Bachelorarbeit zum Thema:
Das Banach-Tarski-Paradoxon

von Andrea Peter
durchgeführt bei Prof. Dr. R. Pink

Sommersemester 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Axiom 1.0.1 (Das Auswahlaxiom) *Ist A eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von A enthält.*

Bemerkung 1.0.2 Äquivalent dazu ist folgende Formulierung: Ist A eine Menge nichtleerer Mengen, dann gibt es eine Funktion f, die jedem Element B von A ein Element von B zuordnet (das heisst, dass die Funktion "ein Element von B auswählt").

Dass so eine Funktion existiert, ist intuitiv klar, nur können wir sie nicht immer konkret angeben. Dazu können wir uns folgendes überlegen: Wir haben einen unendlich grossen Schrank voller Schuhpaare und wollen von jedem Paar den rechten Schuh. Es ist kein Problem, jeweils den rechten Schuh auszuwählen, denn wir können den rechten vom linken Schuh unterscheiden. Wenn wir jetzt aber eine unendlich grosse Schublade voller Sockenpaare haben, können wir nicht von jedem Sockenpaar den rechten auswählen, denn wir wissen nicht, ob die gewählte Socke die "linke" oder die "rechte" Socke ist, denn die beiden sind ja nicht unterscheidbar. Mit dem Auswahlaxiom können wir nur von jedem Paar eine Socke auswählen. Das Auswahlaxiom sagt uns also nur, dass wir aus jedem Paar eine Socke wählen können, aber es sagt uns nicht, welche Socke gewählt wird.

Kurt Gödel zeigte 1937, dass das Auswahlaxiom keinen Widerspruch ergibt, wenn man die Widerspruchsfreiheit aller übrigen Axiome annimmt. 1963 aber zeigte Paul Cohen, dass auch die Negation (also das"Gegenteil") des Auswahlaxioms nicht zu einem Widerspruch führt. Beide Annahmen sind also vom formalistischen Standpunkt aus akzeptabel. Deshalb wird das Auswahlaxiom von vielen Mathematikern akzeptiert.[1]

Ich habe mich aber schon seit ich das erste Mal vom Auswahlaxiom gehört habe, gefragt, was eigentlich das Problem damit ist. Schliesslich ist die Existenz einer vom Auswahlaxiom postulierten Auswahlfunktion für mich plausibel. Deshalb möchte ich in dieser Arbeit eine der berühmtesten vom Auswahlaxiom resultierenden paradoxen Aussagen behandeln: das Banach-Tarski-Paradoxon.

Theorem 1.0.3 (Das Banach-Tarski-Paradoxon) *Das Banach-Tarski-Paradoxon sagt, dass im euklidischen Raum der Dimension 3 oder grösser je zwei beliebige beschränkte Teilmengen mit nichtleerem Inneren ineinander* *übergeführt werden können, indem man die eine Teilmenge in endlich viele Teile unterteilt und diese Teile dann nur durch Drehen und Verschieben zur zweiten Teilmenge zusammensetzt.*

Diese intuitiv absolut unlogische Aussage lässt sich beweisen, wenn man das Auswahlaxiom als korrekt akzeptiert.

2 Vorbereitung

2.1 Paradoxe Mengen und Gruppen

Definition 2.1.1 (G-kongruent) *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zwei Teilmengen A und B von X heissen* G-kongruent*, falls es ein Element g aus G gibt, so dass gilt $gA = B$.*

Definition 2.1.2 (äquizerlegbar bezüglich $\boldsymbol{G}$) *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien A und B Teilmengen von X. Die Teilmengen A und B heissen* äquizerlegbar bezüglich G*, falls A und B in dieselbe endliche Anzahl disjunkter Teilmengen A_i und B_i zerlegt werden können, so dass jedes A_i zu B_i kongruent ist bezüglich einem Element der Gruppe G.*

Bemerkung 2.1.3 Für die Äquizerlegbarkeitsrelation benutzen wir die Notation $A \sim_G B$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 2.1.4 (Isometrie, $\boldsymbol{G_n}$) *Eine* Isometrie *eines metrischen Raumes ist eine Abbildung, die Abstände erhält. (Eine genauere Erläuterung, wie sich eine isometrische Abbildung darstellen lässt, ist in Bemerkung 7.3.5 zu finden.) Mit G_n bezeichnen wir die Gruppe aller Isometrien auf $\mathbb{R}^n$.*

Das Banach-Tarski-Paradoxon kann demnach folgendermassen formuliert werden:

Theorem 2.1.5 (Starkes Banach-Tarski-Paradoxon) *Sei $n \geq 3$ und seien A und B zwei beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die ein nichtleeres Inneres haben. Dann sind A und B äquizerlegbar bezüglich der Gruppe G_n.*

Um das Banach-Tarski-Paradoxon zu beweisen, werden wir zuerst eine einfachere Aussage beweisen, nämlich, dass man für jedes $r_0 > 0$ den abgeschlossenen Ball $B_{\leq r_0}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r_0\}$ in $\mathbb{R}^n$ in endlich viele Teile unterteilen kann und diese dann durch Drehen und Verschieben zu zwei identischen Bällen $B_{\leq r_0}(x)$ zusammensetzen kann.

Definition 2.1.6 (paradox bezüglich G) *Sei X eine Menge und G eine Gruppe, die auf X operiert. Eine Teilmenge E von X heisst* paradox bezüglich *G, falls sich die Menge E in zwei Teilmengen A und B disjunkt zerlegen lässt, so dass sowohl A als auch B mit E äquizerlegbar sind bezüglich der Gruppe G.*

Bemerkung 2.1.7 Wir sehen leicht ein, dass gilt: eine Menge E ist paradox bezüglich einer Gruppe G genau dann, wenn für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ von E existieren, so dass gilt $E = \bigsqcup A_i \sqcup \bigsqcup B_j$ und $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m$ aus G existieren, so dass gilt $E = \bigsqcup_{i=1}^n g_i A_i$ und $E = \bigsqcup_{j=1}^m h_j B_j$. (Mit $\sqcup$ bezeichnen wir die disjunkte Vereinigung.)

Bemerkung 2.1.8 Wenn wir von einer paradoxen Gruppe G sprechen, meinen wir damit, dass die Gruppe G-paradox ist und beziehen uns auf die Linksmultiplikation als Gruppenoperation.

Proposition 2.1.9 *Seien A und B zwei Mengen, die bezüglich der Gruppe G äquizerlegbar sind. Dann existiert eine bijektive Funktion $g : A \to B$, so dass für jede Teilmenge C von A gilt, dass C äquizerlegbar ist mit $g(C)$.*

Beweis Nach Definition von Äquizerlegbarkeit existieren disjunkte Teilmengen A_i von A und B_i von B, so dass gilt $A = \bigsqcup A_i$ und $B = \bigsqcup B_i$ und es existieren Elemente g_i aus G mit $g_i A_i = B_i$. Damit können wir die Funktion g auf jeder Teilmenge A_i definieren durch $g|A_i = g_i$. Nach Konstruktion gilt nun, dass g bijektiv ist und für jede Teilmenge C von A diese Menge C äquizerlegbar ist mit $g(C)$. $\square$

Proposition 2.1.10 *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien E und E' Teilmengen von X, die äquizerlegbar bezüglich G sind. Dann folgt: ist E paradox bezüglich G, so ist auch E' paradox bezüglich G.*

Beweis Die Menge E ist paradox bezüglich G nach Voraussetzung. Deshalb existieren disjunkte Teilmengen A und B von E, so dass $A \sim_G E$ und $B \sim_G E$. Da E und E' äquizerlegbar bezüglich G sind, folgt aus der Transitivität der G-Äquizerlegbarkeitsrelation auch $A \sim_G E'$ und $B \sim_G E'$. Nach Proposition 2.1.9 existiert eine Bijektion $g : E \to E'$ mit $A \sim_G g(A)$ und $B \sim_G g(B)$. Die Mengen $g(A)$ und $g(B)$ sind wegen der Bijektivität von g disjunkte Teilmengen von E' und es gilt $E' = g(A) \sqcup g(B)$. Wieder mit Transitivität folgt, dass $g(A)$ und $g(B)$ mit E' äquizerlegbar sind bezüglich G . Deshalb ist E' ebenfalls paradox bezüglich G. $\square$

Mit dem Begriff der Paradoxie bezüglich einer Gruppe G lässt sich obige Aussage über die Bälle $B_{\leq r}(x)$ mathematisch formulieren:

Theorem 2.1.11 (Banach-Tarski-Paradoxon, schwache Form) *Jeder abgeschlossene Ball* $B_{\leq r}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *ist für* $n \geq 3$ *paradox bezüglich der Isometrie-Gruppe* G_n *auf* $\mathbb{R}^n$*.*

2.2 Freie Gruppen von Rang 2

Wichtig für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons ist die Existenz einer nicht-abelschen freien Untergruppe in G_n, falls $n \geq 3$.

