# Darstellungstheorie von $\mathbf{S_m}$ und $\mathbf{GL_n}$

Bachelorarbeit

Seraina Wachter

13. Juli 2014

Betreuer: Prof. Richard Pink

Departement Mathematik, ETH Zürich

Diese Bachelorarbeit über die Darstellungstheorie der Gruppen $S_m$ und $GL_n$ beruht, sofern nichts anderes angegeben, auf den Kapiteln 3, 5 und 6 aus der Brandeis Vorlesungsausarbeitung “Classical Invariant Theory - A Primer” von Kraft und Procesi [3]. Zunächst zeigen wir eine Beziehung zwischen gewissen irreduziblen Darstellungen der $S_m$ und gewissen irreduziblen Darstellungen der $GL_n$ auf. Später werden wir zeigen, dass dies die irreduziblen polynomialen Darstellungen der $GL_n$ von Grad $m$ sind. Diese Beziehung wird “Schur-Weyl Dualität” genannt und wurde, wenn auch ursprünglich von Issai Schur entdeckt, erst durch Hermann Weyl's berühmt-berüchtigtes Werk “The Classical Groups, Their Invariants And Representations” bekannt. Danach führen wir Young-Diagramme ein und finden nach ausführlicher Beschäftigung mit Schur- und Newton-Polynomen eine explizite Formel für die irreduziblen Charaktere der $S_m$. Gemeinsam mit der Schur-Weyl Dualität lassen sich somit auch die irreduziblen Charaktere der irreduziblen polynomialen Darstellungen der $GL_n$ berechnen, was sich genau als die Schur-Polynome herausstellt.

Ich danke Herrn Prof. Pink für seine exzellente Betreuung, wobei er meine Arbeit stets begleitet, mir jedoch auch viel Entscheidungsfreiheit gelassen hat. Insbesondere bedanke ich mich für die lehrreichen Diskussionen darüber, wie man eine Arbeit so formuliert, dass sie beim Leser möglichst verständlich ankommt.

# Inhaltsverzeichnis


**1. Schur-Weyl Dualität** **4**
- 1.1. Vorbereitungen . . . . . . . . . . 4
- 1.2. Einfache und halbeinfache Algebren . . . . . . . . . . 7
- 1.3. Schur-Weyl Dualität . . . . . . . . . . 9

**2. Irreduzible Darstellungen von $\mathbf{S_m}$** **14**
- 2.1. Young Diagramme, Schur- und Newton-Polynome . . . . . . . . . . 14
- 2.2. Die irreduziblen Charaktere von $S_m$ . . . . . . . . . . 22

**3. Polynomiale irreduzible Darstellungen von $\mathbf{GL_n}$** **29**

**4. Beispiele** **35**

**A. Anhang** **39**

**Literaturverzeichnis** **40**

# 1. Schur-Weyl Dualität

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Zusammenhang zwischen irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $S_m$ und irreduziblen Darstellungen der $GL_n$ aufzuzeigen, die sogenannte Schur-Weyl Dualität. Zu diesem Zweck betrachten wir die Linksaktionen der beiden Gruppen auf dem $m$-fachen Tensorproduktraum.

Im Folgenden sei $K$ ein unendlicher Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $K$. Des Weiteren seien alle Algebren endlich-dimensional über $K$. Das $m$-fache Tensorprodukt von $V$ über $K$ bezeichnen wir mit $V^{\otimes m} = V \otimes \ldots \otimes V$.

## 1.1. Vorbereitungen

Aufgrund der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukts genügt es, eine lineare Funktion auf $V^{\otimes m}$ auf den reinen Tensoren zu definieren (vgl. Anhang A.1). Sei nun

$$\rho_1 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes m}), \quad g \longmapsto \rho_1(g)$$

die Funktion, die eindeutig bestimmt ist durch

$$\rho_1(g)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_m.$$

Des Weiteren sei

$$\rho_2 : S_m \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes m}), \quad \sigma \longmapsto \rho_2(\sigma)$$

definiert durch

$$\rho_2(\sigma)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}.$$

**Satz 1.1** *Die Funktionen $\rho_1$ und $\rho_2$ sind Darstellungen von $\mathrm{GL}(V)$ respektive $S_m$ auf $V^{\otimes m}$.*

**Beweis-Skizze** Wir wollen prüfen, dass $\rho_2$ tatsächlich ein Homomorphismus ist:

$$\begin{aligned}
\rho_2(\sigma)(\rho_2(\tau)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)) &= \rho_2(\sigma)(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(m)}) \\
&= v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(m))} \\
&= v_{(\sigma\circ\tau)^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{(\sigma\circ\tau)^{-1}(m))} \\
&= \rho_2(\sigma \circ \tau)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit wollen wir anhand eines Beispiels veranschaulichen: Seien $m = 3$ und $\sigma = (12)$ sowie $\tau = (123)$. Dann ist $\sigma \circ \tau = (23)$. Für die inversen Elemente erhalten wir $\sigma^{-1} = (12)$ und $\tau^{-1} = (132)$ sowie $(\sigma \circ \tau)^{-1} = (23)$. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}\rho_2(\sigma)(\rho_2(\tau)(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) &= \rho_2(\sigma)(v_3 \otimes v_1 \otimes v_2)\\ &= v_1 \otimes v_3 \otimes v_2\\ &= \rho_2(\sigma \circ \tau)(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3).\end{aligned}$$

Entscheidend ist, dass hier in der zweiten Gleichheit nicht etwa $v_1$ und $v_2$ vertauscht werden, sondern die Positionen 1 und 2. $\square$

Betrachte die Funktion

$$\rho : S_m \times \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes m}) \quad , \quad (\sigma, g) \mapsto \rho_2(\sigma) \circ \rho_1(g).$$

**Satz 1.2** *Die Funktion $\rho$ definiert eine Darstellung von $S_m \times \mathrm{GL}(V)$ auf $V^{\otimes m}$.*

**Beweis-Skizze** Es gilt:

$$\rho_1(g)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}) = gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes gv_{\sigma^{-1}(m)} = \rho_2(\sigma)(gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_m)$$

Die entsprechenden Aktionen kommutieren also miteinander. $\square$

**Notation 1.3** Der Unterraum $\langle \mathrm{GL}(V) \rangle \subset \mathrm{End}(V^{\otimes m})$ bezeichne das lineare Erzeugnis von $\rho_1(\mathrm{GL}(V))$ und $\langle S_m \rangle \subset \mathrm{End}(V^{\otimes m})$ dasjenige von $\rho_2(S_m)$.

