\rangle \\ * & \langle d\nu(p)u, v\rangle & \langle d\nu(p)v, v\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A^T BA) &= \langle R_p(u,v)v, u\rangle \\ \det(B) \overset{\shortparallel}{\cdot} \det(A)^2 &= K(p)\,\langle \nu(p), u \times v\rangle^2 = K(p)\,|u \times v|^2 = K(p)(|u|^2\,|v|^2 - \langle u, v\rangle^2). \end{aligned}$$

□

Übung. Zeige: $R_p(u,v)w = -K(p)\,\langle \nu(p), u \times v\rangle\, \nu(p) \times w.$

Bemerkung.

$$|u| = |v| = 1, \quad \langle u, v\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad K(p) = \langle R_p(u,v)v, u\rangle\,.$$

Lemma 4.5.

$$X, Y, Z \in \operatorname{Vect}(M) \quad \Longrightarrow \quad R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Beweis. O.B.d.A.: X, Y vollständig. φ^s: Fluss von X, φ^t: Fluss von Y.
Definiere: $\gamma(s,t) := \varphi^s \circ \varphi^t(p)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \partial_s \gamma(s,t) = X \circ \gamma, \quad \partial_t \gamma(s,t) = (\varphi^s_* Y) \circ \gamma \\
&\Rightarrow \quad \partial_s \gamma(0,0) = X(p), \quad \partial_t \gamma(0,0) = Y(p) \\
&\Rightarrow \nabla_s (Z \circ \gamma) = \nabla_{\partial_s \gamma} Z(\gamma) = \nabla_X Z(\gamma), \quad \nabla_t (Z \circ \gamma) = \nabla_{\varphi^s_* Y} Z(\gamma)
\end{aligned}$$

$$\nabla_s \nabla_t (Z \circ \gamma) = \nabla_{\partial_s \gamma} \nabla_{\varphi^s_* Y} Z(\gamma) + \nabla_{\frac{d}{ds} \varphi^s_* Y} Z(\gamma))$$

$$\nabla_s \nabla_t (Z \circ \gamma)|_{s=t=0} = \nabla_X \nabla_Y Z(p) + \nabla_{[X,Y]} Z(p), \qquad \text{da } \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=o} \varphi^s_* Y = [X,Y]$$

$$\begin{aligned}
R_p(X(p), Y(p))Z(p) &= \nabla_s \nabla_t (Z \circ \gamma)|_{s=t=0} - \nabla_t \nabla_s (Z \circ \gamma)|_{s=t=0} \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z(p) + \nabla_{[X,Y]} Z(p) - \nabla_Y \nabla_X Z(p).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung.

1. $\nabla_X : \operatorname{Vect}(M) \to \operatorname{Vect}(M)$
   $[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$
   $[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X,Y]} = R(X,Y)$;
2. $\mathcal{L}_X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt}\}$
   $\mathcal{L}_X f = df \circ X = \partial_X f$
   $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] + \mathcal{L}_{[X,Y]} = 0.$

Definition. $(\nabla_X R)(Y,Z)W \in \operatorname{Vect}(M)$ *ist so definiert:*

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W := \nabla_X (R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W.$$

Satz 4.6. $W, X, Y, Z \in \operatorname{Vect}(M)$. *Dann gilt es:*

1. $R(X,Y)^* = -R(X,Y) = R(Y,X)$;
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(1. Bianchi-Identität);*
3. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$;
4. $(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$ *(2. Bianchi-Identität).*

Beweis.

1. Gauss-Codazzi.

2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$
   $= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X +$
   $+ \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Z,X]}Y =$
   $= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_{[Y,Z]}X + \dots$
   $= \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_X[Y,Z] + \dots = [X,[Y,Z]] +$ zyklische Vertauschungen $\dots \overset{Jacobi}{=} 0.$

3. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle R(Z,W)X,Y\rangle = -\langle R(Y,Z)X,W\rangle - \langle R(Z,X)Y,W\rangle - \langle R(Z,W)X,Y\rangle$
   $= \langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,X)W,Y\rangle + \langle R(W,Z)X,Y\rangle$
   $= \langle R(Y,Z)W,X\rangle - \langle R(X,W)Z,Y\rangle \overset{(1)}{=} \langle R(Y,Z)W,X\rangle - \langle R(W,X)Y,Z\rangle$
   $\Rightarrow \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle R(Z,W)X,Y\rangle = \langle R(Y,Z)W,X\rangle - \langle R(W,X)Y,Z\rangle$
   $= \langle R(Z,W)X,Y\rangle - \langle R(X,Y)Z,W\rangle = 0.$

4. Übung.

□

4.3 Teorema Egregium

"Geodäten, Kovariante Ableitung, Parallel-Transport, Riemannscher Krümmungstensor sind intrinsisch".

$\varphi : M' \to M$ Diffeomorphismus.
Wir können Objekte auf M mittels φ auf M' zurückziehen (pullback).

1. Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M \;\Rightarrow\; \varphi^*\gamma := \varphi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{R} \to M'$;

2. Funktion $f : M \to \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \varphi^* f := f \circ \varphi : M' \to \mathbb{R}$;

3. $X \in \mathrm{Vect}(M) \;\Rightarrow\; \varphi^* X \in \mathrm{Vect}(M')$
   $(\varphi^* X)(p') := d\varphi(p')^{-1} X(\varphi(p'))$;

4. $\gamma : I \to M,\; X \in \mathrm{Vect}(\gamma) \;\Rightarrow\; \varphi^* X \in \mathrm{Vect}(\varphi^*\gamma)$; $\varphi^* X(t) = d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t)))^{-1} X(t)$;

5. $\varphi^* R \in \Omega^2(M', \mathcal{L}(TM'))$, $(\varphi^* R)_{p'}(v', w') = d\varphi(p')^{-1} R_{\varphi(p')}(d\varphi(p')v', d\varphi(p')w')d\varphi(p')$.
   (Krümmungstensor)

Bemerkung. *(Satz 4.1) $\varphi : M' \to M$ bijektiv, $d(\varphi(p'), \varphi(q')) = d'(p', q')$, für alle $p', q' \in M'$.
$\Longrightarrow \varphi$ Diffeomorphismus und $\forall p' \in M'$, $\forall v', w'$: $\langle d\varphi(p')v', d\varphi(p')w'\rangle = \langle v', w'\rangle \in T_{p'}M'$.
$\Longrightarrow \varphi^* g = g'$.
1ste Fundamentalform von M: $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, $g_p(v,w) := \langle v, w\rangle$
$\Rightarrow$ Satz 4.1 sagt: "Die 1ste Fundamentalform ist intrinsisch".*

Bemerkung. *Die 2te Fundamentalform ist nicht intrinsisch.*

Satz 4.7. *Die kovariante Ableitung ist intrinsisch:
$\varphi : M' \to M$ Isometrie. Dann gilt:*

1. $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, $\nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y = \varphi^*(\nabla_X Y)$;

2. $\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^n$ *glatte Kurve* $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$
$\Rightarrow \nabla'(\varphi^* X)(t) = \varphi^*(\nabla X)(t) \quad \forall t \in I$.

Lemma 4.8. *Die lineare Abbildung* $\mathrm{Vect}(M) \to \mathcal{L}(\mathrm{Vect}(M)) : X \mapsto \nabla_X$ *ist charakterisiert durch die Bedingungen*

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y],$$
$$\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Beweis. Sei $\begin{cases} \mathrm{Vect}(M) & \to \quad \mathcal{L}(\mathrm{Vect}(M)) \\ X & \mapsto \quad D_X \end{cases}$
ein weiterer linearer Operator, der diese beiden Bedingungen erfüllt. Es folgt:

$$\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle \tag{23}$$
$$\partial_Y \langle Z, X\rangle = \langle D_Y Z, X\rangle + \langle Z, D_Y X\rangle \tag{24}$$
$$\partial_Z \langle X, Y\rangle = \langle D_Z X, Y\rangle + \langle X, D_Z Y\rangle \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(23)+(24)-(25)}{\Longrightarrow} & \partial_X \langle Y, Z\rangle + \partial_Y \langle Z, X\rangle - \partial_Z \langle X, Y\rangle = \\
&= \langle Y, D_X Z - D_Z X\rangle + \langle X, D_Y Z - D_Z Y\rangle + \langle Z, D_Y X - D_X Y\rangle + 2\langle Z, D_X Y\rangle = \\
&= 2\langle Z, D_X Y\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle Z, D_X Y\rangle = \langle Z, \nabla_X Y\rangle \qquad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$
$\Rightarrow \langle Z, D_X Y - \nabla_X Y\rangle = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$
$\Rightarrow D_X Y - \nabla_X Y = 0 \qquad \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. □

Beweis von Satz 4.7. $\varphi : M' \to M$ Isometrie. $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. Definiere

$$D_X Y := \varphi_*(\nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y) \tag{26}$$

Behauptung. $D_X Y - D_Y X = [Y, X]$ und $\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$.

$$\overset{Beh, Lemma\, 4.8}{\Longrightarrow} \varphi_*(\nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y) = D_X Y = \nabla_X Y \ \Rightarrow\ \varphi^*(\nabla_X Y) = \nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y.$$

Beweis der Behauptung.

$$\varphi^* \langle X, Y\rangle = \langle \varphi^* X, \varphi^* Y\rangle \tag{27}$$
$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^* X, \varphi^* Y] \tag{28}$$
$$\partial_{\varphi^* X} \varphi^* f = \varphi^* \partial_X f \tag{29}$$