Definition 2.2.1 (Freie Gruppe) *Sei* F *ein Gruppe,* X *eine Menge und* σ *eine Abbildung von* X *nach* F*. Dann heisst das Paar* (F, σ) *frei auf* X*, falls für alle Abbildungen* α *von* X *zu einer beliebigen Gruppe* G *ein eindeutiger Homomorphismus* β *von* F *nach* G *existiert, so dass gilt* $\beta\sigma = \alpha$*. Mit anderen Worten, das Diagram*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, dotted, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & G \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man sagt dann auch, dass F *eine freie Gruppe ist mit Erzeugenden* X*.*

Bemerkung 2.2.2 Die Funktion σ ist immer injektiv. (Annahme: es gilt $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$ in X. Sei G mit mindestens zwei Elementen beliebig und α so gewählt, dass $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$. Dann gilt $\beta\sigma(x_1) = \beta\sigma(x_2)$ und somit $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Deshalb muss gelten $x_1 = x_2$, was zu einem Widerspruch zur Annahme führt.) Somit können wir X ersetzen durch das Bild von σ, welches dieselbe Kardinalität hat und X mit σ als Inklusionsabbildung als eine Teilmenge von F betrachten.

Satz 2.2.3 *Sei* X *eine nicht-leere Menge. Dann existiert eine Gruppe* F *und eine Funktion* σ *von* X *nach* F *so dass* (F, σ) *frei ist auf* X*.*

Beweis Vergleiche [2], Seite 244f. $\square$

2.3 Darstellung von Elementen freier Gruppen

Wir wollen nun endliche Sequenzen w von Elementen aus $X \cup X^{-1}$ betrachten, also $w = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_r^{q_r}$, wobei $q_i = \pm 1$ für x_i aus X und $r \geq 0$. Solche Sequenzen nennen wir Wörter. Zwei Wörter werden als gleich angesehen, wenn sie durch Kürzen und/oder Einfügen von Sequenzen der Form xx^{-1} und $x^{-1}x$ ineinander übergeführt werden können. Damit erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge dieser Wörter.

Definition 2.3.1 (Reduziertes Wort) *Ein Wort heisst* reduziertes Wort*, falls es keine Sequenzen xx^{-1} und $x^{-1}x$ mehr enthält.*

Jede Äquivalenzklasse von Wörtern enthält einen eindeutigen reduzierten Repräsentanten. (Vergleiche [2], Seite 246f) Wir unterscheiden deshalb oft nicht zwischen einem Element aus der Gruppe F und dem zugehörigen reduzierten Repräsentanten der Äquivalenzklasse. Dabei repräsentiert das leere Wort die Identität $\{e\}$ aus F. Für die Gruppenoperation in F nehmen wir das Aneinanderreihen von Wörtern. Diese Operation ist wohldefiniert.

Definition 2.3.2 (Rang einer freien Gruppe) *Die Kardinalität der Menge X wird* Rang der Gruppe *genannt.*

Bemerkung 2.3.3 Der Rang einer freien Gruppe F ist wohldefiniert im folgenden Sinne: sind X und Y zwei Mengen und $\sigma : X \to F$ und $\tau : Y \to F$ zwei Abbildungen, so dass (F, σ) frei auf X und (F, τ) frei auf Y ist, so haben X und Y dieselbe Kardinalität.

2.4 Eine Eigenschaft freier Gruppen von Rang 2

Theorem 2.4.1 *Jede freie Gruppe F vom Rang 2 ist paradox.*

Beweis Seien τ und σ freie Erzeugende von F. Sei c ein Element aus F. Es bezeichne $W(c)$ die Menge aller reduzierten Wörter in F, die mit c beginnen. Wir definieren nun folgende disjunkte Mengen:

$$
\begin{aligned}
&A_1 := W(\tau) \\
&A_2 := W(\tau^{-1}) \\
&B_1 := W(\sigma) \sqcup \{e, \sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \dots\} \\
&B_2 := W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \dots\},
\end{aligned}
$$

sowie $A := A_1 \sqcup A_2$ und $B := B_1 \sqcup B_2$. Die Gruppe F lässt sich nun darstellen als $F = A \sqcup B$. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass sowohl A als auch B äquizerlegbar sind mit F bezüglich der Gruppe F.

Sei dazu x nicht aus A_1 ein reduziertes Wort. Dann ist $\tau^{-1}x \in A_2$ ebenfalls ein reduziertes Wort, da das von links multiplizierte τ^{-1} nicht mit einem τ gekürzt werden kann. Und $x = \tau\tau^{-1}x$ ist enthalten in τA_2.

Umgekehrt sei x nicht aus τA_2 ein reduziertes Wort. Dann ist $\tau\tau^{-1}x \in \tau A_2$ ein reduziertes Wort. Da dies der Annahme, dass x nicht in τA_2 enthalten ist, widerspricht, muss x in A_1 liegen. Es gilt also $F = A_1 \sqcup \tau A_2$.

Weiter sehen wir, dass

$$\sigma(B_2) = \sigma(W(\sigma^{-1})) \setminus \{e, \sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \dots\}$$

gilt. Damit haben wir

$$\begin{aligned} &\underbrace{W(\sigma) \sqcup \{e, \sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \dots\}}_{=B_1} \sqcup \underbrace{\sigma(W(\sigma^{-1})) \setminus \{e, \sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \dots\}}_{=\sigma(B_2)} \\ &= W(\sigma) \sqcup \sigma(W(\sigma^{-1})) = F. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass gilt $F = B_1 \sqcup \sigma B_2$.

Insgesamt haben also gezeigt, dass gilt:

$$A_1 \sqcup \tau A_2 = F = B_1 \sqcup \sigma B_2$$

und damit sind A und B mit F äquizerlegbar und F ist paradox.
Dieser Beweis wurde von [3], Seite 5, Theorem 1.2 und Seite 40f, Theorem 4.7 übernommen. □

2.5 Kriterium für Paradoxie einer Menge

Definition 2.5.1 (Stabilisator) *Der* Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(m)$ *eines Elementes m aus einer Menge M, auf welcher eine Gruppe G operiert, ist die Untergruppe aller g aus G, für welche gilt $gm = m$.*

Definition 2.5.2 (Fixpunktfrei) *Eine Operation heisst* fixpunktfrei*, falls der Stabilisator jedes Elementes die triviale Gruppe ist.*

Theorem 2.5.3 *Sei G eine paradoxe Gruppe, die fixpunktfrei auf einer Menge X operiert. Dann ist X eine G-paradoxe Menge.*

Beweis Mit dem Auswahlaxiom können wir aus jeder Nebenklasse von G in X einen Repräsentanten auswählen. Sei M die Menge dieser Repräsentanten. Es gilt: $X = \bigsqcup_{x \in M} Gx$.
Die Abbildung $\phi : G \to Gx$, $g \mapsto gx$ ist bijektiv für alle x aus M. Surjektivität ist klar, und die Injektivität folgt daraus, dass der Stabilisator jedes

Elementes von M trivial ist, da G fixpunktfrei operiert.
Nach Annahme ist G paradox. Die paradoxe Zerlegung von G liefert eine paradoxe Zerlegung für jede Nebenklasse Gx für x aus M. Um diese zu erhalten, benutzen wir, dass ϕ eine G-äquivariante bijektive Abbildung von G nach Gx ist. Da $X = \bigsqcup_{x \in M} Gx$ ist, haben wir damit eine paradoxe Zerlegung von X gefunden, denn X ist die disjunkte Vereinigung von Mengen, die eine paradoxe Zerlegung besitzen und deshalb ist die Vereinigung der paradoxen Zerlegungen der Nebenklassen Gx eine paradoxe Zerlegung von X.
Die Idee für diesen Beweis ist in [3], Seite 11, Theorem 1.10 zu finden. □

Hier haben wir nun das Auswahlaxiom verwendet. Wir können also die gewünschte paradoxe Zerlegung nur finden, wenn wir annehmen, dass wir die Repräsentanten der Nebenklassen entsprechend unserer Wünsche wählen können. Aber wie wir schon gesehen haben, können wir nicht angeben, welche Repräsentanten wir wählen.