**Notation 1.4** Der Einfachheit halber sei in Zukunft jeweils $g := \rho_1(g)$ und $\sigma := \rho_2(\sigma)$, sofern eine Verwechslung unwahrscheinlich ist.

**Notation 1.5** Den Zentralisator einer Unteralgebra $A \subset \mathrm{End}(W)$ für einen $K$-Vektorraum $W$ bezeichnen wir mit

$$A' := \mathrm{End}_A(W) = \{b \in \mathrm{End}(W) \mid ab = ba \text{ für alle } a \in A\}.$$

**Definition 1.6** *Sei $W$ ein $K$-Vektorraum und $Y \subset W$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $X \subset Y$ heisst* Zariski-dicht *in $Y$, falls*

$$\forall f \in K[W] : \quad f\Big|_X \equiv 0 \Rightarrow f\Big|_Y \equiv 0.$$

**Lemma 1.7** *Sei $W$ ein Vektorraum. Für jedes nicht-verschwindendes Polynom $h \in K[W]$ ist die Menge $W_h := \{w \in W \mid h(w) \neq 0\}$ Zariski-dicht in $W$.*

**Beweis** Sei $f \in K[W]$ eine Funktion, die auf $W_h$ verschwindet. Somit gilt $fh = 0$ auf $W_h$. Nach Definition von $W_h$ ist $h = 0$ auf $W \backslash W_h$ und folglich auch $fh = 0$ auf $W \backslash W_h$. Somit gilt $fh = 0$ auf ganz $W$ und da $h$ nach Annahme nicht null ist, folgt $f \equiv 0$. $\square$

**Proposition 1.8** *Die Teilmenge* $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ *ist Zariski-dicht.*

**Beweis** Sei $W := \mathrm{End}(V)$. Definiere eine Funktion $h \in K[W]$ durch $h(A) := \det(A)$. Beachte, dass $h$ nicht null ist. Ausserdem ist

$$W_h = \{A \in W \mid h(A) \neq 0\} = \{A \in \mathrm{End}(V) \mid \det(A) \neq 0\} = \mathrm{GL}(V).$$

Mit Lemma 1.7 folgt die Behauptung. □

**Lemma 1.9** *Sei $W$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $K$ und $X \subset W$ Zariski-dicht. Bezeichne mit $\Sigma_m := \{a \in W^{\otimes m} \mid \sigma(a) = a$ für alle $\sigma \in S_m\}$ den Unterraum aller symmetrischen Tensoren in $W^{\otimes m}$. Dann gilt*

$$\langle\{x \otimes \ldots \otimes x \mid x \in X\}\rangle = \Sigma_m.$$

**Beweis** "$\subset$": Es gilt $x \otimes \ldots \otimes x \in \Sigma_m$ für alle $x \in X$, folglich auch $\langle\{x \otimes \ldots \otimes x \mid x \in X\}\rangle \subset \Sigma_m$.
"$\supset$": Sei $N := \dim(W)$. Wähle eine Basis $w_1, \ldots, w_N$ von $W$. Betrachte die Basis $B := \{w_{i_1} \otimes \ldots \otimes w_{i_m}\}_{1 \leq i_1 \ldots i_m \leq N}$ von $W^{\otimes m}$. Es gilt

$$\sigma(w_{i_1} \otimes \ldots \otimes w_{i_m}) = w_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma^{-1}(i_m)} \in B \quad \text{für alle } w_{i_1} \otimes \ldots \otimes w_{i_m} \in B.$$

Die Basis $B$ bleibt also unter der Aktion von $S_m$ stabil. Zwei Elemente $w_{i_1} \otimes \ldots \otimes w_{i_m}$ und $w_{j_i} \otimes \ldots \otimes w_{j_m}$ liegen genau dann in derselben Bahn unter der Aktion mit $S_m$, wenn $\sigma(w_{i_1} \otimes \ldots \otimes w_{i_m}) = w_{j_i} \otimes \ldots \otimes w_{j_m}$ für ein $\sigma \in S_m$. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes $w_i$, für $1 \leq i \leq N$, in beiden Ausdrücken gleich oft vorkommt. Folglich hat jede Bahn einen eindeutigen Vertreter der Form $w_1^{\otimes h_1} \otimes w_2^{\otimes h_2} \otimes \ldots \otimes w_N^{\otimes h_N}$ mit $h_1 + \ldots + h_N = m$. Bezeichne mit $r_{h_1,\ldots,h_N} \in W^{\otimes m}$ die Summe aller Elemente der Bahn von $w_1^{\otimes h_1} \otimes w_2^{\otimes h_2} \otimes \ldots \otimes w_N^{\otimes h_N}$, also beispielsweise

$$\begin{aligned} r_{m,0,\ldots,0} &= w_1 \otimes \ldots \otimes w_1 \in W^{\otimes m} \qquad \text{und} \\ r_{m-1,1,0\ldots,0} &= (w_1 \otimes \ldots \otimes w_1 \otimes w_2) + (w_1 \otimes \ldots \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes w_1) + \ldots + (w_2 \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_1). \end{aligned}$$