$\Rightarrow \varphi^*[X, Y] \overset{(28)}{=} [\varphi^* X, \varphi^* Y] = \nabla'_{\varphi^* Y} \varphi^* X - \nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y = \varphi^*(D_Y X - D_X Y)$
$\Rightarrow [X, Y] = D_Y X - D_X Y$.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\partial_X \langle Y, Z\rangle) &\overset{(29)}{=} \partial_{\varphi^* X} \varphi^* \langle Y, Z\rangle \overset{(27)}{=} \partial_{\varphi^* X} \langle \varphi^* Y, \varphi^* Z\rangle = \\
&= \langle \nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Y, \varphi^* Z\rangle + \langle \varphi^* Y, \nabla'_{\varphi^* X} \varphi^* Z\rangle = \\
&\overset{(26)}{=} \langle \varphi^* D_X Y, \varphi^* Z\rangle + \langle \varphi^* Y, \varphi^* D_X Z\rangle = \\
&= \varphi^*(\langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$. □

$\square$

Satz 4.9. *Geodäten sind intrinsisch:*
$\varphi : M' \to M$ *Isometrie,* $\gamma : I \to M$ *Geodäte*
$\Longrightarrow \varphi^*\gamma = \varphi^{-1} \circ \gamma : I \to M'$ *Geodäte.*

Beweis. $\dot{\gamma} \in \mathrm{Vect}(\gamma)$, $\nabla\dot{\gamma} = 0$
$\gamma'(t) := \varphi^{-1}(\gamma(t)) = \varphi^*\gamma(t)$
$\frac{d}{dt}\gamma'(t) = d\varphi(\gamma'(t))^{-1}\dot{\gamma}(t) = \varphi^*\dot{\gamma}(t)$
$\Rightarrow \nabla'(\frac{d}{dt}\gamma')(t) = \nabla'(\varphi^*\dot{\gamma})(t) \overset{Satz 4.7}{=} \varphi^*(\nabla\dot{\gamma})(t) = 0$
$\Rightarrow \gamma' : I \to M'$ ist eine Geodäte. $\square$

Bemerkung (Alternativer Beweis von Satz 4.9)**.**
$\gamma : [a,b] \to M,\ E(\varphi^*\gamma) = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}\varphi^*\gamma(t)\right|^2 dt \overset{Satz\,4.1}{=} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt = E(\gamma)$
$\Rightarrow$ *Satz* 4.9 *(Benutze Satz 2.3).*

Satz 4.10. *Paralleltransport ist intrinsisch:*
$\varphi : M' \to M$ *Isometrie,* $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *glatt*
$\Longrightarrow \Phi'_{\varphi^*\gamma}(t_1, t_0) = d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t_1)))^{-1}\Phi_\gamma(t_1, t_0)d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t_0))) : T_{\varphi^*\gamma(t_0)}M' \to T_{\varphi^*\gamma(t_1)}M'.$

Beweis. $\gamma' := \varphi^*\gamma : \mathbb{R} \to M'$.
Sei $v_0' \in T_{\gamma'(t_0)}M'$, $d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t_0))) : T_{\gamma'(t_0)}M' \to T_{\gamma(t_0)}M$.
Definiere $X(t) := \Phi_\gamma(t, t_0)d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t_0)))v_0' \in T_{\gamma(t)}M$ und
$X'(t) := d\varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t)))^{-1}X(t)$.
$\Rightarrow \nabla X = 0,\ X' = \varphi^*X,\ X'(t_0) = v_0'$
$\overset{Satz\,4.7}{\Longrightarrow} \nabla'X' = \varphi^*\nabla X = 0$
$\Rightarrow X'(t_1) = \Phi_{\gamma'}(t_1, t_0)v_0'$. $\square$

Satz 4.11. *Der Riemannsche Krümmungstensor ist intrinsisch:*
$\varphi : M' \to M$ *Isometrie* $\Longrightarrow R' = \varphi^*R.$

Beweis. $\gamma' : \mathbb{R}^2 \to M'$, $(s,t) \mapsto \gamma'(s,t)$; $Z' \in \mathrm{Vect}(\gamma')$, $Z'(s,t) \in T_{\gamma'(s,t)}M'$.
Definiere $\gamma := \varphi \circ \gamma' : \mathbb{R}^2 \to M,\ Z := d\varphi(\gamma')Z' \in \mathrm{Vect}(\gamma)$.
$\Rightarrow \gamma' = \varphi^*\gamma,\ Z' = \varphi^*Z$

$$\begin{aligned}
R'(\partial_s\gamma', \partial_t\gamma')Z' &:= \nabla_s'\nabla_t'Z' - \nabla_t'\nabla_s'Z' = \\
&= \nabla_s'\nabla_t'(\varphi^*Z) - \nabla_t'\nabla_s'(\varphi^*Z) = \\
&\overset{Satz\,4.7}{=} \varphi^*(\nabla_s\nabla_t z - \nabla_t\nabla_s Z) = \\
&= d\varphi(\gamma')^{-1}R(\partial_s\gamma, \partial_t\gamma)Z = \\
&= d\varphi(\gamma')^{-1}R(d\varphi(\gamma')\partial_s\gamma', d\varphi(\gamma')\partial_t\gamma')d\varphi(\gamma')Z' = \\
&= ((\varphi^*R)(\partial_s\gamma', \partial_t\gamma'))Z' \qquad \forall\gamma' : \mathbb{R}^2 \to M \text{ und } \forall Z' \in \mathrm{Vect}(\gamma')
\end{aligned}$$

$\Rightarrow R' = \varphi^*R.$ $\square$

Lemma 4.12 (Gauss Teorema Egregium). *Die Gauss-Krümmung ist intrinsisch: Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^3$ 2-Mannigfaltigkeiten mit Gauss-Krümmungen K, K', $\varphi : M' \to M$ Isometrie*
$\Longrightarrow K' = K \circ \varphi$.

Beweis. Lemma 4.4: $u, v \in T_pM$, $|u| = |v| = 1$, $\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow K(p) = \langle R_p(u, v)v, u\rangle$.

$$\text{Seien} \begin{cases} p' & := & \varphi^{-1}(p) \\ u' & := & d\varphi(p')^{-1}u \\ v' & := & d\varphi(p')^{-1}v \end{cases} \overset{Satz\,4.1}{\Longrightarrow} |u'| = |v'| = 1,\ \langle u', v'\rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K'(p') &= \langle R'_p(u', v')v', u'\rangle = \\ &= \langle \underbrace{d\varphi(p')^{-1}}_{d\varphi(p')^*} R_p(\underbrace{d\varphi(p')u'}_{u}, \underbrace{d\varphi(p')v'}_{v}) \underbrace{d\varphi(p')v'}_{v}, u'\rangle = \\ &= \langle R_p(u, v)v, u\rangle = \\ &= K(p) = K(\varphi(p')). \end{aligned}$$

□

Lokale Koordinaten

$p := \psi(x^1, \ldots, x^m)$;
$E_i(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x) \in T_{\psi(x)}M,\ i = 1, \ldots, m,\ E_i : V \to \mathbb{R}^n$;
$g_{ij}(x) = \langle E_i(x), E_j(x)\rangle$;
$u = d\psi(x)\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i E_i(x) \ \in T_pM = im\, d\psi(x)$;
$v = \sum_{i=1}^m \eta^i E_i(x) \in T_pM$;
$\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x)\xi^i\eta^j$;
$u = \sum_{i=1}^m \xi^i E_i,\ v = \sum_{j=1}^m \eta^j E_j,\ w = \sum_{k=1}^m \xi^k E_k$;

$R(u, v)w = \sum_{i,j,k=1}^m \xi^i\eta^j\zeta^k R(E_i, E_j)E_k, \quad R(E_i, E_j)E_k = \sum_{l=1}^m R^l_{ijk}(x)E_l(x), \quad R^l_{ijk} : V \to \mathbb{R}$

$R(u, v)w = \sum_{l=1}^m (\sum_{i,j,k=1}^m R^l_{ijk}(x)\xi^i\eta^j\zeta^k)E_l(x)$.

Übung. Kovariante Ableitung in lokale Koordinaten ausschreiben, dann im Krümmungstensor einsetzen.

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \sum_{\nu=1}^m (\Gamma^l_{i\nu}\Gamma^\nu_{jk} - \Gamma^l_{j\nu}\Gamma^\nu_{ik})$$

(man soll die Definition des Krümmungstensors benutzen).

Wir wissen $\Gamma^k_{ij} = \sum_{l=1}^m g^{kl}\Gamma_{lij};\ \Gamma_{lij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l})$
$\Rightarrow$ Die Γ^k_{ij} sind eindeutig bestimmt durch die $g_{ij} \Rightarrow$ *Satz* 4.7
$\Rightarrow$ Die R^l_{ijk} sind eindeutig bestimmt durch die $g_{ij} \Rightarrow$ *Satz* 4.11.

Sei $\varphi : M' \to M,\ \psi' : V \to M',\ \psi := \varphi \circ \psi'$.
$E_i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}\varphi \circ \psi'(x) = d\varphi(\psi'(x))\frac{\partial\psi'}{\partial x^i} = d\varphi(\psi'(x))E'_i(x)$
$\overset{Satz\,4.1}{\Longrightarrow} g_{ij}(x) = \langle E_i(x), E_j(x)\rangle = \langle E'_i(x), E'_j(x)\rangle = g'_{ij}(x)$.

Beispiel. *Gauss-Krümmung von* $S^2 \in \mathbb{R}^3$
Stereographische Projektion $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus N = (0,0,1)$
$g(x,y) = d\psi(x,y)^T d\psi(x,y) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Allgemeine Form von g im 2-dimensionaler Fall:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \text{E(x,y)} & \text{F(x,y)} \\ \text{F(x,y)} & \text{G(x,y)} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } E > 0,\ G > 0,\ EG - F^2 > 0.$$

Gausskrümmung $K = 1$. Dies kann man mit zwei Methoden beweisen:

(a) Mit Gauss-Codazzi ist dies leicht zu sehen.

(b) In lokalen Koordinaten ist es hingegen sehr aufwendig.

4.4 Globale Version des Satzes von Cartan-Ambrose-Hicks

Frage. Gegeben seien 2 Mannigfaltigkeiten M, M' derselben Dimension. Unter welche Bedingungen gibt es eine Isometrie von M nach M'?
Antwort. Satz von Cartan-Ambrose-Hicks.