Dieses Theorem ist wichtig für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons. Denn wenn wir eine Gruppe finden, die fixpunktfrei auf einer Menge operiert, dann folgt mit dem Theorem, dass diese Menge paradox ist. Um zu zeigen, dass ein Ball $B_{\leq r}(x)$ paradox ist, müssen wir eine paradoxe Gruppe finden, die fixpunktfrei auf $B_{\leq r}(x)$ operiert.

Korollar 2.5.4 *Sei F eine freie Gruppe vom Rang 2, die fixpunktfrei auf einer Menge X operiert. Dann ist X eine bezüglich F paradoxe Menge.*

Beweis Nach Theorem 2.4.1 ist F paradox. Nun können wir Theorem 2.5.3 auf F anwenden und erhalten die Behauptung. □

Korollar 2.5.5 *Jede Gruppe mit einer paradoxen Untergruppe ist selbst paradox. Insbesondere ist jede Gruppe mit einer freien Untergruppe von Rang 2 paradox.*

Beweis Eine Untergruppe operiert durch Linksmultiplikation fixpunktfrei auf der ganzen Gruppe. Wende Theorem 2.5.3 an. Da nach Theorem 2.4.1 eine freie Untergruppe von Rang 2 paradox ist, folgt auch der zweite Teil. □

3 Einbettung einer freien Untergruppe

Definition 3.0.6 ($SO_3(\mathbb{R})$) *Die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ ist die Gruppe aller orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^3$ mit Determinante +1.*

In diesem Kapitel wollen wir nun eine freie Untergruppe vom Rang 2 in $SO_3(\mathbb{R})$ konstruieren. Daraus können wir dann mit dem zweiten Teil von Korollar 2.5.5 folgern, dass $SO_3(\mathbb{R})$ eine paradoxe Gruppe ist.

Theorem 3.0.7 *Die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ hat eine freie Untergruppe von Rang 2.*

Beweis Dazu betrachten wir die zwei Rotationen ϕ und ρ aus $SO_3(\mathbb{R})$, die im Gegenuhrzeigersinn mit dem Winkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ um die z-Achse beziehungsweise um die x-Achse drehen. In Matrixdarstellung sehen $\phi^{\pm 1}$ und $\psi^{\pm 1}$ wie folgt aus:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sei G die von ϕ und ρ in $SO_3(\mathbb{R})$ erzeugte Untergruppe. Damit diese Gruppe G frei ist, müssen wir zeigen, dass kein nichttriviales reduziertes Wort in $\phi^{\pm 1}$ und $\psi^{\pm 1}$ die Identität in G repräsentiert. Wir können uns darauf beschränken, Wörter mit der Endung $\phi^{\pm 1}$ zu betrachten. Denn wenn wir ein Wort mit $\phi^{\pm 1}$ konjugieren, erhalten wir ein Wort, welches auf $\phi^{\mp 1}$ endet und welches die Identität genau dann repräsentiert, wenn das ursprüngliche Wort dies tut.

Sei nun w ein Wort, das auf $\phi^{\pm 1}$ endet. Wir behaupten, dass $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$ ist, wobei a, b, c ganze Zahlen sind und b nicht durch 3 teilbar ist. Dies lässt sich durch Induktion über die Länge n von w zeigen:

- $n = 1$: Dann gilt $w = \phi^{\pm 1}$ und es lässt sich schnell nachrechnen, dass gilt $w(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$. Und wir sehen, dass $b = \pm 2$ nicht durch 3 teilbar ist.

- Schritt $n-1 \to n$: Sei nun w ein Wort der Form $w = \phi^{\pm 1}w'$ oder $w = \rho^{\pm 1}w'$, wobei $w'(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{n-1}$ und a', b', c' sind nach Induktionsvoraussetzung ganze Zahlen und b' ist nicht durch 3 teilbar.

  Wenn wir nun $w = \phi^{\pm 1}w'$ auf $(1,0,0)$ anwenden, folgt dass $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$ gilt, wobei $a = a' \mp 4b'$, $b = b' \pm 2a'$, $c = 3c'$.

  Für $w = \rho^{\pm 1}w'$ folgt $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$ mit $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$, $c = c' \pm 4b'$.

Da a', b' und c' ganze Zahlen sind, sehen wir, dass auch a, b und c in beiden Fällen ganze Zahlen sein müssen.

Wir müssen nur noch zeigen, dass b nicht durch 3 teilbar ist. Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass b' nicht durch 3 teilbar ist. Nun müssen wir vier Fälle betrachten: w kann von der Form $\phi^{\pm1}\rho^{\pm1}v$, $\rho^{\pm1}\phi^{\pm1}v$, $\phi^{\pm1}\phi^{\pm1}v$ oder $\rho^{\pm1}\rho^{\pm1}v$ sein.

Im ersten Fall sei $v(1,0,0) = (a'', b''\sqrt{2}, c'')/3^{n-2}$. Wenn wir $\rho^{\pm1}$ darauf anwenden erhalten wir $\rho^{\pm1}v(1,0,0) = (3a'', (b'' \mp 2c'')\sqrt{2}, \pm4b'' + c'')/3^{n-1} = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{n-1}$. Mit obiger Notation gilt $\phi^{\pm1}\rho^{\pm1}v(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$, wobei $b = b' \pm 2a'$. Es gilt $a' = 3a''$, womit a' durch 3 teilbar ist und da b' nach Voraussetzung nicht durch 3 teilbar ist, kann $b = b' \pm 2a'$ auch nicht durch 3 teilbar sein.

Im zweiten Fall sei wieder $v(1,0,0) = (a'', b''\sqrt{2}, c'')/3^{n-2}$. Durch Anwenden von $\phi^{\pm1}$ erhalten wir $\phi^{\pm1}v(1,0,0) = (a'' \mp 4b'', (\pm2a'' + b'')\sqrt{2}, 3c'')/3^{n-1} = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{n-1}$. Wir sehen, dass gilt $c' = 3c''$ und von oben wissen wir, dass gilt $\rho^{\pm1}\phi^{\pm1}v(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$, wobei $b = b' \mp 2c'$. Da c' durch 3 teilbar ist, b' aber nicht, folgt, dass b auch nicht durch 3 teilbar ist.

Im dritten Fall erhalten wir $\phi^{\pm1}\phi^{\pm1}v(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$. Und mit den obigen Formeln für a' und b' folgt $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2\underbrace{(a'' \mp 4b'')}_{a'} = b' \pm 2a'' - 8b'' = b' + \underbrace{b'' \pm 2a''}_{b'} - 9b'' = 2b' - 9b''$. Nach Voraussetzung ist b' nicht durch 3 teilbar, also auch nicht b.

Im letzten Fall gilt wieder $\rho^{\pm1}\rho^{\pm1}v(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^n$. Und wieder mit den schon erhaltenen Formeln haben wir $b = b' \mp 2c' = b' \mp 2\underbrace{(c'' \pm 4b'')}_{c'} = b' \mp 2c'' - 8b'' = b' + \underbrace{b'' \mp 2c''}_{b'} - 9b'' = 2b' - 9b''$. Und da wieder b' nicht durch 3 teilbar ist, ist auch hier b nicht durch 3 teilbar.