Da die Aktion von $\sigma$ bloss die einzelnen Summanden in $r_{h_1,\ldots,h_N}$ vertauscht, gilt $\sigma(r_{h_1,\ldots,h_N}) = r_{h_1,\ldots h_N}$ für alle $\sigma \in S_m$. Somit ist $r_{h_1,\ldots h_N} \in \Sigma_m$ und $\{r_{h_1,\ldots,h_N} \mid h_1 + \ldots + h_N = m\}$ ist eine Basis von $\Sigma_m$. Es bleibt zu zeigen, dass jede lineare Funktion $\lambda : \Sigma_m \longrightarrow K$ mit $\lambda\Big|_{\{x\otimes\ldots\otimes x \mid x\in X\}} \equiv 0$ konstant gleich null ist. Sei $\lambda$ so eine Funktion. Definiere ein Polynom $f \in K[W]$ durch $f(w) := \lambda(w \otimes \ldots \otimes w)$. Es gilt $f\Big|_X \equiv 0$ und da $X \subset W$ Zariski-dicht ist, folgt $f \equiv 0$. Sei $w \in W$. Es existieren $a_1, \ldots, a_N \in K$, so dass $w = \sum_{i=1}^N a_i w_i$ ist. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} &\underbrace{w \otimes \ldots \otimes w}_{m \text{ mal}} = (a_1 w_1 + \ldots + a_N w_N) \otimes \ldots \otimes (a_1 w_1 + \ldots + a_N w_N) \\ &= a_1^m \underbrace{w_1^{\otimes m}}_{=r_{m,0,\ldots,0}} + \ldots + \underbrace{a_N^m w_N^{\otimes m}}_{=r_{0,\ldots,0,m}} + a_1^{m-1} a_2 \underbrace{(w_1^{\otimes m-1} \otimes w_2 + \ldots + w_2 \otimes w_1^{\otimes m-1})}_{=r_{m-1,1,0,\ldots,0}} + \ldots \\ &= \sum_{h_1+\ldots+h_N=m} a_1^{h_1} \cdots a_N^{h_N} r_{h_1,\ldots,h_N}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Linearität von $\lambda$ berechnet man

$$\begin{aligned} 0 = f(w) = \lambda(w \otimes \ldots \otimes w) &= \lambda\left(\sum_{h_1+\ldots+h_N=m} a_1^{h_1}\cdots a_N^{h_N} r_{h_1,\ldots,h_N}\right) \\ &= \sum_{h_1+\ldots+h_N=m} a_1^{h_1}\cdots a_N^{h_N}\lambda(r_{h_1,\ldots,h_N}). \end{aligned}$$

Da dies für alle $w \in W$ gilt, erhält man

$$\sum_{h_1+\ldots+h_N=m} \lambda(r_{h_1,\ldots,h_N}) a_1^{h_1}\cdots a_N^{h_N} = 0 \quad \text{für alle } a_1,\ldots,a_N \in K.$$

Daraus folgt $\lambda(r_{h_1,\ldots,h_N}) = 0$ für alle $h_1,\ldots,h_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $h_1+\ldots+h_N = m$. Da $\{r_{h_1,\ldots,h_N} \mid h_1+\ldots+h_N = m\}$ eine Basis für $\Sigma_m$ und $\lambda$ linear ist, folgt $\lambda \equiv 0$. □

## 1.2. Einfache und halbeinfache Algebren

Die Resultate dieses Abschnitts können beispielsweise in Curtis und Reiner [1] gefunden werden.

**Definition 1.10** *Eine $K$-Algebra $A$ heisst* einfach*, falls $A \neq 0$ ist und $0$ sowie $A$ die einzigen zweiseitigen Ideale von $A$ sind.*

**Proposition 1.11** *Sei $D$ ein Schiefkörper. Dann ist $\mathrm{Mat}_n(D)$ für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ einfach.*

**Beweis** Sei $I \neq 0$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathrm{Mat}_n(D)$. Wir wollen zeigen, dass $I = \mathrm{Mat}_n(D)$ ist. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(D)$ beliebig. Sei $0 \neq B = (b_{ij}) \in I$ und $E_{kl} \in \mathrm{Mat}_n(D)$ mit $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Wähle $r, s \in \{1,\ldots,n\}$ so, dass $b_{rs} \neq 0$ ist. Dann gilt:

$$(E_{ir}BE_{sj})_{ab} = \sum_{k,l}(E_{ir})_{ak}b_{kl}(E_{sj})_{lb} = \sum_{k,l}\delta_{ia}\delta_{rk}b_{kl}\delta_{sl}\delta_{jb} = b_{rs}\delta_{ia}\delta_{jb} = b_{rs}(E_{ij})_{ab} = (b_{rs}E_{ij})_{ab}$$

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i,j} b_{rs}E_{ij}b_{rs}^{-1}a_{ij} = \sum_{i,j} \underbrace{E_{ir}BE_{sj}}_{\in I} b_{rs}^{-1}a_{ij} \in I$$

Da $A \in \mathrm{Mat}_n(D)$ beliebig war, folgt $\mathrm{Mat}_n(D) \subset I$ und somit $I = \mathrm{Mat}_n(D)$. □

**Definition 1.12** *Sei $A$ eine $K$-Algebra und $M$ ein $A$-Linksmodul. Ein Untermodul $N \subset M$ heisst* maximal*, falls $N \neq M$ ist und es keinen Untermodul $U$ von $M$ mit $N \subsetneq U \subsetneq M$ gibt.*

**Definition 1.13** *Sei $A$ eine unitäre $K$-Algebra und $M$ ein $A$-Linksmodul. Das* (Jacobson-) Radikal *von $M$ ist wie folgt definiert: Falls $M$ keine maximalen Untermoduln besitzt, so ist* $\mathrm{Rad}(M) = M$*. Ansonsten definiert man* $\mathrm{Rad}(M)$ *als den Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von $M$.*

**Bemerkung 1.14** Jede unitäre $K$-Algebra $A$ ist ein Linksmodul über sich selbst. Das Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ ist ein zweiseitiges Ideal von $A$.

**Definition 1.15** *Sei $A$ eine unitäre $K$-Algebra. Ein $A$-Linksmodul $M$ heisst* artinsch*, falls die absteigende Kettenbedingung erfüllt ist, d.h. falls es für jede absteigenden Folge $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ von Untermoduln von $M$ einen Index $k$ gibt, so dass für alle $i > k$ gilt $M_i = M_k$ .*

**Definition 1.16** *Eine unitäre $K$-Algebra $A$ heisst* linksartinsch*, wenn sie als Linksmodul über sich selbst artinsch ist.*

**Proposition 1.17** *Sei $M \neq 0$ ein artinscher Linksmodul über der unitären linksartinschen $K$-Algebra $A$. Dann ist $\mathrm{Rad}(M) \neq M$.*