Lemma 4.13. *M, M' zusammenhängende Mannigfaltigkeiten.*
$\varphi_0, \varphi_1 : M \to M'$ Isometrien.
$p_0 \in M$, $\varphi_0(p_0) = \varphi_1(p_0)$, $d\varphi_0(p_0) = d\varphi_1(p_0) \Longrightarrow \varphi_0 \equiv \varphi_1$.

Beweis. $A := \{p \in M \mid \varphi_0(p) = \varphi_1(p),\ d\varphi_0(p) = d\varphi_1(p)\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \qquad (p_0 \in A) \\ A \text{ abgeschlossen, da } \varphi,\ d\varphi \text{ stetig} \\ A \text{ offen (dies folgt aus Satz 4.1 oder aus Satz 4.9)} \end{array}\right\} \Rightarrow A = M \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1.$$

$p \in A$, $|v| < \delta$, δ klein, $\Rightarrow \varphi_0(\exp_p(v)) = \exp_{\varphi_0(p)}(d\varphi_0(p)v) = \varphi_1(\exp_p(v))$
$\Rightarrow \varphi_0\big|_{U(\delta)} = \varphi_1\big|_{U(\delta)}$, $U(\delta) := \{q \mid d(p,q) < \delta\}$
$\Rightarrow U(\delta) \subset A$. □

Definition. *Eine (glatte)* ***Homotopie*** *(von Abbildungen von $I = [a,b]$ nach M) ist eine glatte Abbildung $\gamma : [0,1] \times I \to M$. Wir schreiben $\gamma_\lambda(t) := \gamma(\lambda, t)$, $\gamma_\lambda : I \to M$. Wir nennen γ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1. γ heisst* ***Homotopie mit festen Endpunkten*** *wenn $\gamma_\lambda(a) = \gamma_0(a)$ und $\gamma_\lambda(b) = \gamma_0(b)$ für jedes $\lambda \in [0,1]$.*

Bemerkung. γ_0, γ_1 *glatt,* $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. *Dann existiert eine glatte Homotopie von γ_0 nach γ_1 mit festen Endpunkten (m.f.E.) $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine stetige Homotopie.*

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst* ***einfach zusammenhängend****, wenn es für je zwei glatte Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : I \to M$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ eine Homotopie mit festen Endpunkten von γ_0 nach γ_1 gibt.*

Bemerkung. $\Omega_{p,q} = \{\gamma : [a,b] \to M \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ *zusammenhängend* $\iff$ M *einfach zusammenhängend.*

Erinnerung.
Eine Abwicklung von M entlang M' besteht aus zwei Wegen $\gamma : I \to M$, $\gamma' : I \to M'$ und orthogonalen Isomorphismen $\Phi(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'$;
$\Phi(t)\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(t)$, $\Phi(t)\Phi_\gamma(t,s) = \Phi'_{\gamma'}(t,s) \circ \Phi(s)$.

Wir betrachten alle Abwicklungen (γ, γ', Φ) auf $I = [0,1]$, die die Anfangsbedingungen
$(*)\ \begin{cases} \gamma(0) = p_0, \quad \gamma'(0) = p_0' \\ \Phi(0) = \Phi_0 \end{cases}$ erfüllen.

Satz 4.14 (Cartan-Ambrose-Hicks, globale Version)**.** *Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige m-Mannigfaltigkeiten.*
Seien $p_0 \in M$, $p_0' \in M'$, $\Phi_0 : T_{p_0}M \to T_{p_0'}M'$ orthogonaler Isomorphismus gegeben. Äquivalent sind:

i) $\exists$ *Isometrie $\varphi : M \to M'$ so, dass $\varphi(p_0) = p_0'$ und $d\varphi(p_0) = \Phi_0$;*

ii) $\forall$ *Abwicklung (γ, γ', Φ), die $(*)$ erfüllt, gilt: $\gamma(1) = p_0 \Longrightarrow \gamma'(1) = p_0'$ und $\Phi(1) = \Phi_0$;*

iii) $\forall$ *zwei Abwicklungen $(\gamma_i, \gamma_i', \Phi_i)_{i=0,1}$, die $(*)$ erfüllen, gilt:*
$\gamma_0(1) = \gamma_1(1) \Longrightarrow \gamma_0'(1) = \gamma_1'(1)$;

iv) $\forall$ *Abwicklung (γ, γ', Φ), die $(*)$ erfüllt, gilt $\Phi(t)^* R'_{\gamma'(t)} = R_{\gamma(t)}$.*

Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r > 0\}$, *Gauss-Krümmung* $K = 1/r^2$;
$M' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r' > 0\}$, *Gauss-Krümmung* $K' = 1/r'^2$;
$r \neq r' \Longrightarrow \exists$ *Abwicklung (γ, γ', Φ) die $(*)$ und $\gamma(1) = p_0$, $\gamma'(1) \neq p_0'$ erfüllt.*

Lemma 4.15. *$\varphi : M \to M'$ Isometrie, $\varphi(p_0) = p_0'$, $d\varphi(p_0) = \Phi_0 \Longrightarrow \forall$ Abwicklung (γ, γ', Φ) die $(*)$ erfüllt gilt $\varphi(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, $d\varphi(\gamma(t)) = \Phi(t)$, $\quad \forall\, t$.*

Beweis. Sei (γ, γ', Φ) eine Abwicklung die $(*)$ erfüllt.
Definiere $\tilde\gamma'(t) := \varphi(\gamma(t))$, $\tilde\Phi(t) = d\varphi(\gamma(t))$. Dann gilt:
$\dot{\tilde\gamma}'(t) = \tilde\Phi(t)\dot\gamma(t)$ (Kettenregel);
$\tilde\Phi(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\tilde\gamma'(t)}M'$ orthonormaler Isomorphismus (Definition von Isometrie);
$\tilde\Phi(t)\Phi_\gamma(t,s) = \Phi'_{\gamma'}(t,s)\tilde\Phi(s)$ (Satz 4.10, Paralleltransport ist intrinsisch);
$\Rightarrow (\gamma, \tilde\gamma', \tilde\Phi)$ ist eine Abwicklung die $(*)$ erfüllt.
Wegen der Eindeutigkeit im Satz 3.10 folgt $\tilde\gamma'(t) = \gamma'(t)$, $\tilde\Phi(t) = \Phi(t)$, $\quad \forall\, t$.
$\Rightarrow \gamma'(t) = \varphi(\gamma(t))$, $\Phi(t) = d\varphi(\gamma(t))$, $\quad \forall\, t$. $\square$

Beweis von Satz 4.14. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)* $\Rightarrow$ *iv)* $\Rightarrow$ *iii)*.

Schritt 1: i) $\Rightarrow$ ii), iv): Annahme: φ Isometrie, $\varphi(p_0) = p_0', d\varphi(p_0) = \Phi_0$.
Sei (γ, γ', Φ) eine Abwicklung die $(*)$ erfüllt $\stackrel{Lemma\ 4.15}{\Longrightarrow} \gamma'(t) = \varphi(\gamma(t)), \Phi(t) = d\varphi(\gamma(t))$;
$\gamma(1) = p_0 \Longrightarrow \gamma'(1) = \varphi(\gamma(1)) = \varphi(p_0) = p_0', \ \Phi(1) = d\varphi(\gamma(1)) = d\varphi(p_0) = \Phi_0$;
$\Phi(t)^* R'_{\gamma'(t)} = \Phi(t)^{-1} R'_{\gamma'(t)}(\Phi(t)\cdot, \Phi(t)\cdot)\Phi(t) = (\varphi^* R')_{\gamma(t)} \stackrel{Satz\ 4.11}{=} R_{\gamma(t)}$.

Schritt 2: ii) $\Rightarrow$ iii): Seien $(\gamma_i, \gamma_i', \Phi_i)_{i=0,1}$ Abwicklungen die $(*)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ erfüllen.
Definiere $\gamma : [0,1] \to M$ durch $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_1(2-2t), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$.
γ ist stückweise glatt und stetig an der Stelle $t = 1/2$.
$\stackrel{3.10}{\Longrightarrow} \exists$ Abwicklung (γ, γ', Φ) die $(*)$ erfüllt
$\stackrel{(ii)}{\Longrightarrow}$ da $\gamma(1) = p_0$ ist, gilt $\gamma'(1) = p_0', \Phi(1) = \Phi_0$
$\Longrightarrow$ die Abwicklung $t \mapsto (\gamma(1-t), \gamma'(1-t), \Phi(1-t))$ erfüllt ebenfalls $(*)$
$\stackrel{Eind.\ in\ 3.10}{\Longrightarrow} (\gamma'(t), \Phi'(t)) = \begin{cases} (\gamma_0'(2t), \Phi(2t)), & 0 \le t \le 1/2 \\ (\gamma_1'(2-2t), \Phi(2-2t)), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$
$\Rightarrow \gamma_0'(1) = \gamma'(1/2) = \gamma_1'(1)$.