Wir nehmen nun an, dass w ein nichttriviales reduziertes Wort ist, das auf $\phi^{\pm1}$ endet und die Identität in G repräsentiert. Deshalb muss gelten $w(1,0,0) = (1,0,0)$. Dies widerspricht jedoch der obigen Behauptung, da $b = 0$ durch 3 teilbar ist. Deshalb ist kein nichttriviales reduziertes Wort äquivalent zum leeren Wort und damit ist die Gruppe G frei. Die Rotationen ϕ und ρ sind die Erzeugenden der Gruppe, deshalb hat sie Rang 2.
Diese Beweisidee wurde von [3], Seite 15f, Theorem 2.1 übernommen. □

4 Das Hausdorff-Paradoxon

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass S^2 paradox ist bezüglich der Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$. Nach Theorem 2.5.3 genügt es, eine paradoxe Gruppe zu finden, die fixpunktfrei auf S^2 operiert. Nach Theorem 3.0.7 und Korollar 2.5.5 ist $SO_3(\mathbb{R})$ eine paradoxe Gruppe. Aber die Elemente von $SO_3(\mathbb{R})$ fixieren die Punkte in $\mathbb{R}^3$, die auf ihrer Rotationsachse liegen; die Gruppe operiert also nicht fixpunktfrei und darum lässt sich Theorem 2.5.3 nicht direkt auf S^2 anwenden. Wir erhalten aber immerhin folgendes Theorem:

Theorem 4.0.8 (Das Hausdorff-Paradoxon) *Es existiert eine abzählbare Teilmenge D von S^2 so dass $S^2 \setminus D$ eine $SO_3(\mathbb{R})$-paradoxe Menge ist.*

Beweis Sei G die paradoxe Untergruppe von $SO_3(\mathbb{R})$, die wir in Theorem 3.0.7 konstruiert haben. Auf S^2 hat jede von der Identität verschiedene Rotation aus G genau zwei Fixpunkte, nämlich die Schnittpunkte der Rotationsachse mit S^2. Sei D die Menge aller solcher Fixpunkte. Da G abzählbar ist, ist auch D abzählbar.
Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Stab}_G(P) = 1$ ist für jeden Punkt P aus $S^2 \setminus D$. Da P nach Definition kein Fixpunkt eines Elementes aus G ist, existiert kein nichttriviales Element g aus G mit $gP = P$ und somit gilt $\mathrm{Stab}_G(P) = 1$. Wir haben gezeigt, dass G auf $S^2 \setminus D$ fixpunktfrei operiert und können nun Theorem 2.5.3 anwenden.
Diese Beweisidee wurde von [3], Seite 18, Theorem 2.3 übernommen. □

Dies ist der Teil des Beweises des Banach-Tarski-Paradoxons, wo das Auswahlaxiom ins Spiel kommt.

5 Der Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons

Theorem 5.0.9 *Sei D eine abzählbare Teilmenge von S^2. Dann sind S^2 und $S^2 \setminus D$ äquizerlegbar bezüglich der Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$.*

Beweis Sei ℓ eine Gerade durch den Ursprung, die D nicht trifft. Definiere $A := \{\theta \in \mathbb{R} : \rho(P) \in D$ für $P \in D, n > 0$ und ρ die Rotation um ℓ mit dem Winkel $n\theta\}$. Weil die Menge A abzählbar ist (da D abzählbar ist), können wir $\theta \notin A$ wählen. Sei ρ die Rotation um die Gerade ℓ mit dem Winkel θ.
Es folgt, dass $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ für $n > 0$, da nach Wahl von θ für alle P aus D gilt: $\rho^n(P)$ nicht in D. Für alle m strikt kleiner als n gilt also $\rho^{n-m}(D) \cap D = \emptyset$, dies ist äquivalent zu $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$. Wir haben gezeigt, dass die Mengen $D, \rho(D), \rho^2(D), \cdots$ paarweise disjunkt sind.

Definiere $\bar{D} = \bigsqcup\{\rho^n(D) : n = 0, 1, 2, ...\}$. Wir können S^2 schreiben als $\bar{D} \sqcup (S^2 \setminus \bar{D})$. Die Menge $S^2 \setminus D$ lässt sich ausdrücken als $\rho(\bar{D}) \sqcup (S^2 \setminus \bar{D})$. (Denn es gilt $\rho(\bar{D}) = \bigsqcup\{\rho^n(D) : n = 1, 2, ...\}$) Die Rotation ρ ist ein Element aus $SO_3(\mathbb{R})$ und da $\bar{D}$ und $\rho(\bar{D})$ kongruent sind bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$, und $(S^2 \setminus \bar{D})$ zu sich selbst $SO_3(\mathbb{R})$-kongruent ist, sehen wir, dass $S^2 = \bar{D} \sqcup (S^2 \setminus \bar{D}) \sim_{SO_3(\mathbb{R})} \rho(\bar{D}) \sqcup (S^2 \setminus \bar{D}) = S^2 \setminus D$.
Diese Beweisidee wurde aus [3], Seite 27, Theorem 3.9 übernommen. $\square$

5.1 Der Beweis des schwachen Banach-Tarski-Paradoxons

Theorem 5.1.1 *Die Sphäre S^2 ist $SO_3(\mathbb{R})$-paradox.*

Beweis Nach Theorem 4.0.8 ist $S^2 \setminus D$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ für eine abzählbare Menge D von Fixpunkten von Rotationen. Wegen Theorem 5.0.9 sind S^2 und $S^2 \setminus D$ äquizerlegbar bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$. Wir benutzen jetzt Proposition 2.1.10 (dafür setzen wir $E' = S^2$ und $E = S^2 \setminus D$) und wir erhalten, dass S^2 paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ ist.
Diese Beweisidee wurde aus [3], Seite 27, Korollar 3.10 (erster Teil) übernommen. $\square$

Bemerkung 5.1.2 Da wir keine Vorschriften an den Radius der Sphäre gemacht haben, gilt dieses Theorem auch für Sphären mit beliebigem Radius.

Theorem 5.1.3 (Schwaches Banach-Tarski-Paradoxon) *Jede abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^3$ ist G_3-paradox.*

Beweis Da G_3 alle Translationen enthält, genügt es, eine Kugel mit Zentrum im Ursprung zu betrachten und da keine Voraussetzungen an den Radius gemacht werden, genügt es, das Theorem anhand der Einheitskugel $B_{\leq 1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| \leq 1\}$, die wir von nun an mit B^3 bezeichnen wollen, zu zeigen.

Wir betrachten nun die Abbildung $\phi : B^3 \setminus \{0\} \to S^2$, die x auf $\frac{x}{|x|}$ abbildet. Die Abbildung ϕ ist äquivariant unter Operationen aus $SO_3(\mathbb{R})$, das heisst, es gilt $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ für jedes ψ aus $SO_3(\mathbb{R})$. Nach Theorem 5.1.1 ist S^2 paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$. Wenn wir nun das Urbild der paradoxen Zerlegung von S^2 unter der Abbildung ϕ betrachten, erhalten wir eine paradoxe Zerlegung für $B^3 \setminus \{0\}$. Da $SO_3(\mathbb{R})$ eine paradoxe Untergruppe von G_3 ist, ist $B^3 \setminus \{0\}$ auch paradox bezüglich G_3.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass B^3 und $B^3 \setminus \{0\}$ äquizerlegbar sind bezüglich G_3. Dazu sei P ein Punkt in $B^3 \setminus \{0\}$ und sei ρ eine Rotation unendlicher Ordnung um eine Achse, die durch P und nicht durch den Ursprung geht. Definiere $D := \{\rho^n(0) : n \geq 0\}$. Wir sehen, dass $\rho(D) = D \setminus \{0\}$

und wir können B^3 und $B^3 \setminus \{0\}$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} B^3 &= (B^3 \cap D) \sqcup (B^3 \cap D^c), \\ B^3 \setminus \{0\} &= ((B^3 \setminus \{0\}) \cap D) \sqcup ((B^3 \setminus \{0\}) \cap D^c) \end{aligned}$$

Es gilt $\rho(B^3 \cap D) = (B^3 \cap D) \setminus \{0\} = (B^3 \setminus \{0\}) \cap D$. Daraus sehen wir, dass die beiden Mengen $B^3 \cap D$ und $(B^3 \setminus \{0\}) \cap D$ kongruent sind. Da $\{0\}$ in D enthalten ist, gilt $B^3 \cap D^c = (B^3 \setminus \{0\}) \cap D^c$. Daraus folgt, dass $B^3 \sim_{G_3} B^3 \setminus \{0\}$. Und weil $B^3 \setminus \{0\}$ paradox ist bezüglich G_3 ist mit Proposition 2.1.10 auch B^3 paradox bezüglich G_3.
Diese Beweisidee wurde aus [3], Seite 27, Korollar 3.10 (zweiter Teil) übernommen. $\square$

Theorem 5.1.4 *Der Raum $\mathbb{R}^3$ ist paradox bezüglich G_3.*

Beweisskizze Betrachten wir die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$, die x auf $\frac{x}{|x|}$ abbildet. Analog zum Beweis von Theorem 5.1.3 erhalten wir aus der paradoxen Zerlegung von S^2 eine paradoxe Zerlegung von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und wie im Fall der Kugel kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim_{G_3} \mathbb{R}^3$ und mit Propostition 2.1.10 ist $\mathbb{R}^3$ paradox bezüglich G_3.
Diese Beweisidee wurde aus [3], Seite 27, Korollar 3.10 (dritter Teil) übernommen. $\square$

5.2 Der Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons

Zur Erinnerung schauen wir uns nochmals die Definition von äquizerlegbaren Mengen an.