**Beweis** Sei $M \neq 0$ artinsch. Wir wollen zeigen, dass es einen echten maximalen Untermodul von $M$ gibt. Nehmen wir also per Widerspruch an, es gäbe keinen maximalen Untermodul $N \subsetneq M$. Da $0 \subset M$ ein Untermodul, aber nach Annahme nicht maximal ist, existiert ein Untermodul $N_1$ mit $0 \subsetneq N_1 \subsetneq M$. Durch Wiederholen dieses Arguments erhält man eine Folge von Untermoduln $0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \ldots \subsetneq M$. Die aufsteigende Kettenbedingung ist somit nicht erfüllt und M nicht noethersch. Da jedoch jeder artinsche Linksmodul über einer linksartinschen Algebra noethersch ist (Für einen Beweis siehe Lambek [4], Proposition 3 auf Seite 69.), gibt dies den gewünschten Widerspruch. □

**Definition 1.18** *Eine linksartinsche unitäre $K$-Algebra $A$ heisst* halbeinfach*, falls* $\mathrm{Rad}(A) = 0$ *ist.*

**Lemma 1.19** *Jede einfache linksartinsche unitäre $K$-Algebra ist halbeinfach.*

**Beweis** Sei $A$ eine einfache linksartinsche unitäre $K$-Algebra. Da $A \neq 0$ ein artinscher Linksmodul über sich selbst ist, folgt mit Proposition 1.17 $\mathrm{Rad}(A) \neq A$. Weil $\mathrm{Rad}(A)$ ein beidseitiges Ideal von $A$ ist folgt somit $\mathrm{Rad}(A) = 0$ und $A$ ist halbeinfach. □

**Korollar 1.20** *Seien $D_1, \ldots, D_r$ Schiefkörper und $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann ist das Produkt* $\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \ldots \times \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r)$ *eine halbeinfache Algebra.*

**Beweis** Folgt direkt aus Proposition 1.11 und Lemma 1.19. □

**Lemma 1.21** *Seien $A$ und $B$ zwei einfache Algebren über $K$ und $A$ zentral über $K$, das heisst $Z(A) = K$. Dann ist $A \otimes B$ ebenfalls eine einfache $K$-Algebra.*

**Beweis** (Dieser Beweis folgt demjenigen von Lemma 5.5 in Nebe [5].) Sei $I \subset A \otimes B$ ein nichttriviales beidseitiges Ideal. Jedes $0 \neq c \in I$ kann geschrieben werden als $c =$

$\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i$ mit $a_i \in A$ und über $K$ linear unabhängigen $b_i \in B$. Wähle diese Darstellung von $c$ so, dass $m$ minimal ist. Da $A$ einfach ist, existieren $r, s \in A$ mit $ra_1 s = 1$. Somit ist

$$c' := (r \otimes 1)c(s \otimes 1) = \sum_{i=1}^m ra_i s \otimes b_i = 1 \otimes b_1 + a_2' \otimes b_2 + \ldots + a_m' \otimes b_m \in I.$$

Sei $a \in A$ beliebig. Da $(a \otimes 1)c' - c'(a \otimes 1)$ nur noch $m-1$ Summanden hat, ist es nach der Minimalität von $m$ gleich 0. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= (a \otimes 1)c' - c'(a \otimes 1) \\ &= (a \otimes 1)(1 \otimes b_1) - (1 \otimes b_1)(a \otimes 1) + (aa_2' \otimes 1)(1 \otimes b_2) - (a_2' a \otimes 1)(1 \otimes b_2) + - \ldots \\ &\quad \ldots + (aa_m' \otimes 1)(1 \otimes b_m) - (a_m' a \otimes 1)(1 \otimes b_m) \\ &= ((aa_2' - a_2' a) \otimes 1)(1 \otimes b_2) + \ldots + ((aa_m' - a_m' a) \otimes 1)(1 \otimes b_m). \end{aligned}$$

Da die $b_i$'s linear unabhängig über $K$ sind, sind die $(1 \otimes b_i)$'s linear unabhängig über $A \otimes 1$. Aus obiger Umformung folgt deshalb $aa_i' - a_i' a = 0$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots m\}$. Da $a \in A$ beliebig war, ist $a_i' \in Z(A) = K$. Setze $\alpha_i := a_i' \in K$. Somit kann $c'$ geschrieben werden als

$$c' = 1 \otimes (\underbrace{b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_m b_m}_{=:b'})$$

Wir haben also ein $b' \in B$ gefunden mit $1 \otimes b' \in I$ und $b' \neq 0$, da die $b_i$'s linear unabhängig sind. Sei $b \in B$ beliebig. Da $B$ einfach ist, existieren $u, v \in B$ mit $ub'v = b$. Folglich ist

$$1 \otimes b = 1 \otimes ub'v = (1 \otimes u)(1 \otimes b')(1 \otimes v) \in I$$

und somit $1 \otimes B \subset I$. Für beliebige $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) \in I$. Also ist $A \otimes B \subset I$ und somit $I = A \otimes B$. Dies beweist die Einfachheit von $A \otimes B$. □

## 1.3. Schur-Weyl Dualität

**Satz 1.22** *(Doppelzentralisator)*
*Sei $W$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $K$ und $A \subset \mathrm{End}(W)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Dann gilt:*

*(a) Der Zentralisator $A'$ von $A$ ist ebenfalls halbeinfach.*

*(b) Der Doppelzentralisator $A''$ ist gleich $A$.*

**Beweis** (a) Da $A$ halbeinfach ist, kann $W$ als $A$-Linksmodul wie folgt zerlegt werden:

$$W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r \qquad \text{mit } W_i \cong U_i^{\oplus s_i} \text{ für alle } 1 \leq i \leq r,$$

wobei die $U_i$ paarweise nicht-isomorphe irreduzible A-Linksmoduln sind. Nach dem Satz von Wedderburn (vgl. Anhang A.2) gilt $A = \prod_{i=1}^r A_i$, wobei $A_i \cong \mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$ mit $D_i = \mathrm{End}_A(U_i)^{op}$ sowie $U_i \cong D_i^{\oplus n_i}$. Wir haben

$$\begin{aligned} A' &= \mathrm{End}_A(W) = \prod_{i=1}^r \mathrm{End}_{A_i}(W_i) = \prod_{i=1}^r \mathrm{End}_{A_i}(U_i^{\oplus s_i}) \\ &= \prod_{i=1}^r \mathrm{Mat}_{s_i}(\mathrm{End}_{A_i}(U_i)) = \prod_{i=1}^r \mathrm{Mat}_{s_i}(\mathrm{End}_A(U_i)) = \prod_{i=1}^r \mathrm{Mat}_{s_i}(D_i^{op}). \end{aligned}$$

Da $A_i' = \mathrm{Mat}_{s_i}(D_i^{op})$ nach Proposition 1.11 einfach ist, ist $A'$ nach Korollar 1.20 halbeinfach.