Schritt 3: iii) $\Rightarrow$ i): Gegeben sei $q \in M$.
Definiere $\varphi(q) := \gamma'(1)$, wobei $\gamma : [0,1] \to M$ irgendeine glatte Kurve so, dass $\gamma(0) = p_0$ und $\gamma(1) = q$, und (γ, γ', Φ) die Abwicklung ist die $(*)$ erfüllt (Satz 3.10).
Nach *iii)* ist der Endpunkt $\gamma'(1)$ unabhängig von der Wahl von γ.
Also ist φ wohldefiniert.

a) (γ, γ', Φ) Abwicklung die $(*)$ erfüllt, dann gilt $\varphi(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
also gilt auch $d\varphi(\gamma(t))\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(t) = \Phi(t)\dot\gamma(t) \Rightarrow \varphi$ ist glatt
$(\gamma \in C^\infty(I, M) \Rightarrow \varphi \circ \gamma \in C^\infty(I, M'))$ und $|d\varphi(q)v| = |v|, \quad \forall v \in T_qM$.

b) φ ist surjektiv: Sei $q' \in M' \Rightarrow$ wähle γ' so, dass $\gamma'(0) = p_0', \gamma'(1) = q'$
$\Rightarrow \exists$ Abwicklung (γ, γ', Φ) die $(*)$ erfüllt $\stackrel{a)}{\Rightarrow} \varphi(\gamma(1)) = \gamma'(1) = q'$.

c) φ injektiv: Annahme: $\varphi(q_0) = \varphi(q_1) = q', \ \gamma_0(1) = q_0, \ \gamma_1(1) = q_1$.
Da M' einfach zusammenhängend, existiert eine Homotopie mit festen Endpunkte $\{\gamma_\lambda'\}_{0 \le \lambda \le 1}$ von γ_0' nach γ_1'
$\Rightarrow \exists$ Abwicklung $(\gamma_\lambda, \gamma_\lambda', \Phi_\lambda)$
$\Rightarrow \varphi(\gamma_\lambda(1)) = \gamma_\lambda'(1) = q' \Rightarrow d\varphi(\gamma_\lambda(1))\frac{\partial \gamma_\lambda(1)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \gamma_\lambda(1)}{\partial \lambda} = 0$
$\Rightarrow q_0 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q_1$.

Schritt 4: iv) $\Rightarrow$ iii): M einfach zusammenhängend, $(\gamma_i, \gamma_i', \Phi_i)_{i=0,1}$ gegeben, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$
$\Rightarrow \exists$ Homotopie $\{\gamma_\lambda\}_{0 \le \lambda \le 1}$ mit festen Endpunkten von γ_0 nach γ_1.
$\forall \lambda \in [0,1]$ gilt $\gamma_\lambda(0) = p_0, \gamma_\lambda(1) = \gamma_0(1)$.
Sei $(\gamma_\lambda, \gamma_\lambda', \Phi_\lambda)$ die Abwicklung von M' entlang M mit $(*)$ $\gamma_\lambda'(0) = p_0', \Phi_\lambda(0) = \Phi_0$.
Zu zeigen ist $\frac{\partial}{\partial \lambda}\gamma_\lambda'(1) \equiv 0$.

Behauptung 1. $\forall t$ ist $\lambda \mapsto (\gamma_\lambda(t), \gamma_\lambda'(t), \Phi_\lambda(t))$ eine Abwicklung.

Da $\partial_\lambda \gamma_1(1) = 0$, folgt aus Behauptung 1, dass $\partial_\lambda \gamma_\lambda'(1) = \Phi_\lambda(1)\partial_\lambda\gamma_1(1) = 0$
$\Rightarrow \gamma_0'(1) = \gamma_1'(1)$.

Beweis der Behauptung 1. Wähle Basis $E_{10}, ...E_{m0}$ von $T_{p_0}M$.
Wähle Basen $E_i(\lambda, t)$ so, dass $E_i(\lambda, 0) = E_{i0}, \nabla_t E_i \equiv 0$.
Definiere $E_i'(\lambda, t) = \Phi_\lambda(t) E_i(\lambda, t) \in T_{\gamma_\lambda'(t)} M'$.
Wähle $\xi^i(\lambda, t) \in \mathbb{R}$ so, dass $\partial_t \gamma = \sum_{i=1}^m \xi^i E_i$. Dann gilt auch $\partial_t \gamma' = \sum_{i=1}^m \xi^i E_i'$.
Betrachte $X'(\lambda, t) := \partial_\lambda \gamma_\lambda'(t), \quad Y_i'(\lambda, t) := \nabla_\lambda' E_i'(\lambda, t)$.
Dann gilt es: $\nabla_t' X' = \nabla_t' \partial_\lambda \gamma_\lambda' = \nabla_\lambda'(\partial_t \gamma_\lambda') = \sum_{i=1}^m ((\partial_\lambda \xi^i) E_i' + \xi^i \nabla_\lambda' E_i')$;
$\nabla_t' Y_i' = \nabla_t' \nabla_\lambda' E_i' - \underbrace{\nabla_\lambda' \nabla_t' E_i'}_{=0,\ \textit{kann addiert werden}} = R'(\partial_t \gamma', \partial_\lambda \gamma') E_i' = R'(\partial_t \gamma', X') E_i'$;
$X'(\lambda, 0) = 0, Y_i'(\lambda, 0) = 0$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Vektorfelder X', Y_i' die gew. Differentialgleichung

$$\begin{cases} \nabla_t' X' = \sum_{i=1}^m ((\partial_\lambda \xi^i) E_i' + \xi^i Y_i'), & X'(\lambda, 0) = 0 \\ \nabla_t Y_i' = R'(\partial_t \gamma', X') E_i, & Y_i'(\lambda, 0) = 0 \end{cases}$$

erfüllen.

Behauptung 2. Die Vektorfelder $\tilde{X}'(\lambda, t) := \Phi(\lambda, t) \partial_\lambda \gamma_\lambda(t)$, $\tilde{Y}_i'(\lambda, t) := \Phi(\lambda, t) \nabla_\lambda E_i(\lambda, t)$ erfüllen ebenfalls die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \nabla_t' \tilde{X}' = \sum_{i=1}^m ((\partial_\lambda \xi^i) E_i' + \xi^i \tilde{Y}_i'), & \tilde{X}'(\lambda, 0) = 0 \\ \nabla_t \tilde{Y}_i' = R'(\partial_t \gamma', \tilde{X}') E_i, & \tilde{Y}_i'(\lambda, 0) = 0 \end{cases}.$$

Aus Behauptung 2 folgt $\Phi(\lambda, t) \partial_\lambda \gamma_\lambda = \partial_\lambda \gamma_\lambda'$ und $\Phi(\lambda, t) \nabla_\lambda E_i = \nabla_\lambda' E_i'$
$\Longrightarrow \forall t$ ist $\lambda \mapsto (\gamma_\lambda(t), \gamma_\lambda'(t), \Phi_\lambda(t))$ eine Abwicklung, d.h. Behauptung 1. $\square$

Beweis von Behauptung 2.

$$\nabla_t' \tilde{X}' = \nabla_t'(\Phi_\lambda \partial_\lambda \gamma_\lambda) = \Phi_\lambda \nabla_t \partial_\lambda \gamma_\lambda = \Phi_\lambda \nabla_\lambda (\overbrace{\partial_t \gamma_\lambda}^{\sum \xi^i E_i}) = \Phi_\lambda (\sum_{i=1}^m ((\partial_\lambda \xi^i) E_i + \xi^i \nabla_\lambda E_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^m \partial_\lambda \xi^i (\Phi_\lambda E_i) + \sum_{i=1}^m \xi^i \Phi \nabla_\lambda E_i = \sum_{i=1}^m (\partial_\lambda \xi^i E_i' + \xi^i \tilde{Y}_i'),$$

und

$$\nabla_t' \tilde{Y}_i' = \nabla_t'(\Phi \nabla_\lambda E_i) = \Phi \nabla_t \nabla_\lambda E_i = \Phi R(\partial_t \gamma, \partial_\lambda \gamma) E_i \overset{(iv)}{=}$$
$$= R'(\underbrace{\Phi \partial_t \gamma}_{\partial_t \gamma'}, \underbrace{\Phi \partial_\lambda \gamma}_{\tilde{X}'}) \underbrace{\Phi E_i}_{E_i'} = R'(\partial_t \gamma', \tilde{X}') E_i'.$$

$\square$

$\square$

4.5 Lokale Version des Satzes von Cartan-Ambrose-Hicks

$U_r(p, M) = \{q \in M \mid d(p,q) < r\}$
$\exp_{p_0} : \{v \in T_{p_0}M \mid |v| < r\} \to U_r(p_0, M) \qquad (1)$
$\exp_{p'_0} : \{v' \in T_{p'_0}M' \mid |v'| < r\} \to U_r(p'_0, M') \qquad (2)$
Annahme: (1),(2) Diffeomorphismen (gilt für kleine r),
$\Phi_0 : T_{p_0}M \to T_{p'_0}M'$ orthogonaler Isomorphismus.

Satz 4.16 (Cartan-Ambrose-Hicks, lokale Version)**.** *Unter obigen Voraussetzungen sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\exists$ *Isometrie* $\varphi : U_r(p_0, M) \to U_r(p'_0, M')$ *so, dass* $\varphi(p_0) = p'_0,\ d\varphi(p_0) = \Phi_0$*;*

ii) $\forall$ *Abwicklung* (γ, γ', Φ) *so, dass*
$\gamma(0) = p_0, \gamma'(0) = p'_0, \Phi(0) = \Phi_0, \gamma(t) \in U_r(p_0, M), \gamma'(t) \in U_r(p'_0, M') \quad \forall t \quad (**)$
gilt $\gamma(1) = p_0 \Longrightarrow \gamma'(1) = p'_0, \Phi(1) = \Phi_0$*;*

iii) Für je zwei Abwicklungen $(\gamma_i, \gamma'_i, \Phi_i)_{i=0,1}$ *die* $(**)$ *erfüllen gilt*
$\gamma_0(1) = \gamma_1(1) \Longrightarrow \gamma'_0(1) = \gamma'_1(1)$*;*

iv) $\forall\, v \in T_{p_0}M$ *mit* $|v| < r$ *gilt:*
seien $\gamma(t) := \exp_{p_0}(tv)$ *und* $\gamma'(t) := \exp'_{p_0}(t\Phi_0 v), \quad 0 \le t \le 1$*;*
weiter sei $\Phi(t) := \Phi'_{\gamma'}(t, 0)\Phi_0\Phi_\gamma(0, t)$.
Dann gilt $\Phi(t)^* R'_{\gamma'(t)} = R_{\gamma(t)}$.

Ausserdem: wenn (i) gilt so ist $\varphi(\exp_{p_0}(v)) = \exp_{p'_0}(\Phi_0 v) \quad \forall t \in T_pM, |v| < r$.