Definition 5.2.1 (äquizerlegbar bezüglich G) *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien A und B Teilmengen von X. Die Teilmengen A und B heissen* äquizerlegbar bezüglich G*, falls A und B in dieselbe endliche Anzahl disjunkter Teilmengen A_i und B_i zerlegt werden können, so dass jedes A_i zu B_i kongruent ist bezüglich einem Element der Gruppe G.*

Definition 5.2.2 ($A \preceq B$) *Seien A und B Teilmengen einer Menge X. Sei G eine Gruppe, die auf X operiert. Sei A mit einer Teilmenge von B äquizerlegbar bezüglich der Gruppe G. Dann schreiben wir $A \preceq B$.*

Theorem 5.2.3 (Banach-Schröder-Bernstein) *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien A und B Teilmengen von X. Falls A und B die Bedingungen $A \preceq B$ und $B \preceq A$ erfüllen, dann gilt $A \sim_G B$.*

Beweis Wir werden in diesem Beweis für die Relation $\sim_G$ nur $\sim$ schreiben, da wir uns immer auf dieselbe Gruppe G beziehen.
Wegen der Voraussetzung, dass $A \preceq B$ und $B \preceq A$ gilt, können wir wie in Proposition 2.1.9 zwei Bijektionen f und g definieren mit $f : A \to B_1 \subseteq B$ und $g : B \to A_1 \subseteq A$.

Sei nun $C_0 := A \setminus A_1 = A \setminus g(B)$ und wir definieren für $n > 0$ die Mengen $C_{n+1} := g(f(C_n))$ und definieren die Menge $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Die Menge C ist eine Teilmenge von A, die A_1 nach Konstruktion nicht enthält. Das heisst, es gilt $A \setminus A_1 \subseteq C \subseteq A$.
Wir konstruieren nun folgende Abbildung $h : A \to B$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ g^{-1}(x) & x \notin C \end{cases}$$

Die Abbildung h ist wohldefiniert, denn da C eine Teilmenge von A ist, ist h für alle x aus C definiert. Wenn x nicht aus C ist, dann liegt x in $A_1 = g(B)$ und der entsprechende Funktionswert existiert. Die Abbildung h ist sogar bijektiv. Um dies einzusehen, konstruieren wir uns die Abbildung $k : B \to A$:

$$k(y) = \begin{cases} f(y)^{-1} & y \in f(C) \\ g(y) & y \in g^{-1}(C^c \cap A) \end{cases}$$

Wir sehen schnell ein, dass gilt $k \circ h = id_A$ und $h \circ k = id_B$. Deshalb ist k die Inverse von h und h ist bijektiv.

Wir wollen nun zeigen, dass gilt $A \sim B$. Wegen der Bijektivität von f, g und h gilt:
$g^{-1}(A \setminus C) = h(A \setminus C) = h(A) \setminus h(C) = B \setminus h(C) = B \setminus f(C)$.

Da $A \setminus C$ eine Teilmenge von A ist, gilt nach Proposition 2.1.9, dass $A \setminus C \sim g^{-1}(A \setminus C)$. Somit folgt, dass $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. Wieder aus Proposition 2.1.9 folgt, dass $C \sim f(C)$.

Wir haben also $(A \setminus C) \sqcup C \sim (B \setminus f(C)) \sqcup f(C)$ und deshalb gilt $A \sim B$.
Dieser Beweis wurde aus [3], Seite 25, Theorem 3.5 übernommen. $\square$

Nun haben wir alles beisammen, was wir brauchen, um die allgemeine Form des Banach-Tarski-Paradoxon zu beweisen.

Theorem 5.2.4 (Starkes Banach-Tarski-Paradoxon) *Seien A und B beschränkte Teilmengen des Raumes $\mathbb{R}^3$ mit nichtleerem Inneren. Dann sind A und B äquizerlegbar bezüglich der Gruppe G_3.*

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $A \preceq B$. Aus Symmetrie folgt, dass $B \preceq A$ und nach Theorem 5.2.3 gilt dann $A \sim_{G_3} B$.

Wähle Kugeln K und L, so dass $A \subseteq K$ und $L \subseteq B$. Dies ist möglich, da nach Voraussetzung A beschränkt ist und B ein nichtleeres Inneres hat. Sei nun n gross genug, so dass K von n (sich überlappenden) Translaten von L überdeckt werden kann. Das heisst, es gilt $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, wobei $L_i = g_i(L)$ ist mit g_i aus G_3. Definiere S als eine Menge von n disjunkten Translaten von L, also $S = \sqcup_{i=1}^{n} L'_i$, wobei gilt $L'_i = h_i(L)$ für h_i aus G_3, so dass die Kugeln L'_i disjunkt sind für alle i. Dann gilt $K \preceq S$. Denn wir können K schreiben als $K = \bigcup_{i=1}^{n}(L_i \cap K)$. Die Mengen L_i verkleinern wir nun (und bezeichnen die verkleinerten Mengen wieder mit L_i), so dass gilt $K = \bigsqcup_{i=1}^{n}(L_i \cap K)$. Für die Kongruenz wählen wir f_i aus G_3 so dass $f_i(L_i) = L'_i$. Dann ist K äquizerlegbar mit $\bigsqcup_{i=1}^{n} f_i(L_i \cap K)$. Da $f_i(L_i \cap K) \subseteq L'_i$ folgt, dass gilt $K \preceq S$.

Nun müssen wir noch das schwache Banach-Tarski-Paradoxon (Theorem 5.1.3) auf L anwenden um Translate von L zu konstruieren; dies wiederholen wir so lange, bis wir n Translate von L erhalten haben. (Dazu haben wir nur Operationen aus G_3 benutzt.) Auf diese Translate können wir Translationen aus G_3 anwenden, so dass die Translate auf die Elemente von S verschoben werden, und damit kongruent zu S sind. Somit haben wir bewiesen, dass $S \sim_{G_3} L$.

Schlussendlich gilt: $A \subseteq K \preceq S \sim_{G_3} L \subseteq B$ und damit gilt $A \preceq B$. Diese Beweisidee wurde aus [3], Seite 29, Theorem 3.11 übernommen. □

5.3 Das Banach-Tarski-Paradoxon für n grösser 3

Theorem 5.3.1 *Sei $n \geq 3$. Dann gilt:*

1. *Jede Sphäre in $\mathbb{R}^n$ ist paradox bezüglich ihrer Rotationsgruppe.*
2. *Jeder abgeschlossene n-dimensionale Ball in $\mathbb{R}^n$ ist paradox bezüglich G_n.*
3. *Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist paradox und je zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren sind äquizerlegbar.*

Beweis Der Beweis wird durch Induktion über die Dimension n geführt. Details können in [3] auf Seite 53 nachgelesen werden. □

6 Anwendung im Alltag

Wir haben soeben gezeigt, dass wir in $\mathbb{R}^3$ ein beliebiges beschränktes Objekt mit nichtleerem Inneren zu einem anderen beschränkten Objekt mit nichtleerem Inneren umformen können. Das würde zum Beispiel bedeuten, dass ich ein Brot in endlich viele Stücke zerschneiden kann und diese Stücke dann so zusammensetzen kann, so dass ich genug Brote bekomme, um die Bevölkerung von Afrika zu ernähren.

Ein Brot ist beschränkt und hat ein nichtleeres Inneres. Nach dem starken Banach-Tarski-Theorem (Theorem 5.2.4) würde dies bedeuten, dass es äquizerlegbar ist zu genug Broten, um die Bevölkerung Afrikas zu ernähren. Bedeutet dies, dass von nun an niemand mehr Hunger leiden muss?