(b) Die Inklusion " $\supseteq$ " ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} A'' &= \mathrm{End}_A(W) = \{f \in \mathrm{End}(W) \mid f \circ a' = a' \circ f \text{ für alle } a' \in A'\} \\ &= \{f \in \mathrm{End}(W) \mid f \circ g = g \circ f \text{ für alle } g \in \mathrm{End}(W) \text{ mit } g \circ a = a \circ g \text{ für alle } a \in A\} \\ &\supseteq A. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \dim(A_i)\dim(A_i') &= \dim(\mathrm{Mat}_{n_i}(D_i))\dim(\mathrm{Mat}_{s_i}(D_i^{op}) = n_i^2 \dim(D_i) s_i^2 \underbrace{\dim(D_i^{op})}_{=\dim(D_i)} \\ &= (n_i s_i \dim(D_i))^2 = (s_i \dim(D_i^{\oplus n_i}))^2 = (s_i \dim(U_i))^2 = (\dim(U_i^{\oplus s_i}))^2 \\ &= \dim(W_i)^2 = \dim(\mathrm{End}(W_i)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da $A'$ ebenfalls halbeinfach ist, kann dieselbe Argumentation wie oben auf $A'$ anstelle von $A$ angewendet werden und man erhält analog $\dim(A_i')\dim(A_i'') = \dim(\mathrm{End}(W_i))$. Dadurch folgt $\dim(A_i'') = \dim(A_i)$ und somit auch $\dim(A'') = \dim(A)$. Da wir bereits eine Inklusion gezeigt haben, folgt die andere hiermit. $\square$

**Bemerkung 1.23** Die Annahme, dass $A$ halbeinfach ist, kann in Satz 1.22 nicht ersatzlos weggelassen werden. Betrachte beispielsweise den Vektorraum $W := \mathbb{C}^2$ über dem Körper $K := \mathbb{C}$ und die $\mathbb{C}$-Algebra $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Der Zentralisator von $A$ ist $A' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, d \in \mathbb{C} \right\}$. Somit erhält man als Doppelzentralisator $A'' = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \supsetneq A$. Die $\mathbb{C}$-Algebra $A$ ist also echt in ihrem Doppelzentralisator enthalten.

Sei von nun an $K$ algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik 0.

**Satz 1.24** *Seien $W$, $A$ und $A'$ wie in Satz 1.22. Sei $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ die isotypische Zerlegung von $W$ wie im Beweis von Satz 1.22. Dann sind die $W_i$'s irreduzible $A \otimes A'$-Linksmoduln. Des Weiteren existieren paarweise nicht-isomorphe irreduzible A-Linksmoduln $U_i$ und paarweise nicht-isomorphe irreduzible $A'$-Linksmoduln $V_i$, so dass gilt:*

$$W_i \cong U_i \otimes V_i$$

**Beweis** Da $K$ algebraisch abgeschlossen ist, ist jede endlich-dimensionale Divisionsalgebra über $K$ gleich $K$. Mit der Notation aus dem Beweis von Satz 1.22 gilt $D_i = \mathrm{End}_A(U_i)^{op} = K$. Dank der Einfachheit von $A_i$ sowie $A'_i$ und da $Z(A_i) = Z(\mathrm{Mat}_{n_i}(K)) = K$ ist, folgt mit Lemma 1.21, dass $A_i \otimes A'_i$ eine einfache Algebra ist.
Betrachte den kanonischen Algebra-Homomorphismus

$$\varphi_i : A_i \otimes A'_i \longrightarrow \mathrm{End}(W_i)$$

gegeben durch

$$\varphi_i(a_i \otimes a'_i)(w_i) = a_i(w_i) \circ a'_i(w_i) \text{ für alle } w_i \in W_i.$$

Somit ist $\varphi_i \circ$ Projektion : $A \otimes A' \longrightarrow \mathrm{End}(W_i)$ eine Darstellung. Um zu zeigen, dass der $A \otimes A'$-Linksmodul $W_i$ irreduzibel ist, genügt es wegen der Einfachheit von $A_i \otimes A'_i$ zu zeigen, dass $\varphi_i$ ein Isomorphismus ist. Da $\varphi_i$ ein Homomorphismus ist, gilt für alle $a \in A_i \otimes A'_i$ und $b \in \mathrm{Kern}(\varphi_i)$:

$$\varphi_i(ab) = \varphi_i(a)\varphi_i(b) = \varphi_i(a) \cdot 0 = 0$$
$$\varphi_i(ba) = \varphi_i(b)\varphi_i(a) = 0 \cdot \varphi_i(a) = 0.$$

Folglich ist $\mathrm{Kern}(\varphi_i) \subset A_i \otimes A'_i$ ein beidseitiges Ideal. Weil $A_i \otimes A'_i$ einfach und $\mathrm{Kern}(\varphi_i) \neq A_i \otimes A'_i$ ist, erhalten wir $\mathrm{Kern}(\varphi_i) = 0$ und somit ist $\varphi_i$ injektiv. Aus dem Beweis von Satz 1.22 wissen wir ausserdem

$$\dim(\mathrm{End}(W_i)) \overset{(1.1)}{=} \dim(A_i)\dim(A'_i) = \dim(A_i \otimes A'_i),$$

womit die Surjektivität folgt. Mit $U_i \cong K^{\oplus n_i}$ und $V_i := U'_i = \mathrm{End}_{U_i}(W) \cong K^{\oplus s_i}$ ist $U_i \otimes V_i$ ein $A \otimes A'$-Linksmodul. Ausserdem gilt $U_i \otimes V_i \cong K^{\oplus n_i} \otimes K^{\oplus s_i} = (K^{\oplus n_i})^{\oplus s_i} \cong W_i$. Die $U_i$'s sind nach Konstruktion über die isotypische Zerlegung paarweise nicht-isomorphe irreduzible $A$-Linksmoduln. Es bleibt noch zu zeigen, dass die $V_i$'s ebenfalls paarweise nicht-isomorph und irreduzibel sind. Die Irreduzibilität von $V_i$ folgt aus derjenigen von $W_i$. Für die Nicht-Isomorphie der $V_i$'s nehmen wir per Widerspruch an, es gäbe $i \neq j$ mit $V_i = V_j$. Wir haben einen nicht-trivialen Homomorphismus $f : A'_i \longrightarrow \mathrm{End}(V_i)$. Da $\mathrm{End}(V_i) \cong \mathrm{End}(V_j)$ ist, erhalten wir einen Homomorphismus $g : A'_i \longrightarrow \mathrm{End}(V_j)$ mit $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(f)$. Dies liefert den gewünschten Widerspruch, da $A'_i$ auf $V_j$ trivial operiert und somit $\mathrm{Kern}(g) = A'_i$ ist. □