Lemma 4.17. *Seien* $v, w \in T_pM,\ |v| < r, \gamma(t) := \exp_p(tv),\ \gamma_\lambda := \exp_p(t(v + \lambda w))$,
$X(t) := \frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}\gamma_\lambda(t) \in T_{\gamma(t)}M$
$\Longrightarrow \nabla_t^2 X = R(\dot\gamma, X)\dot\gamma$ *(Jacobi Gleichung),* $X(0) = 0, \nabla_t X(0) = w$.

Beweis. $\gamma_\lambda(0) = p \Rightarrow X(0) = 0$
$\nabla_t X(0) = \nabla_t \partial_\lambda \gamma(0) = \nabla_\lambda \partial_t \gamma(0) = \nabla_\lambda|_{\lambda=0}(v + \lambda w) = w.$

$\nabla_t^2 X = \nabla_t\nabla_t X = \nabla_t\nabla_t\partial_\lambda\gamma = \nabla_t\nabla_\lambda(\partial_t\gamma) = \overbrace{\nabla_\lambda\nabla_t\partial_t\gamma}^{=0} + R(\partial_t\gamma, \partial_\lambda\gamma)\partial_t\gamma$
$\Rightarrow \nabla^2 X = R(\dot\gamma, X)\dot\gamma.$ ∎

Beweis von Satz 4.16*.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)* $\Rightarrow$ *iv)* genau wie bei Satz 4.14.
Zu zeigen ist *iv)* $\Rightarrow$ *i)*.

$$\begin{array}{ccc}
\{v \in T_{p_0}M \mid |v| < r\} & \xrightarrow{\exp_{p_0}} & U_r(p_0, M) \\
\downarrow \Phi_0 & & \downarrow \varphi \\
\{v' \in T_{p'_0}M' \mid |v'| < r\} & \xrightarrow{\exp_{p'_0}} & U_r(p'_0, M')
\end{array}$$

$\varphi := \exp_{p'_0} \circ \Phi_0 \circ \exp_{p_0}^{-1}$ d.h. $\varphi(\exp_{p_0}(v)) = \exp_{p'_0}(\Phi_0 v), \quad \forall v \in T_{p_0}M, |v| < r.$
Zu zeigen: φ ist eine Isometrie.

Behauptung. $|d\varphi(q)u| = |u|, \quad \forall q \in U_r(p_0, M),\ \forall u \in T_qM.$

Nach Behauptung ist $\varphi : U_r(p_0, M) \to U_r(p'_0, M')$ eine Isometrie, so ist Satz 4.16 bewiesen.

Beweis der Behauptung. Wähle $v \in T_{p_0}M$ so, dass $|v| < r,\ \exp_{p_0}(v) = q$.
Wähle $w \in T_{p_0}M$ so, dass $d\exp_{p_0}(v)w = u$.
Definiere $\gamma_\lambda(t) := \exp_{p_0}(t(v + \lambda w)), \quad X(t) := \frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}\gamma_\lambda(t),\ X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$
$\lambda = 0:\ \gamma(t) := \gamma_0(t) = \exp_{p_0}(tv),\ \gamma(1) = q,\ X(1) = u.$
Nach Lemma 4.17 gilt

$$\nabla^2 X = R(\dot\gamma, X)\dot\gamma,\ X(0) = 0,\ \nabla X(0) = w. \tag{30}$$

$\gamma'_\lambda(t) := \exp_{p'_0}(t(\Phi_0 v + \lambda\Phi_0 w)) = \varphi(\gamma_\lambda(t)).$
$\lambda = 0 : \gamma'(t) := \gamma'_0(t) = \exp_{p'_0}(t\Phi_0 v), \quad X'(t) := \frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}\gamma'_\lambda(t).$
Wieder nach Lemma 4.17 gilt

$$\nabla'^2 X' = R'(\dot\gamma', X')\dot\gamma',\ X'(0) = 0,\ \nabla' X'(0) = \Phi_0 w. \tag{31}$$

$\Phi(t) := \Phi'_{\gamma'}(t, 0)\Phi_0\Phi_\gamma(0, t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'.$
Nach Voraussetzung *iv)* gilt $\Phi(t)^* R'_{\gamma'(t)} = R_{\gamma(t)}$. Ausserdem:

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(t) \text{ orthogonaler Isomorphismus} \\ \nabla'(\Phi X) = \Phi(\nabla X) \\ \Phi(t)\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(t)\end{array}\right\} \text{Dann folgt}$$

$\nabla'^2(\Phi X) = \Phi(\nabla^2 X) \overset{(30)}{=} \Phi R(\dot\gamma, X)\dot\gamma \overset{(iv)}{=} R'(\Phi\dot\gamma, \Phi X)\Phi\dot\gamma = R'(\dot\gamma', \Phi X)\dot\gamma'$
$\Rightarrow \Phi X \in \mathrm{Vect}(\gamma')$ ist Lösung von (31) $\overset{Eind.}{\Longrightarrow} X' = \Phi X.$
Somit $d\varphi(q)u = d\varphi(\gamma(1))X(1) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}\varphi(\gamma_\lambda(1)) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}\gamma'_\lambda(1) = X'(1) = \Phi(1)u.$
Da $\Phi(1)$ ein orthogonaler Isomorphismus ist, gilt

$$|d\varphi(p)u| = |\Phi(1)u| = |u|,$$

für alle $q \in U_r(p_0, M)$ und alle $u \in T_qM$. □ □

4.6 Flache Mannigfaltigkeiten

Definition. *$M \subset \mathbb{R}^n$ heisst* ***flach****, wenn der Riemannsche Krümmungstensor auf M verschwindet, d.h. $R = 0$.*

Satz 4.18. *M m-Mannigfaltigkeit. M ist flach $\Longleftrightarrow \forall\, p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M,\ p \in U$, so dass U isometrisch zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis.

$\Leftarrow$ Satz 4.11 (Der Riemannsche Krümmungstensor ist intrinsisch).

$\Rightarrow$ Satz 4.16. Insbesondere wähle $p_0 \in M, p'_0 = 0 \in \mathbb{R}^m = M'$.
$\Phi_0 : T_{p_0}M \to \mathbb{R}^m = T_{p'_0}M'$ orthogonaler Isomorphismus,
Bedingung *iv)* von Satz 4.16 ist erfüllt
$\Rightarrow \exists$ Isometrie $\varphi : U_r(p_0, M) \to \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < r\}$. □

Bemerkung. *$V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset M$, $\psi \in C^\infty(V,U)$ Parametrisierung.*
$g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \rangle, \quad x \in V.$
$g_{ij}(x) = \delta_{ij} \Longleftrightarrow d\psi(x)^T d\psi(x) = \mathbb{1} \Longleftrightarrow \psi$ *Isometrie.*

Satz 4.19. *Sei M eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige m-Mannigfaltigkeit. Dann gilt: M flach $\Longleftrightarrow \exists$ Isometrie $\varphi : M \to \mathbb{R}^m$.*

Beweis.

$\Leftarrow$ Satz 4.11;

$\Rightarrow$ Satz 4.14. □

Übung. Jede 1-Mannigfaltigkeit ist flach.

Übung. M_1, M_2 flach $\Longrightarrow M_1 \times M_2$ flach.

Beispiel. *$T^2 = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z_1| = |z_2| = 1\} \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ flach.*
Kein Widerspruch zu Satz 4.19, da T^2 nicht einfach zusammenhängend!

Beispiel (Regelflächen)**.** *Seien $\gamma, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ glatte Kurven.*
Annahme: $|u(t)| = 1\ \forall t,\ \dot{u}(t) \neq 0\ \forall t,\ \langle \dot{\gamma}(t), u(t) \rangle = 0\ \forall t.$
$E(t) := u(t)^\perp \subset \mathbb{R}^n,\ L(t) := u(t)^\perp \cap \dot{u}(t)^\perp \subset \mathbb{R}^n.\ L(t) = \lim_{s \to t} E(t) \cap E(s)$
$\dim E(t) = n - 1 =: m,\ \dim L(t) = n - 2 = m - 1 \quad$ *(da $u(t) \perp \dot{u}(t)$).*
Annahme: $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{u}(t) \rangle \neq 0 \quad \forall t$, d.h. $\dot{\gamma}(t) \notin L(t)$.
Sei $t_0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ klein, $I_0 := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.
$L(t)_\varepsilon := \{v \in L(t) \mid |v| < \varepsilon\},\ M_0 := \cup_{t \in I_0}(\gamma(t) + L(t)_\varepsilon).$

Übung.

i) M_0 ist m-Mannigfaltigkeit für ε klein genug;

ii) $T_pM_0 = E(t) \quad \forall\, p \in \gamma(t) + L(t)$;

iii) M_0 ist flach;

iv) Seien $\gamma' \in C^\infty(I_0, \mathbb{R}^m),\ \Phi(t) : E(t) = T_{\gamma(t)}M_0 \to \mathbb{R}^m$ so, dass (γ, γ', Φ) eine Abwicklung von M_0 entlang $\mathbb{R}^m$.
Sei $\varphi : M_0 \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\varphi(\gamma(t) + v) := \gamma'(t) + \Phi(t)v$.
Zeige $M_0' := \varphi(M_0) \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : M_0 \to M_0'$ Isometrie.

Hinweise.

i) Sei $e_1, ... e_{m-1}$ orthonormale Basis von $L(t_0)$. Seien $t \mapsto X_i(t) \in \mathbb{R}^n\ i = 1, ..., m-1$ definiert durch $\dot{X}_i + \frac{\langle \ddot{u}, X_i \rangle}{|\dot{u}|^2}\dot{u} = 0,\ X_i(0) = e_i$.
Behauptung: $X_1(t), ... X_{m-1}(t)$ orthonormale Basis von $L(t)$.
Definiere $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^n$ durch $\Psi(t, x^1, ..., x^{m-1}) := \gamma(t) + \sum_{i=1}^{m-1} x^i X_i(t)$.
Behauptung 2: $d\Psi(t, 0)$ ist injektiv.

iii) $\nu : M_0 \to S^{n-1}$ normales Vektorfeld.
Behauptung: $\forall\, p \in \gamma(t) + L(t),\ \forall\, v \in E(t)$ gilt $d\nu(p)v \in \mathbb{R}\dot{u}(t)$
(benutze Gauss-Codazzi).