Wenn wir das eine Brot unterteilen können und aus den erhaltenen Teilmengen nur mit Operationen, die Abstände (also auch das Volumen) erhalten, genügend Nahrung für die Bevölkerung Afrikas konstruieren können, dann müsste eigentlich die ursprüngliche Menge dasselbe Volumen haben wie die daraus konstruierte Menge. Schliesslich haben wir in keinem Schritt das Volumen einer unserer Teilmengen verändert. Dass dies nicht der Fall ist, wird der Leser einsehen. Wo also liegt das Problem? Um das Volumen unserer Teilmengen zu messen, benutzen wir das Lebesgue-Mass. Damit die Vereinigung der Teilmengen, in die das Brot unterteilt wurde, dasselbe Mass hat wie die Brote, die nötig sind, um die Bevölkerung Afrikas satt zu machen, können nicht alle diese Teilmengen messbar sein. Sonst hätten wir wegen der Translations- und Rotationsinvarianz des Lebesgue-Masses einen Beweis, dass das Banach-Tarski-Paradoxon nicht existiert. Dass Nicht-Lebesgue-messbare Mengen existieren, können wir wieder nur mit dem Auswahlaxiom zeigen. (Auch hier ist das Problem, dass uns das Auswahlaxiom die Existenz garantiert, uns aber keine Anleitung liefert, wie wir die Mengen konstruieren können.) Konkret heisst das, dass wir ein Objekt nur dann durch unterteilen und benutzen von Translationen und Rotationen zu einem beliebigen anderen Objekt zusammensetzen können, wenn in unserer Unterteilung nicht-Lebesgue-messbare Mengen vorkommen. Und weil wir solche Mengen eben nicht konstruieren können, funktioniert das Banach-Tarski-Paradoxon für den täglichen Gebrauch eben doch nicht.

Wenn wir also das Auswahlaxiom akzeptieren, müssen wir die Existenz von paradoxen Tatsachen wie dem Banach-Tarski-Paradoxon in Kauf nehmen. Wenn wir aber das Banach-Tarski-Paradoxon als falsch betrachten, müssen wir zwangsläufig annehmen, dass das Auswahlaxiom nicht gilt. Der Nachteil des zweiten Standpunktes ist, dass wir mathematische Probleme finden, von denen wir weder beweisen können, dass sie zutreffen, noch können wir beweisen, dass das Gegenteil zutrifft. Wir müssen also mit unentscheidbaren Fragen leben. Ich persönlich war bis zu dem Zeitpunkt, wo ich mit dieser Arbeit begonnen habe, eine Befürworterin des Auswahlaxioms. Inzwischen neige ich eher dazu, das Auswahlaxiom abzulehnen.

7 Die Dimensionen 1 und 2

Wir haben bis jetzt gesehen (vorausgesetzt, wir akzeptieren das Auswahlaxiom), dass das Banach-Tarski-Paradoxon für die Dimension 3 oder grösser existiert. Im letzten Teil dieser Arbeit wollen wir uns noch anschauen, warum das Paradoxon in den Räumen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht existiert.

7.1 Masse auf Booleschen Algebren

Definition 7.1.1 (Boolesche Algebra) *Eine* Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ *ist eine nichtleere Menge zusammen mit drei Operationen* $a \vee b$, $a \wedge b$ *und* a'. *(Wobei* a *und* b *Elemente aus* $\mathcal{A}$ *sind.) Diese Operationen müssen folgenden Axiomen genügen:*

1. *Die Operationen* $\vee$ *und* $\wedge$ *sind kommutativ und assoziativ.*
2. $(a \wedge b) \vee b = b$, $(a \vee b) \wedge b = b$
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4. $(a \wedge a') \vee b = b$, $(a \vee a') \wedge b = b$

Bemerkung 7.1.2 Falls eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ mindestens zwei Elemente a und a' enthält, können wir zwei Elemente $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ definieren durch $\mathbf{0} = a \wedge a'$ und $\mathbf{1} = a \vee a'$. Falls $\mathcal{A}$ aus nur einem Element besteht, können wir die beiden Elemente mit $a = a'$ konstruieren und dann gilt $\mathbf{0 = 1}$.
Das *Komplement* von $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a \wedge b'}$, wird mit $\boldsymbol{a - b}$ bezeichnet.

Definition 7.1.3 (Boolesche Subalgebra) *Eine nichtleere Teilmenge* $\mathcal{A}_0$ *von* $\mathcal{A}$ *ist eine* Subalgebra *von* $\mathcal{A}$, *falls* $\mathcal{A}_0$ *abgeschlossen ist unter* $\wedge$, $\vee$ *und* $'$.

Definition 7.1.4 (Automorphismus einer Booleschen Algebra) *Ein* Automorphismus einer Booleschen Algebra *ist eine Bijektion* $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, *welche die drei Booleschen Operationen erhält.*

Definition 7.1.5 (Mass auf einer Booleschen Algebra) *Ein* Mass auf einer Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ *ist eine endlich additive Funktion* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *(das heisst* $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ *falls* $a \wedge b = \mathbf{0}$*), so dass gilt* $\mu(\mathbf{0}) = 0$.

Definition 7.1.6 (G-invariantes Mass) *Falls* G *eine Gruppe von Automorphismen auf einer Booleschen Algebra* $\mathcal{A}$ *ist und* μ *ein Mass auf* $\mathcal{A}$, *dann ist* μ G-invariant, *falls gilt* $\mu(g(b)) = \mu(b)$ *für alle* b *aus* $\mathcal{A}$ *und* g *aus* G.

7.2 Mittelbare Gruppen

Bis jetzt haben wir Masse auf Booleschen Algebren definiert. Wie wir gleich sehen werden, können wir auch für Gruppen Masse definieren.

Definition 7.2.1 (Mass auf einer Gruppe, mittelbar) *Sei G eine Gruppe und μ ein endlich additives Mass auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$. Falls gilt $\mu(G) = 1$ und falls μ linksinvariant ist (das heisst, es gilt $\mu(gA) = \mu(A)$ für alle g aus G und alle Teilmengen A von G), dann nennen wir μ ein* Mass auf G*. Eine Gruppe, für die ein solches Mass μ existiert, nennen wir* mittelbar.

Bemerkung 7.2.2 Falls G bezüglich der Linksmultiplikation eine paradoxe Gruppe ist, dann kann G nicht mittelbar sein. Denn falls ein Mass μ auf G existieren würde, dann müsste wegen der Paradoxie von G gelten $\mu(G) = 2\mu(G)$, was im Widerspruch steht zu der Eigenschaft $\mu(G) = 1$.

Proposition 7.2.3 *Die abelsche Gruppe* $(\mathbb{Z}, +)$ *ist mittelbar.*

Beweisskizze Wir konstruieren uns für ein beliebiges $\epsilon > 0$ eine Funktion μ_ϵ von $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ nach $[0, 1]$, für die gilt

- $\mu_\epsilon(\mathbb{Z}) = 1$
- μ_ϵ ist ein endlich additives Mass
- $|\mu_\epsilon(1(A)) - \mu_\epsilon(A)| < \epsilon$ für jede Teilmenge A von $\mathbb{Z}$

Dazu wählen wir N so gross, dass gilt $\frac{2}{N} \leq \epsilon$. Nun definieren wir für jede Teilmenge A von $\mathbb{Z}$ das Mass $\mu_\epsilon(A) := \frac{1}{N} \cdot |\{i : 1 \leq i \leq N \text{ und } i \in A\}|$. (Wir sehen sofort ein, dass dies ein Mass ist.) Damit ist $|\mu_\epsilon(1(A)) - \mu_\epsilon(A)| \leq \frac{2}{N} \leq \epsilon$. Dass $\mu_\epsilon(A)$ die ersten beiden Eigenschaften erfüllt, ist klar.

Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{M}_\epsilon$ die Menge der oben definierten Funktionen μ_ϵ. Die Mengen $\mathcal{M}_\epsilon$ sind nichtleer und absteigend nach Konstruktion und ausserdem abgeschlossen. (Die Abgeschlossenheit wird in [3], Seite 126f im Beweis von Theorem 9.1 gezeigt.) Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$ (nach Satz von Tychonoff) ist der Schnitt $\bigcap \mathcal{M}_\epsilon$ nichtleer. Es existiert also eine Funktion μ, die in jedem der $\mathcal{M}_\epsilon$ enthalten ist. Diese Funktion ist linksinvariant für das Element $\{1\}$, das $\mathbb{Z}$ erzeugt, und deshalb auch für alle Elemente aus G. Die Funktion μ ist also das gewünschte Mass auf $\mathbb{Z}$.
Dieser Beweis ist ein Spezialfall des Beweises von Theorem 10.4 (b) aus [3], Seite 149f. $\square$

Definition 7.2.4 (Normalreihe) *Eine endliche Folge von Untergruppen*

$$\mathcal{G} : G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{1\}$$

heisst Normalreihe, *wenn* G_{i+1} *ein Normalteiler von* G_i *ist. Die Gruppen* G_i/G_{i+1} *heissen Faktoren der Normalreihe.*

Definition 7.2.5 (auflösbar) *Eine Gruppe heisst* auflösbar, *falls sie eine Normalreihe besitzt, deren Faktoren alle abelsch sind.*

Wir wollen nun folgende exakte kurze Sequenz von Gruppen betrachten:

$$1 \to N \to G \to H \to 1 \tag{1}$$

Die Gruppe G ist eine Gruppenerweiterung von H durch N.

Proposition 7.2.6 *Die Gruppe* G *aus (1) ist mittelbar, falls die Gruppen* N *und* H *mittelbar sind.*

Beweis Der Beweis dazu ist in [3] in Theorem 10.4 (e) auf Seite 149 zu finden. □

Theorem 7.2.7 *Sei* G *eine auflösbare Gruppe. Dann ist* G *mittelbar.*

Beweisskizze Eine auflösbare Gruppe lässt sich als Erweiterung von abelschen Gruppen durch abelsche Gruppen darstellen. Wegen der Propositon 7.2.6 und der Voraussetzung, dass G auflösbar ist, folgt, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass G abelsch ist.

Eine Gruppe G ist mittelbar genau dann, wenn alle endlich erzeugten Untergruppen mittelbar sind. (Dies folgt aus [3], Theorem 10.4 (f) und der Tatsache, dass G abelsch ist.) Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist. Wegen dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen können wir annehmen, dass G zyklisch ist.

Deshalb ist G entweder isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, für $n \geq 1$ oder zu $\mathbb{Z}$. Wegen Proposition 7.2.3 ist $\mathbb{Z}$ mittelbar. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mittelbar ist. Das gewünschte Mass lässt sich für jede Teilmenge A von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ einfach konstruieren durch $\mu(A) = \frac{1}{n}\cdot$ [Anzahl Elemente von A]. Da G isomorph zu einer mittelbaren Gruppe ist, ist G selbst mittelbar. □

7.3 Auflösbarkeit von Isometriegruppen

In diesem Abschnitt wollen wir die Gruppen G_1 und G_2 etwas genauer betrachten.

Definition 7.3.1 (affin, A_n, T_n, GL_n, O_n, SO_n, SG_n) *Eine Bijektion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst* affin, *falls für alle Punkte P und Q aus $\mathbb{R}^n$ und für alle reellen Zahlen α und β mit $\alpha + \beta = 1$ gilt $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$. Die affinen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$ bilden eine Gruppe, die wir mit A_n bezeichnen.*

Die Menge aller Translationen auf $\mathbb{R}^n$ bilden ebenfalls eine Gruppe, welche wir mit T_n bezeichnen wollen. (Da die Verknüpfung zweier Translationen der Addition von zwei Vektoren entspricht, ist die Gruppe T_n isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{R}^n$.)

Die Gruppe der nichtsingulären linearen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit GL_n.

Mit O_n bezeichnen wir die Menge der orthogonalen Matrizen und mit SO_n bezeichnen wir die orthogonalen Transformationen mit Determinante +1.

Die Menge SG_n ist die Menge der orientierungserhaltenden Elemente aus G_n, das heisst, sie haben Determinante +1.

Theorem 7.3.2 *Sei f ein Element aus der Gruppe der affinen Abbildungen A_n. Dann existieren eindeutig bestimmte Abbildungen τ aus T_n und σ aus GL_n so dass $f = \tau\sigma$.*

Beweis Den Beweis dieses Theorems findet man zum Beispiel in [4] in Kapitel 8. □

Bemerkung 7.3.3 Überdies ist die Abbildung $\pi : A_n \to GL_n$, die definiert wird durch $\pi(f) = \sigma$, ein Gruppenhomomorphismus mit Kern T_n. Da der Kern einer Abbildung eine normale Untergruppe ist, ist also T_n normal in A_n und A_n/T_n ist isomorph zu GL_n.

Theorem 7.3.4 *Jede Isometrie auf $\mathbb{R}^n$ ist affin, das heisst, es gilt $G_n \subseteq A_n$.*

Beweis Diesen Beweis findet man ebenfalls in [4] in Paragraph 9.4. □

Bemerkung 7.3.5 Da $O_n = G_n \cap GL_n$ bildet der Homomorphismus π aus Theorem 7.3.3 die Gruppe G_n in die Gruppe O_n ab und da $T_n \subseteq G_n$ ist T_n eine normale Untergruppe von G_n. (Denn T_n ist der Kern von π.) Daraus sehen wir, dass jede Isometrie eine orthogonale Transformation gefolgt von einer Translation ist.

Theorem 7.3.6 *Die Gruppe G_1 ist auflösbar.*

Beweis Nach Bemerkung 7.3.5 ist $G_1 = \{x \mapsto a \pm x; a \in \mathbb{R}\}$ und die Gruppe G_1 hat folgende Normalreihe:

$$\{1\} \subset T_1 \subset G_1$$

Wieder mit Bemerkung 7.3.5 folgt, dass G_1/T_1 isomorph ist zu O_1. Da $O_1 = \{id; x \mapsto -x\}$ isomorph ist zur abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ist G_1/T_1 abelsch. Wie schon erwähnt ist T_1 isomorph zur abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und deshalb abelsch. Damit ist jeder Faktor der Normalreihe von G_1 abelsch und G_1 ist somit auflösbar. □

Theorem 7.3.7 *Die Gruppe G_2 ist auflösbar.*

Beweis Wir definieren zuerst ρ_θ als die Rotation, die im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel θ um eine Rotationsachse durch den Ursprung dreht. Dann definieren wir ϕ_θ als die Spiegelung an einer Achse, die durch den Ursprung geht und die zur x-Achse im Winkel θ steht.

Dann ist $SO_2 = \{\rho_\theta; 0 \leq \theta < 2\pi\}$ und es ist klar, dass SO_2 abelsch ist. Die Gruppe O_2 lässt sich darstellen als $O_2 = SO_2 \cup \{\phi_\theta; 0 \leq \theta < \pi\}$. Für G_2 haben wir die Normalreihe:

$$\{1\} \subset T_2 \subset SG_2 \subset G_2$$

Die Gruppe T_2 ist der Kern der Abbildung $\pi : SG_2 \to SO_2$. Deshalb ist T_2 abelsch und SG_2/T_2 ist isomorph zu SO_2. Die Gruppe G_2/SG_2 ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und somit abelsch. Wir haben also gesehen, dass alle Faktoren abelsch sind und damit ist die Gruppe G_2 auflösbar.
Die Beweisidee wurde von [3], Appendix A übernommen. □

7.4 Nichtexistenz des Paradoxons

Wir wollen nun zeigen, dass das Banach-Tarski-Paradoxon in den Dimensionen 1 und 2 nicht existiert. Dazu müssen wir ein Mass konstruieren, das auf allen Teilmengen des Raumes, auf dem es konstruiert wurde, definiert ist. (Wir haben ja im Kapitel 6 gesehen, dass wir die Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen voraussetzen müssen, um die gewünschte paradoxe Zerlegung zu erhalten.)