**Satz 1.25** *(Schur-Weyl Dualität)*

*(a) Der Zentralisator von $S_m$ ist $\mathrm{End}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}) = \langle \mathrm{GL}(V) \rangle$.*

*(b) Umgekehrt gilt auch $\mathrm{End}_{K[\mathrm{GL}(V)]}(V^{\otimes m}) = \langle S_m \rangle$.*

*(c) Es existieren paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen $U_i$ von $S_m$ und paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen $V_i$ von $\mathrm{GL}(V)$, so dass $V^{\otimes m}$ als $S_m \times \mathrm{GL}(V)$-Linksmodul zerlegt werden kann als $V^{\otimes m} \cong \bigoplus_{i=1}^r U_i \otimes V_i$.*

**Beweis** (a) Wir betrachten den natürlichen Isomorphismus

$$\gamma : \mathrm{End}(V)^{\otimes m} \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes m}),$$

wobei $\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)$ eindeutig bestimmt ist durch

$$\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = A_1 v_1 \otimes \ldots \otimes A_m v_m.$$

Die zugehörige Aktion

$$S_m \times \mathrm{End}(V)^{\otimes m} \longrightarrow \mathrm{End}(V)^{\otimes m}, \quad (\sigma, A_1 \otimes \ldots \otimes A_m) \mapsto \sigma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)$$

ist definiert durch

$$\gamma(\sigma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m))(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = \rho_2(\sigma)(\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)(\rho_2(\sigma^{-1})(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m))) \\ \text{für alle } v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\rho_2(\sigma)(\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)(\rho_2(\sigma^{-1})(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m))) \\
&\qquad = \rho_2(\sigma)(\gamma((A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(m)}))) \\
&\qquad = \rho_2(\sigma)(A_1 v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_m v_{\sigma(m)}) \\
&\qquad = A_{\sigma^{-1}(1)} v_1 \otimes \ldots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)} v_m \\
&\qquad = \gamma(A_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)})(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)
\end{aligned}$$

und somit $\sigma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m) = A_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)}$.
Aus obiger Rechnung ist ausserdem ersichtlich, dass für jeden symmetrischen Tensor $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m \in \mathrm{End}(V)^{\otimes m}$ gilt:

$$\rho_2(\sigma)(\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m)(\rho_2(\sigma^{-1}) = \gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m).$$

Dies beweist $\gamma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_m) \in \mathrm{End}_{K[S_m]}(V^{\otimes m})$. Folglich induziert $\gamma$ einen Isomorphismus

$$\{\text{symmetrische Tensoren } A_1 \otimes \ldots \otimes A_m \in \mathrm{End}(V)^{\otimes m}\} \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}). \tag{1.2}$$

Nach Proposition 1.8 ist $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ Zariski-dicht und somit kann Lemma 1.9 für $W = \mathrm{End}(V)$ und $X = \mathrm{GL}(V)$ angewendet werden. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}) &\overset{(1.2)}{\cong} \{\text{symmetrische Tensoren } A_1 \otimes \ldots \otimes A_m \in \mathrm{End}(V)^{\otimes m}\} \\
&\overset{\text{Lemma 1.9}}{=} \langle \{g \otimes \ldots \otimes g \mid g \in \mathrm{GL}(V)\} \rangle = \langle \mathrm{GL}(V) \rangle.
\end{aligned}$$

(b) Da char(K) $= 0$ und $S_m$ über $K$ eine endliche Gruppe ist, folgt mit dem Satz von Maschke, dass jede Darstellung von $S_m$ vollständig reduzibel ist. Somit ist $K[S_m]$ halbeinfach und $\langle S_m \rangle \subset \mathrm{End}(V^{\otimes m})$ eine halbeinfache Unteralgebra. Aus dem Doppelzentralisator-Satz 1.22 folgt $\langle S_m \rangle'' = \langle S_m \rangle$. Mit $\langle S_m \rangle' = \mathrm{End}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}) \overset{(a)}{=} \langle \mathrm{GL}(V) \rangle$ erhalten wir $\mathrm{End}_{K[\mathrm{GL}(V)]}(V^{\otimes m}) = \langle S_m \rangle'' = \langle S_m \rangle$.

(c) Dies folgt aus Satz 1.24 mit $W = V^{\otimes m}$ und $A = \langle S_m \rangle$. $\square$

**Korollar 1.26** *Die Darstellung* $V^{\otimes m}$ *von* $\mathrm{GL}(V)$ *ist vollständig reduzibel.*

**Lemma 1.27** *Sei* $\dim(V) \geq m$*. Dann ist jede irreduzible Darstellung von* $S_m$ *isomorph zu einem der* $U_i$*'s aus Satz 1.25.*

**Beweis** Sei $K[S_m]$ die reguläre Darstellung von $S_m$. Wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $V$. Betrachte die $S_m$-äquivariante Abbildung

$$f : K[S_m] \longrightarrow V^{\otimes m} \quad , \quad \sum a_\sigma \sigma \mapsto \sum a_\sigma v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