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit M_0 dieser Form heisst **Regelfläche**.*

Übung. Folgende Mannigfaltigkeiten sind Regelflächen im $\mathbb{R}^3$:

i) Kegel über $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\},\ \Gamma$ 1-Mannigfaltigkeit, $p \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$;
$M = \{tp + (1-t)q \mid t > 0,\ q \in \Gamma\}$;

ii) Zylinder über $\Gamma,\ M = \{q + tv \mid t \in \mathbb{R},\ q \in \Gamma,\ v \notin \mathbb{R}^2 \times \{0\}\}$;

iii) Tangentialfläche $M = \{\gamma(t) + s\dot{\gamma}(t) \mid |t - t_0| < \varepsilon,\ 0 < s < \varepsilon\}$,
$\dot{\gamma}(t_0)$ und $\ddot{\gamma}(t_0)$ linear unabhängig;

iv) Normalfläche $|\dot{\gamma}(t)| = 1,\ \ddot{\gamma}(t) \neq 0,\ M = \{\gamma(t) + s\ddot{\gamma}(t) \mid |t - t_0| < \varepsilon,\ |s| < \varepsilon\}$.

4.7 Symmetrische Mannigfaltigkeiten

Bemerkung. (γ, γ', Φ) *Abwicklung* $\Rightarrow \Phi(t) = \Phi'_{\gamma'}(t,0)\Phi(0)\Phi_\gamma(0,t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma'(t)}M'$.
Nehmen wir an $\gamma(0) = p_0,\ \gamma'(0) = p_0',\ \Phi(0) = \Phi_0,\ \Phi_\gamma(t,0)^* R_{\gamma(t)} = R_{p_0}$,
$\Phi'_{\gamma'}(t,0)^* R'_{\gamma'(t)} = R'_{p_0'},\ {\Phi_0}^* R'_{p_0'} = R_{p_0}$.
Dann folgt $\Phi(t)^* R'_{\gamma'(t)} = R_{\gamma(t)}$.

Satz 4.20. *$M \in \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeit. Äquivalent sind:*

*i) Der Riemannsche Krümmungstensor ist invariant unter Paralleltransport,
das heisst* $\forall\, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R} \quad \Phi_\gamma(t,s)^* R_{\gamma(t)} = R_{\gamma(s)}$;

ii) $\nabla R = 0$;

iii) $\forall\, p \in M \quad \exists\, r > 0 \quad \exists\, \varphi : U_r(p,M) \to U_r(p,M)$ *Isometrie
so, dass* $\varphi(p) = p,\ d\varphi(p) = -\mathbb{1} : T_pM \to T_pM$.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *iii)* :
Satz 4.16 (C.A.H. lokal) $M' = M,\ p_0 = p_0' = p,\ \Phi_0 = -\mathbb{1}$.
$\gamma(t) = \exp_p(tv),\ v \in T_pM.\ \gamma'(t) = \exp_p(-tv)$.
$\Phi(t) = -\Phi_{\gamma'}(t,0)\Phi_\gamma(0,t) \overset{(i)}{\Rightarrow} \Phi(t)^* R_{\gamma'(t)} = R_{\gamma(t)} \overset{Satz\,4.16}{\Longrightarrow}$ *iii)*.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* :

$(\gamma(0) = p,\ \dot\gamma(0) = u,\ X(0) = v,\ Y(0) = w,\ Z(0) = z)$
Nach Satz 4.11 $\varphi^* R = R$, nach Satz 4.7 $\varphi^*\nabla = \nabla \Rightarrow \varphi^*(\nabla R) = \nabla R$
Es gilt

$$\begin{aligned}(\nabla R)_p(u)(v,w)z =& \nabla_t(R_{\gamma(t)}(X,Y)Z) - R_{\gamma(t)}(\nabla_t X, Y)Z - R_{\gamma(t)}(X, \nabla_t Y)Z - \\ &- R_{\gamma(t)}(X,Y)\nabla_t Z\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(T_pM) \ni (\nabla R)_p(u)(v,w) =& (\varphi^*\nabla R)_p(u)(v,w) = \\ =& d\varphi(p)^{-1}\nabla R_{\varphi(p)}(d\varphi(p)u)(d\varphi(p)v, d\varphi(p)w)d\varphi(p) \overset{(iii)}{=} \\ =& -(\nabla R)_p(u)(v,w)\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\nabla R)_p = -(\nabla R)_p \Rightarrow (\nabla R)_p = 0, \quad \forall\, p.$

ii) $\Rightarrow$ *i)* :

Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M),\ \gamma(0) = p,\ u, v, w \in T_pM$.
Definiere $X(t) := \Phi_\gamma(t,0)u$, $Y(t) := \Phi_\gamma(t,0)v$ und $Z(t) := \Phi_\gamma(t,0)w$.
Es folgt

$$\begin{aligned}(\Phi_\gamma(t,0)^* R_{\gamma(t)})(u,v)w =& \Phi_\gamma(t,0)^{-1} R_{\gamma(t)}(\Phi_\gamma(t,0)u, \Phi_\gamma(t,0)v)\Phi_\gamma(t,0)w = \\ =& \Phi_\gamma(0,t) R_{\gamma(t)}(X(t), Y(t))Z(t).\end{aligned}$$

Durch ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\Phi_\gamma(t,0)^* R_{\gamma(t)})(u,v)w = \frac{d}{dt}\Phi_\gamma(0,t)R_{\gamma(t)}(X(t),Y(t))Z(t) \overset{3.5}{=} \\ &= \Phi_\gamma(0,t)\nabla_t(R_{\gamma(t)}(X(t),Y(t))Z(t)) = \\ &= \Phi_\gamma(0,t)((\underbrace{\nabla R}_{=0 \ nach \ (ii)})_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))(X(t),Y(t))Z(t) + R_{\gamma(t)}(\underbrace{\nabla X(t)}_{=0}, Y(t))Z(t) + \\ &\quad + R_{\gamma(t)}(X(t), \underbrace{\nabla Y(t)}_{=0})Z(t) + R_{\gamma(t)}(X(t),Y(t))\underbrace{\nabla Z(t)}_{=0}) = 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_\gamma(t,0)^* R_{\gamma(t)} = R_p.$ $\square$

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit M, die die Bedingungen von Satz* 4.20 *erfüllt, heisst* ***lokal symmetrisch***. *Die Isometrie φ in (iii) heisst* ***lokal geodätische Spiegelung***.

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit M heisst* ***symmetrisch***, *wenn $\forall p \in M\ \exists$ Isometrie $\varphi : M \to M$ so, dass $\varphi(p) = p$, $d\varphi(p) = -\mathbb{1}$.*

Übung. M symmetrisch $\Longrightarrow$ M vollständig.

Korollar 4.21. *M lokal symmetrisch, vollständig, einfach zusammenhängend $\Longrightarrow$ M symmetrisch.*

Beweis. O.B.d.A. M zusammenhängend.
Wir benutzen Satz 4.14 (C.A.H. global).
$p_0 = p_0' = p$, $\phi_0 = -id : T_pM \to T_pM$.
Bedingung $iv)$ von Satz 4.14 ist erfüllt (folgt aus Satz 4.20).
$\Rightarrow \exists\, \varphi : M \to M$ Isometrie $\varphi(p) = p$, $d\varphi(p) = -id$. □

Korollar 4.22. *M, M' lokal symmetrisch $p_0 \in M, p_0' \in M'$, $\Phi_0 : T_{p_0}M \to T_{p_0'}M'$ orthogonaler Isomorphismus, $\Phi_0^* R'_{p_0'} = R_{p_0}$*
$\Longrightarrow \exists$ lokale Isometrie $\varphi : U_r(p_0, M) \to U_r(p_0', M')$, $\varphi(p_0) = p_0'$, $d\varphi(p_0) = \Phi_0$.

Beweis. Satz 4.16 und 4.20. □

Korollar 4.23. *Seien M, M' symmetrische, zusammenhängend, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten.*
$p_0 \in M, p_0' \in M'$, $\Phi_0 : T_{p_0}M \to T_{p_0'}M'$ orthogonaler Isomorphismus so, dass $\Phi_0^* R'_{p_0'} = R_{p_0}$
$\Longrightarrow \exists$ Isometrie $\varphi : M \to M'$ so, dass $\varphi(p_0) = p_0'$, $d\varphi(p_0) = \Phi_0$.

Beweis. Satz 4.14 und 4.20. □

Korollar 4.24. *Jede zusammenhängende, einfach zusammenhängende, symmetrische Mannigfaltigkeit ist homogen, d.h. $\forall p, q \in M\ \exists$ eine Isometrie $\varphi : M \to M$ so, dass $\varphi(p) = q$.*

Beweis. Korollar 4.23, $M' = M$, $p_0 = p$, $p_0' = q$. Wähle $\gamma : [0,1] \to M$ so, dass
$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\Phi_0 := \Phi_\gamma(1,0) : T_pM \to T_qM$. □

Bemerkung. *Korollar 4.24 gilt auch wenn M nicht einfach zusammenhängend ist. (ohne Beweis)*

Beispiel. *M flach ($R = 0$) $\Longrightarrow$ M lokal symmetrisch ($\nabla R = 0$).*

Beispiel. *M_1, M_2 lokal symmetrisch $\Longrightarrow$ $M_1 \times M_2$ lokal symmetrisch.*

Beispiel (Flache Tori)**.**
$M_{a,b,c} = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 \mid |u| = a,\ |v| = b,\ w = cuv\} \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$M_{a,b,c}$ flach, kompakt (daher vollständig), symmetrisch, nicht einfach zusammenhängend.