Theorem 7.4.1 (Mass-Erweiterungstheorem) *Sei $\mathcal{A}_0$ eine Boolesche Subalgebra der Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ und μ ein Mass auf $\mathcal{A}_0$. Dann existiert ein Mass $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}$, das μ erweitert.*

Beweis Dieser Beweis wird zuerst unter der Annahme, dass $\mathcal{A}$ endlich ist, geführt und mit einem Kompaktheitsargument auf unendliche Boolesche Algebren erweitert. Details können in [3] auf Seite 153f, Theorem 10.7 nachgelesen werden. $\square$

Theorem 7.4.2 (Invariantes Erweiterungs-Theorem) *Sei G eine mittelbare Gruppe von Automorphismen auf einer Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{A}_0$ eine G-invariante Boolesche Subalgebra von $\mathcal{A}$. Falls in Theorem 7.4.1 μ ein G-invariantes Mass auf $\mathcal{A}_0$ ist, dann kann $\bar{\mu}$ ebenfalls G-invariant gewählt werden.*

Beweis Wir benutzen Theorem 7.4.1 um ein Mass ν auf $\mathcal{A}$ zu erhalten, das μ erweitert. Da G eine mittelbare Gruppe ist, existiert ein Mass θ auf G. Für b aus $\mathcal{A}$ definieren wir $f_b : G \to \mathbb{R}$ durch $f_b(g) = \nu(g^{-1}(b))$. Dann definieren wir das Mass $\bar{\mu}$ wie folgt:

$$\bar{\mu}(b) = \begin{cases} \int f_b d\theta & \text{falls } f_b \text{ beschränkt ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei wird das Integral über die beschränkte Funktion f_b wie in der Masstheorie üblich definiert. (Wir betrachten den Massraum $(G, \mathcal{P}(G), \theta)$ und konstruieren das Integral zuerst für Treppenfunktionen und können diese Konstruktion dann via Grenzwerte auf messbare Funktionen ausdehnen.)

Wir wollen nun zeigen, dass $\bar{\mu}$ ein Mass ist:

- Da ν ein Mass ist, nimmt f_b nur positive Werte an und deshalb liegt $\bar{\mu}(b)$ im Intervall $[0, \infty]$. Also ist $\bar{\mu}$ eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $[0, \infty]$.

- Seien a und b zwei Elemente aus $\mathcal{A}$ mit $a \wedge b = \mathbf{0}$ und sei $f_{a\vee b}$ beschränkt. Es gilt $\bar{\mu}(a \vee b) = \int f_{a\vee b} d\theta$, wobei $f_{a\vee b}(g) = \nu(g^{-1}(a \vee b)) = \nu(g^{-1}(a)) + \nu(g^{-1}(b)) = f_a(g) + f_b(g)$, da ν eine Mass ist. Und deshalb gilt $\bar{\mu}(a \vee b) = \bar{\mu}(a) + \bar{\mu}(b)$ für $f_{a\vee b}$ beschränkt. Falls $f_{a\vee b}$ unbeschränkt ist, dann gilt, dass entweder f_a oder f_b oder beide unbeschränkt sein müssen und die Behauptung folgt.

- Es gilt $\bar{\mu}(\mathbf{0}) = \int f_{\mathbf{0}} d\theta$, wobei $f_{\mathbf{0}} = \nu(g^{-1}(\mathbf{0})) = \nu(\mathbf{0}) = 0$, da ν ein Mass ist und $\mathbf{0}$ ein Element der G-invarianten Booleschen Subalgebra $\mathcal{A}_0$ ist.

Somit ist $\bar{\mu}$ ein Mass.

Wir behaupten nun, dass $\bar{\mu}$ ein G-invariantes Mass ist. Sei dazu g aus G beliebig und b aus $\mathcal{A}$ zunächst so gewählt, dass $\bar{\mu}(b) < \infty$. Weiter sei g' ebenfalls aus G. Es gilt $\bar{\mu}(g(b)) = \int f_{g(b)} d\theta$ und $f_{g(b)}(g') = \nu((g')^{-1} g(b)) =$

$\nu(g''^{-1}(b)) = f_b(g'')$ für $g''^{-1} := g'^{-1}g$ aus G. Deshalb ist $\int f_{g(b)} d\theta = \int f_b d\theta$ und $\bar{\mu}(g(b)) = \bar{\mu}(b)$ für ein b so dass f_b beschränkt ist.

Sei nun b so gewählt, dass f_b unbeschränkt ist und sei g aus G. Dann wird $\bar{\mu}(g(b))$ wieder unbeschränkt sein, denn für mindestens ein g' aus G wird $f_{g(b)}(g')$ unbeschränkt.

Wir haben also gezeigt, dass gilt $\bar{\mu}(g(b)) = \bar{\mu}(b)$ für beliebiges b und damit ist $\bar{\mu}$ ein G-invariantes Mass.

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass $\bar{\mu}$ das Mass μ erweitert. Sei nun b ein Element aus der Subalgebra $\mathcal{A}_0$. Es gilt $f_b(g) = \nu(g^{-1}(b)) = \nu(b)$, da $\mathcal{A}_0$ nach Voraussetzung G-invariant ist. Damit ist f_b von g unabhängig und es gilt $\bar{\mu}(b) = \int f_b d\theta = \int \nu(b) d\theta = \nu(b) \cdot \theta(G) = \nu(b)$, denn da G mittelbar ist, gilt $\theta(G) = 1$. Daraus sehen wir, dass das G-invariante Mass $\bar{\mu}$ das ebenfalls G-invariante Mass μ tatsächlich erweitert. Die Grundidee dieses Beweises wurde aus [3] von Seite 155, Theorem 10.8 übernommen. □

Korollar 7.4.3 *Sei G eine mittelbare Gruppe von Isometrien auf $\mathbb{R}^n$ (oder S^n). Dann existiert eine endlich additive, G-invariante Erweiterung des Lebesgue-Masses, λ, die auf allen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (oder S^n) definiert ist.*

Beweis Setze $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und definiere $\mathcal{A}_0$ als die Subalgebra der Lebesgue-messbaren Mengen aus $\mathbb{R}^n$. Schliesslich nehmen wir für μ das Lebesgue-Mass. Dieses ist G-invariant, da es Isometrie-invariant ist. Jetzt können wir Theorem 7.4.2 darauf anwenden und erhalten das gewünschte Mass λ.
Dieser Beweis wurde aus [3] von Seite 156, Korollar 10.9 (erster Teil) übernommen. □

Korollar 7.4.4 *Das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ hat eine Isometrieinvariante, endlich additive Erweiterung, die auf allen Teilmengen definiert ist.*

Beweis Die Gruppen G_1 und G_2 sind auflösbar nach den Theoremen 7.3.6 und 7.3.7. Mit Theorem 7.2.7 folgt, dass G_1 und G_2 mittelbar sind. Jetzt können wir Korollar 7.4.3 anwenden und erhalten die gewünschten Masse. □

Korollar 7.4.5 *Sei G eine mittelbare Isometriegruppe auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist keine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die ein nichtleeres Inneres hat, paradox bezüglich G. Im Speziellen ist keine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Innern paradox.*

Beweis Mit Korollar 7.4.3 erhalten wir ein Mass μ, welches eine G-invariante, endlich additive Erweiterung des Lebesgue-Masses ist und das auf allen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Für eine beschränkte Menge A mit nichtleerem Innern gilt $0 < \mu(A) < \infty$. Denn da A ein nichtleeres Inneres hat, enthält

A eine offene nichtleere Menge A_0. Offene nichtleere Mengen sind immer Lebesgue-messbar und ihr Mass ist grösser 0. Wegen der Monotonie von Massen gilt $0 < \mu(A_0) \leq \mu(A)$. Da A beschränkt ist, ist A enthalten in einer abgeschlossenen und beschränkten Menge A^1. Abgeschlossene Mengen sind immer messbar. Nach Heine-Borel (vergleiche Analysis-Bücher) ist A^1 kompakt (da A^1 abgeschlossen und beschränkt ist) und kompakte Mengen haben immer ein endliches Lebesgue-Mass. Wieder mit der Monotonie von Massen folgt, dass $\mu(A) \leq \mu(A^1) < \infty$.

Wenn A eine bezüglich G paradoxe Menge wäre, müsste gelten $\mu(A) = 2\mu(A)$, was zu einem Widerspruch zu $0 < \mu(A) < \infty$ führt.

Im Fall von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ existieren mittelbare Isometriegruppen (wie wir im Beweis von Korollar 7.4.4 gezeigt haben) und wir können das Korollar 7.4.5 anwenden.
Dieser Beweis wurde aus [3] von Seite 156, Korollar 10.10 übernommen. □

In Korollar 7.4.5 haben wir also gesehen, dass in den Räumen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ keine beschränkte Menge mit nichtleerem Innern paradox bezüglich G_n sein kann. Damit sehen wir ein, dass das Banach-Tarski-Paradoxon in den Dimensionen 1 und 2 nicht existieren kann.

Literatur

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom

[2] Derek J.S. Robinson: *An Introduction To Abstract Algebra*, de Gruyter Textbook, 2003

[3] S. Wagon: *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1993

[4] M. Hausner: *A Vector Space Approach to Geometry*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965