Sei $x = \sum a_\sigma \sigma \in K[S_m]$ so, dass $f(x) = \sum a_\sigma v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)} = 0$ ist. Da $n = \dim(V) \geq m$ ist, sind die $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$ mit $\sigma \in S_m$ linear unabhängig. Folglich ist $a_\sigma = 0$ für alle $\sigma$ und somit ist auch $x = 0$. Dies beweist die Injektivität von $f$. Somit ist $K[S_m]$ isomorph zum Untermodul Bild$(f)$ von $V^{\otimes m}$ und wir erhalten

$$K[S_m] \cong U_{i_1} \oplus \ldots \oplus U_{i_k},$$

wobei die $U_{i_j}$ irreduzible Darstellungen von $S_m$ sind, die in der Zerlegung von $V^{\otimes m}$ aus Satz 1.25 vorkommen. Da jede irreduzible Darstellung als Summand in der regulären Darstellung auftaucht, folgt das Lemma. $\square$

**Korollar 1.28** *Sei* $\dim(V) \geq m$*. Nach Lemma 1.27 ist jede irreduzible Darstellung von* $S_m$ *isomorph zu einem* $U_i$ *aus der Zerlegung in Satz 1.25 und somit, da die* $U_i$*'s paarweise nicht-isomorph sind, zu genau einem* $U_i$*. Folglich ist die Anzahl Summanden in der Zerlegung von* $V^{\otimes m}$ *gleich*

$$\begin{aligned} r &= \#\ \textit{Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von } S_m \\ &= \#\ \textit{Konjugationsklassen von } S_m. \end{aligned}$$

**Korollar 1.29** *Mit* $d_i = \dim(\mathrm{Hom}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}, U_i))$ *gilt* $V^{\otimes m} = \bigoplus_{i=1}^r U_i^{\oplus d_i}$ *für paarweise nicht-isomorphe irreduzible* $S_m$*-Linksmoduln* $U_i$*. Somit haben wir*

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes \mathrm{Hom}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}, U_i).$$

*Mit Teil (c) von Satz 1.25 folgt daraus*

$$V_i \cong \mathrm{Hom}_{K[S_m]}(V^{\otimes m}, U_i)$$

*für nicht-isomorphe irreduzible* $\mathrm{GL}(V)$*-Linksmoduln* $V_i$*.*

# 2. Irreduzible Darstellungen von $\mathrm{S_m}$

Die Anzahl Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $S_m$ ist gleich der Anzahl Konjugationsklassen von $S_m$ und somit gleich der Anzahl Partitionen von $m$. In diesem Kapitel finden wir eine Bijektion zwischen den Partitionen von $m$ und den Äquivalenzklassen irreduzibler Charakteren von $S_m$. Insbesondere erhalten wir eine explizite Formel zur Berechnung aller irreduzibler Charakteren der $S_m$.

## 2.1. Young Diagramme, Schur- und Newton-Polynome

**Definition 2.1** *Die Menge von Partitionen ist definiert als*

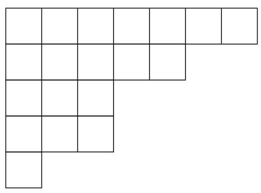
$$\mathcal{P} := \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \textit{ und für } i \textit{ gross genug} : \lambda_i = 0\}.$$

**Bemerkung 2.2** Als Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}$ betrachten wir die lexikographische Ordnung, das heisst:

$$\lambda > \lambda' :\Longleftrightarrow \text{ Das erste nicht-verschwindende } \lambda_i - \lambda'_i \text{ ist positiv.}$$

**Definition 2.3** *Das* Young Diagramm *einer Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \mathcal{P}$ ist die linksbündige Anordnung von quadratischen Kästchen, bei der die $i$-te Zeile aus $\lambda_i$ Kästchen besteht.*

**Beispiel 2.4** Das Young Diagramm von $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ist



**Definition 2.5** *Die* Länge *von $\lambda \in \mathcal{P}$ ist*

$$L(\lambda) := \max\{i \mid \lambda_i \neq 0\} = \textit{Länge der ersten Spalte im Young Diagramm von } \lambda.$$

**Beispiel 2.6** Die Länge von $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ist 5.

**Definition 2.7** *Der* Grad *von $\lambda \in \mathcal{P}$ ist*

$$|\lambda| := \sum_i \lambda_i = \textit{Anzahl Kästchen im Young Diagramm von } \lambda.$$

**Beispiel 2.8** Der Grad von $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ist 19.

**Definition 2.9** *Die Menge aller Partitionen von Grad $m$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_m$.*

**Notation 2.10** Für $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathcal{P}$ und $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $L(\lambda) \leq k$ schreiben wir $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Fixiere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

**Definition 2.11** *Für jedes $\lambda \in \mathcal{P}$ mit $L(\lambda) \leq n$ definieren wir das Polynom*

$$\begin{aligned} v_\lambda(x_1, \dots, x_n) :&= \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1+n-1} & x_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &\overset{Leibniz}{=} \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2+n-2} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.12** Das Polynom $v_\lambda \in \mathbb{Z}[x_1, \dots x_n]$ ist alternierend, homogen und vom Grad $\lambda_1+\ldots+\lambda_n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = |\lambda|+\frac{n(n-1)}{2} = |\lambda|+\binom{n}{2}$. Bezüglich der lexikographischen Ordnung der Exponenten hat $v_\lambda$ den führenden Term $x_1^{\lambda_1+n-1}x_2^{\lambda_2+n-2}\cdots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}+1}x_n^{\lambda_n}$.

**Notation 2.13** Die Vandermonde-Determinante bezeichnen wir mit

$$\Delta(x_1, \dots x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

**Proposition 2.14** *Das Polynom $v_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ ist teilbar durch $\Delta(x_1, \dots, x_n)$.*

**Beweis** Da $v_\lambda$ alternierend ist, gilt $v_\lambda(x_1, \dots, x_n)\Big|_{x_i = x_j} = 0$ für alle $i \neq j$. Somit ist $v_\lambda$ teilbar durch $x_i - x_j$ für alle $i \neq j$ und folglich auch durch $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$. $\square$

**Definition 2.15** *Das* Schur-Polynom *bezüglich $\lambda \in \mathcal{P}$ ist definiert als*

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \frac{v_\lambda(x_1, \dots, x_n)}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

**Bemerkung 2.16** Das Schur-Polynom $s_\lambda$ ist symmetrisch, homogen und vom Grad

$$\left[|\lambda| + \binom{n}{2}\right] - \binom{n}{2} = |\lambda|.$$

**Notation 2.17** Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]_{\text{sym}} &:= \{f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ ist symmetrisch } \} \\ \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]_{\text{alt}} &:= \{f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ ist alternierend } \} \end{aligned}$$

**Lemma 2.18** *(a) Die Menge* $\{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\}$ *ist eine* $\mathbb{Z}$*-Basis von* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$.