Beispiel. *$M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ symmetrisch.*
$p = (1, 0, \ldots, 0)$, $\varphi(x) = (x_0, -x_1, \ldots, -x_n)$ geodätische Spiegelung.
$\{$Isometrien von $S^n\} = O(n+1)$.

Beispiel. $M^2 \subset \mathbb{R}^4$: *"kein Torus". "Geschlecht" $g = 2$, M kompakt*
$K(p) := \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}$, *Gauss-Krümmung; u,v Basis von T_pM.*
Annahme: $K(p) \equiv konst.$
$\Rightarrow$ *M nicht flach, lokal symmetrisch, (Satz 4.20) vollständig und nicht symmetrisch.*
$\{$*Isometrien von M*$\}$ = *endliche Gruppe* $\Rightarrow$ *nicht homogen.*

Beispiel. $M = G \subset O(n)$ *kompakte Lie Gruppe* $\Longrightarrow$ *M symmetrisch.*
Für $\zeta, \xi, \eta \in Lie(G)$ *gilt:*
$R_g(\xi g, \eta g)\zeta g = -\frac{1}{4}[[\xi, \eta], \zeta]g$
$\langle R_g(\xi g, \eta g)\eta g, \xi g\rangle = \frac{1}{4}|[\xi, \eta]|^2$
$\langle \xi g, \eta g\rangle = Spur(\xi^T \eta)$.

4.8 Konstante Krümmung

Definition. *Sei $E \subset T_pM$ ein 2-dimensionaler linearer Unterraum. Die* ***Schnittkrümmung*** *von M an der Stelle (p,E) ist definiert durch*

$$K(p, E) := \frac{\langle R_p(u, v)v, u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2},$$

wobei u, v eine Basis von E bilden.
Wir sagen, M hat konstante Krümmung $k \in \mathbb{R}$, wenn $K(p, E) = k$, $\forall p \in M$, $\forall E \subset T_pM$ mit $\dim E = 2$.

Übung. Die Zahl $K(p, E)$ hängt nicht von der Wahl der Basis u, v ab.

Satz 4.25. *$M^m \subset \mathbb{R}^n$ m-Mannigfaltigkeit, $k \in \mathbb{R}$. Äquivalent sind:*

1. *M hat konstante Krümmung k;*
2. $\forall p \in M$ $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_pM$ *gilt:*
   $\langle R_p(v_1, v_2)v_3, v_4\rangle = k(\langle v_1, v_4\rangle\langle v_2, v_3\rangle - \langle v_1, v_3\rangle\langle v_2, v_4\rangle)$.

Beweis.

2. $\Rightarrow$ 1. :
$v_1 = v_4 = u$, $v_2 = v_3 = v$, $K(p; E) = k \quad \forall p, E$.

1. $\Rightarrow$ 2. :
Definiere

$$Q(v_1, v_2, v_3, v_4) := \langle R_p(v_1, v_2)v_3, v_4\rangle - k\langle v_1, v_4\rangle\langle v_2, v_3\rangle + k\langle v_1, v_3\rangle\langle v_2, v_4\rangle.$$

Es folgt:
$$Q(v_1, v_2, v_3, v_4) = Q(v_3, v_4, v_1, v_2) \tag{32}$$

$$Q(v_1,v_2,v_3,v_4) = -Q(v_2,v_1,v_3,v_4) \tag{33}$$
$$Q(v_1,v_2,v_3,v_4) + Q(v_2,v_3,v_1,v_4) + Q(v_3,v_1,v_2,v_4) = 0 \tag{34}$$
$$Q(u,v,u,v) = 0 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 0 \overset{(35)}{=} Q(u, v_1+v_2, u, v_1+v_2) = Q(u,v_1,u,v_2) + Q(u,v_2,u,v_1) \overset{(32)}{=} 2Q(u,v_1,u,v_2)\\
&\Rightarrow\ 0 = Q(u_1+u_2, v_1, u_1+u_2, v_2) = Q(u_1,v_1,u_2,v_2) + Q(u_2,v_1,u_1,v_2)\\
&\Rightarrow\ Q(v_1,v_2,v_3,v_4) = -Q(v_3,v_2,v_1,v_4) \overset{(33)}{=} Q(v_2,v_3,v_1,v_4) \overset{(34)}{=}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad = -Q(v_1,v_2,v_3,v_4) - Q(v_3,v_1,v_2,v_4)\\
&\Rightarrow\ Q(v_1,v_2,v_3,v_4) = -\tfrac{1}{2}Q(v_3,v_1,v_2,v_4) \overset{(33)}{=} \tfrac{1}{2}Q(v_1,v_3,v_2,v_4) = \tfrac{1}{4}Q(v_1,v_2,v_3,v_4)\\
&\Rightarrow\ Q = 0.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *M, M' m-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung k*
$\overset{\text{Satz 4.25}}{\Longrightarrow}$ jeder orthogonale Isomorphismus $\Phi : T_pM \to T_{p'}M'$ erfüllt $\Phi^* R'_{p'} = R_p$.

Korollar 4.26. *M, M' m-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung k, $p \in M$, $p' \in M'$ $\Longrightarrow$ für $r > 0$ hinreichend klein $\exists$ eine Isometrie $\varphi : U_r(p, M) \to U_r(p', M')$.*

Beweis. Satz 4.16 (C.A.H. lokal). □

Korollar 4.27. *M, M' zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige m-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung $k \Longrightarrow \exists$ eine Isometrie $\varphi : M \to M'$.*

Korollar 4.28. *M zusammenhängend, einfach zusammenhängend, vollständig. Dann sind äquivalent:*

1. *M hat konstante Krümmung;*
2. *$\forall p, q \in M$, $\forall\, \Phi : T_pM \to T_qM$ orthogonaler Isomorphismus, existiert eine Isometrie $\varphi : M \to M$ so, dass $\varphi(p) = q$, $d\varphi(p) = \Phi$.*

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2. :
    Satz 4.14.

2. $\Rightarrow$ 1. :
    $p_0, p_1 \in M$, $E_0 \subset T_{p_0}M$, $E_1 \subset T_{p_1}M$.
    Wähle einen orthogonalen Isomorphismus $\Phi_0 : T_{p_0}M \to T_{p_1}M$, so dass $\Phi_0 E_0 = E_1$
    $\overset{2.}{\Rightarrow} \exists$ Isometrie $\varphi : M \to M$ so, dass $\varphi(p_0) = p_1$, $d\varphi(p_0) = \Phi_0$
    $\Rightarrow\ \Phi_0^* R_{p_1} = R_{p_0}$
    $\Rightarrow\ K(p_0, E_0) = K(p_1, \Phi_0 E_0) = K(p_1, E_1)$.

□

Beispiel.
$$\left.\begin{array}{lll} k=0 & M \textit{ flach} & \mathbb{R}^m \\ k=1 & m\geq 2 & S^m \\ k=-1 & m \geq 2 & \mathbb{H}^m \end{array}\right\}$$ *Bis auf Isometrie sind* $(\mathbb{R}^m, S^m, \mathbb{H}^m)$ *die einzigen vollständigen, zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden m-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung* $k = (0, 1, -1)$.

Isometrien:
$\mathbb{R}^m: \quad \varphi(x) = Ax + b \quad A \in O(m);$
$S^m: \quad \varphi(x) = Ax \quad A \in O(m+1).$

Geodäten:
$\mathbb{R}^m: \quad \gamma(t) = p + tv;$
$S^m: \quad \gamma(t) = p\cos t + v \sin t \quad v \in T_pS^m,\ |v| = 1.$

Bemerkung. M^m *vollständige, zusammenhängende m-Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung* $k = 1 \Longrightarrow M$ *kompakt.*

Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = r\}$ *hat konstante Krümmung* $k = \frac{1}{r^2}$.

Beispiel. $M = S^m \times S^m$ *symmetrisch, nicht konstante Krümmung.*

4.9 Der hyperbolische Raum $\mathbb{H}^m$

Modell 1: $\mathbb{D}^m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| < 1\}$
Metrik: $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^m = T_y\mathbb{D}^m$:
$\langle \xi, \eta \rangle_y := \frac{4\sum_{i=1}^m \xi^i \eta^i}{(1-|y|^2)^2} = \sum_{i,j} g_{ij}(y)\xi^i\eta^j$

$$g_{ij}(y) = \frac{4\delta_{ij}}{(1-|y|^2)^2} \tag{36}$$

$|\eta|_y = \frac{2|\eta|}{1-|y|^2}$, hyperbolische Metrik.

Modell 2: $x = (x_1, \ldots, x_m) \in M = \mathbb{R}^m$: $\quad |\xi|_x^2 := |\xi|^2 - \frac{\langle x, \xi\rangle^2}{1+|x|^2}$

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{1+|x|^2}. \tag{37}$$

Modell 3: $Q : \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R},\ Q(x,y) := -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_my_m$
$\mathbb{H}^m := \{p \in \mathbb{R}^{m+1} \mid Q(p,p) = -1,\ x_0 > 0\},\ p = (x_0, x_1, \ldots, x_m) = (x_0, x)$
$p \in \mathbb{H}^m \iff -x_0^2 + |x|^2 = -1 \iff x_0^2 = |x|^2 + 1 \iff x_0 = \sqrt{1+|x|^2}$
$\mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^m,\ (x_0, x) \mapsto x$ Diffeomorphismus.

Metrik auf $\mathbb{H}^m$:

$$g_p(v,w) := Q(v,w) \qquad \forall v, w \in T_p\mathbb{H}^m. \tag{38}$$

Übung. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{D}^m$, $\varphi(x) := \frac{\sqrt{1+|x|^2}-1}{|x|^2} x$ ist eine Isometrie bezüglich (36) und (37).

Bemerkung.

1. *$g_p(v,v) > 0, \quad \forall v \in T_p\mathbb{H}^m,\ v \neq 0$;*
2. *Die Projektion $\mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^m$ ist eine Isometrie bezüglich* (37) *und* (38).

Bemerkung. $\{$*Isometrien von* $\mathbb{H}^m\} = O(m,1) =$
$= \{A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \mid Q(Av, Aw) = Q(v,w),\ v_0 > 0 \Rightarrow (Av)_0 > 0\}$.

Bemerkung. *Geodäten:* $\gamma(t) = p\cosh t + v \sinh t, \quad p \in \mathbb{H}^m,\ v \in T_pH^m$.
$Q(p,v) = 0,\ Q(v,v) = 1$.

$\mathbb{H}^m = \{p = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_m^2 = -1,\ x_0 > 0\}$
$T_p\mathbb{H}^m = \{v = (\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) \mid -x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + \cdots + x_m\xi_m = Q(p,v) = 0\}$
$|v|^2 = |\xi|^2 + \xi_0^2 = |\xi|^2 + \frac{\langle x,\xi\rangle^2}{1+|x|^2},\ x_0^2 = 1 + |x|^2,\ \xi_0 = \frac{\langle x,\xi\rangle}{x_0} = \frac{\langle x,\xi\rangle}{\sqrt{1+|x|^2}}$
$|v|_Q^2 := Q(v,v) = |\xi|^2 - |\xi_0|^2 = |\xi|^2 - \frac{\langle x,\xi\rangle^2}{1+|x|^2} = |\xi|_x^2$

Die Projektion $\mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x_0, x) \mapsto x$ ist eine Isometrie bezüglich der obigen Metrik $(Q(v,w))$.

Bemerkung. $\mathbb{H}^m$ *ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend.*

Satz 4.29.

1. *$\mathbb{H}^m$ ist vollständig;*
2. *$\mathbb{H}^m$ hat konstante Krümmung $k = -1$.*

Beweis.

1. $T_p\mathbb{H}^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid Q(p,v) = 0\}$.
   Sei $\Pi(p) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ die Q-orthogonale Projektion auf $T_p\mathbb{H}^m$.
   $\Pi(p)^2 = \Pi(p)$, $\operatorname{im}\Pi(p) = T_p\mathbb{H}^m$, $\ker \Pi(p) \perp_Q \operatorname{im}\Pi(p)$, d.h. $\ker\Pi(p) = \mathbb{R}p$.
   $\Pi(p)w = w + Q(w,p)p$.

   Kovariante Ableitung: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^m$, $X(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^m$.
   $\nabla X(t) = \Pi(\gamma(t))\dot{X}(t) = \dot{X}(t) + Q(\dot{X}(t), \gamma(t))\gamma(t)$.

   Geodäten: $\nabla\dot\gamma \iff \ddot\gamma + Q(\ddot\gamma, \gamma)\gamma = 0$,
   d.h. $\ddot\gamma = \alpha\gamma$, wobei $\alpha := -Q(\ddot\gamma,\gamma)$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^m \;\Rightarrow\; Q(\gamma,\gamma) = -1$.

Ableiten: $0 = \frac{d}{dt}Q(\gamma,\gamma) = 2Q(\gamma,\dot\gamma)$
$0 = \frac{d}{dt}Q(\gamma,\dot\gamma) = Q(\dot\gamma,\dot\gamma) + Q(\gamma,\ddot\gamma) = Q(\dot\gamma,\dot\gamma) + Q(\ddot\gamma,\gamma) = Q(\dot\gamma,\dot\gamma) - \alpha$.

$\Rightarrow\; \alpha = Q(\dot\gamma,\dot\gamma)$
$\Rightarrow\; \dot\alpha = 2Q(\ddot\gamma,\dot\gamma) \overset{\gamma\ Geod.}{=} 2Q(\alpha\gamma,\dot\gamma) = 2\alpha Q(\gamma,\dot\gamma) = 0$.

$\gamma(0) = p \in \mathbb{H}^m$, $\dot\gamma(0) = v \in T_p\mathbb{H}^m$, γ Geodäte
$\Rightarrow\; Q(\dot\gamma,\dot\gamma) \equiv const = Q(v,v) \;\Rightarrow\; \ddot\gamma = Q(v,v)\gamma$.

Annahme: $Q(v,v) = 1 \qquad |v|_Q = \sqrt{Q(v,v)}$
$\Rightarrow\; \gamma(t) = p\cosh t + v\sinh t$
$\Rightarrow\; \mathbb{H}^m$ vollständig
$\exp_p(v) = p\cosh(|v|_Q) + v\frac{\sinh(|v|_Q)}{|v|_Q}$.

Übung. $\exp_p : T_p\mathbb{H}^m \to \mathbb{H}^m$ ist ein Diffeomorphismus $\forall p \in \mathbb{H}^m$ (gilt nicht für S^m).

2. $h_p(v) : T_p\mathbb{H}^m \to (T_p\mathbb{H}^m)^{\perp_Q}$
   $h_p(v)w := (d\Pi(p)v)w = Q(w,v)p + Q(w,p)v = Q(w,v)p$
   mit $Q(w,v)p \in (T_p\mathbb{H}^m)^{\perp_Q}$, $Q(w,p)v \in T_p\mathbb{H}^m$.
   $h_p(v)^* : (T_p\mathbb{H}^m)^{\perp_Q} \to T_p\mathbb{H}^m, \quad (T_p\mathbb{H}^m)^{\perp_Q}$ negatives inneres Produkt
   $h_p(v)^*w = Q(w,p)v, \quad w \perp_Q T_p\mathbb{H}^m$
   $R_p(u,v) = h_p(u)^*h_p(v) - h_p(v)^*h_p(u) \qquad$ (Gauss-Codazzi)
   $\Rightarrow\; \langle R_p(u,v)v,u\rangle = Q(u,v)^2 - Q(u,u)Q(v,v)$
   $\Rightarrow\; K(p,E) = -1$.

$\square$

4.10 Konjugierte Punkte

Definition. *Sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte. $T > 0$ heisst **konjugierter Punkt** von γ, wenn es ein Vektorfeld $X \in \mathrm{Vect}(\gamma)$ gibt, so dass*

$$\nabla^2 X = R(\dot\gamma, X)\dot\gamma,\; X(0) = 0,\; X(T) = 0,\; X \not\equiv 0.$$

Beispiel. $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $\gamma_s(t) = \exp_p(t(v+sw))$, $v(s) := v + sw$.
$X = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s\Big|_{s=0} \;\Rightarrow\; X$ *Jacobi-Vektorfeld* $X(0) = 0$, $\nabla X(0) = w$.

Bemerkung. *Wenn es eine Kurve von Vektoren $v(s) \in T_pM$ gibt, so dass*
$v(0) = v_0$, $\exp_p(v(s)) = q = \exp_p(v_0)\ \forall s$, $\dot v(0) \neq 0$.
Dann: $T = 1$ ist konjugierter Punkt auf der Geodäten $\gamma(t) = \exp_p(tv_0)$.

Lemma 4.30. *Annahme:* $K(p,E) \leq 0 \qquad \forall p\ \forall E$
$\Rightarrow \nexists$ *konjugierte Punkte auf Geodäten.*

Beweis. Sei X per Widerspruch wie in Definition 4.10. Dann $\nabla^2 X + R(X,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ 0 &= \int_0^T \langle \nabla^2 X + R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle dt = \\ &= \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\langle \nabla X, X\rangle - |\nabla X|^2 + \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle\right) dt = \\ &= \int_0^T (\underbrace{-|\nabla X|^2}_{\leq 0} + \underbrace{\langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle}_{\leq 0}) dt\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \nabla X \equiv 0,\ \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle \equiv 0\ \Rightarrow\ X \equiv 0 \Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Satz 4.31. *Seien* $p \in M$, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *Geodäte,* $\gamma(t) = \exp_p(tv) \in T_pM$, $|v| = 1$,
M *vollständig.*
$T := \inf\{t > 0 \mid d(p,\gamma(t)) < t\} > 0$
$T = L(\gamma\big|_{[0,T]})$
T *kein konjugierter Punkt*
$\Rightarrow \exists\, w \in T_pM,\ w \neq Tv$ *so, dass* $\exp_p(w) = \exp_p(Tv) =: q$.

Beweis.

1. Wir zeigen $d\exp_p(Tv) : T_pM \to T_qM$ ist bijektiv.
   Annahme: sei $d\exp_p(Tv)$ nicht injektiv.
   $\Rightarrow \exists\, w \neq 0 :\ d\exp_p(Tv)w = 0$
   $X(t) := \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \exp_p(t(v+sw))$
   $\Rightarrow$ Jacobi Feld: $X(0) = 0$, $\nabla X(0) = w$, $X(T) = 0$
   $\Rightarrow$ T ist konjugierter Punkt. Widerspruch.

2. Wähle $t_k \downarrow T$ so, dass $d(p,\gamma(t_k)) < t_k$.
   Wähle $w_k \in T_pM$ so, dass $\begin{cases} \exp_p(w_k) = \gamma(t_k) = \exp_p(t_k v) \\ |w_k| = d(p,\gamma(t_k)) < t_k = |t_k v| \end{cases}$,
   o.B.d.A. $w_k \to w \in T_pM$.

   $\Rightarrow\ \exp_p(w) := \lim_{k\to\infty} \exp_p(w_k) = \lim_{k\to\infty} \gamma(t_k) = \gamma(T) = q = \exp(Tv)$.

   Behauptung $w \neq Tv$.

   Beweis. (Indirekt) Annahme: $w = Tv$.

   $$\begin{array}{ccccc} w_k & \to & Tv & & \exp_p(w_k) \\ \neq & & & & = \\ t_k v & \to & Tv & & \exp_p(t_k v) \end{array}$$

   Aber $d\exp_p(Tv)$ bijektiv nach 1.
   $\Rightarrow$ Widerspruch zum Satz über Inverse Funktionen (Satz 1.10). $\square$

$\square$