*(b) Die Schur-Polynome* $\{s_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\}$ *bilden eine* $\mathbb{Z}$*-Basis von* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{sym}}$.

**Beweis** (a) Sei $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$. Wir wollen per Induktion über den führenden Term von $f$ bezüglich der lexikographischen Ordnung der Exponenten zeigen, dass $f \in \langle \{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle$ ist. Für die Induktionsverankerung betrachten wir ein $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$ mit minimalem führenden Term, also mit führendem Term $\alpha x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$ für ein $\alpha \in \mathbb{Z}$. Da dies dem führenden Term von $\alpha v_{(0,\ldots,0)}$ entspricht, hat $f - \alpha v_{(0,\ldots,0)}$ einen kleineren führenden Term und ist somit gleich 0. Wir erhalten $f = \alpha v_{(0,\ldots,0)} \in \langle \{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle$. Nehmen wir also an, die Behauptung gelte für alle $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$ mit führendem Term kleiner als $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$. Sei $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$ mit führendem Term $\beta x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$. Da $f$ alternierend ist, gilt $r_1 > r_2 > \ldots > r_n \geq 0$. Definiere $\lambda := (r_1 - n + 1, r_2 - n + 2, \ldots, r_n) \in \mathcal{P}$. Dann hat $v_\lambda$ den führenden Term $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$, woraus $f - \beta v_\lambda \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}}$ mit führendem Term kleiner als $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$ folgt. Nach Induktionsannahme erhalten wir $f - \beta v_\lambda \in \langle \{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle$ und damit auch $f \in \langle \{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle$.

(b) Für jedes $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{sym}}$ ist

$$g \cdot \Delta \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{alt}} \overset{(a)}{=} \langle \{v_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle = \langle \{s_\lambda \cdot \Delta \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle.$$

Daraus folgt $g \in \langle \{s_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\} \rangle$. □

**Lemma 2.19** *Für alle* $1 < m < n$ *und für jedes* $\lambda \in \mathcal{P}$ *mit* $L(\lambda) \leq n$ *gilt:*

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = \begin{cases} s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) & \textit{falls } L(\lambda) \leq m \\ 0 & \textit{falls } L(\lambda) > m \end{cases}.$$

**Beweis** Wir beweisen die Aussage per absteigende Induktion über $m$: Betrachte für die Induktionsverankerung den Fall $m = n - 1$. Für die Vandermonde-Determinante erhalten wir mit $x_n = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)\Big|_{x_n = 0} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_j) \cdot (x_1 - 0)(x_2 - 0) \cdots (x_{n-1} - 0) \\ &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Im Fall $L(\lambda) > m = n - 1$, was gleichbedeutend ist mit $\lambda_n \neq 0$, gilt:

$$v_\lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1 + n - 1} & x_1^{\lambda_2 + n - 2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1 + n - 1} & x_{n-1}^{\lambda_2 + n - 2} & \cdots & x_{n-1}^{\lambda_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Im Fall $L(\lambda) \leq m = n-1$, was $\lambda_n = 0$ entspricht, berechnet man:

$$\begin{aligned}
v_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0) &= \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_1^{\lambda_{n-1}+1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_{n-1}^{\lambda_{n-1}+1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{(-1)^{n+n}}_{=1} \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_1^{\lambda_{n-1}+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_{n-1}^{\lambda_{n-1}+1} \end{pmatrix} \\
&= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-2} & \cdots & x_1^{\lambda_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1+n-2} & \cdots & x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \end{pmatrix} \\
&= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} v_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Für das Schur-Polynom erhalten wir somit:

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \frac{v_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)}{\Delta(x_1,\dots,x_{n-1},0)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } L(\lambda) > m \\ s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1}) & \text{falls } L(\lambda) \leq m \end{cases}.$$

Wir nehmen an, die Aussage gelte für $m+1$ und wollen zeigen, dass sie auch für $m$ gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) &\overset{\text{Ind. Annahme}}{=} \begin{cases} s_\lambda(x_1,\dots,x_m,0) & \text{falls } L(\lambda) \leq m+1 \\ 0 & \text{falls } L(\lambda) > m+1 \end{cases} \\
&\overset{\text{Fall } m=n-1}{=} \begin{cases} s_\lambda(x_1,\dots,x_m) & \text{falls } L(\lambda) \leq m \\ 0 & \text{falls } L(\lambda) > m \end{cases},
\end{aligned}$$

was die Induktion beweist. □

**Lemma 2.20** *Es gilt*

$$\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} = \Delta(x_1,\dots,x_n)\Delta(y_1,\dots,y_n)\prod_{i,j=1}^{n} \frac{1}{1-x_iy_i}.$$

**Beweis** Wir beweisen die Behauptung per Induktion über $n$: Für $n=1$ haben wir, da ein Produkt über die leere Menge per Definition gleich 0 ist, $\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right) = \frac{1}{1-x_iy_j} = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{1-x_iy_j} = \Delta(x_1)\Delta(y_1)\frac{1}{1-x_iy_j}$. Für den Induktionsschritt machen wir folgende Umformungen:

$$\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_n} \\ \frac{1}{1-x_2y_1} & \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1-x_ny_1} & \frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n} \end{pmatrix}$$

Durch Subtraktion der ersten Zeile von allen anderen Zeilen und mit $\frac{1}{1-x_iy_j} - \frac{1}{1-x_1y_j} = \frac{1-x_1y_j-1+x_iy_j}{(1-x_iy_j)(1-x_1y_j)} = \frac{x_i-x_1}{1-x_1y_j}\frac{y_j}{1-x_iy_j}$ ist dies

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_n} \\ \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_2}\frac{y_2}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_n}\frac{y_n}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_n-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_ny_1} & \frac{x_n-x_1}{1-x_1y_2}\frac{y_2}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{x_n-x_1}{1-x_1y_n}\frac{y_n}{1-x_ny_n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)\cdots(1-x_1y_n)} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{y_n}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ny_1} & \frac{y_2}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{y_n}{1-x_ny_n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Durch Subtraktion der ersten Spalte von allen anderen Spalten und mit $\frac{y_j}{1-x_iy_j} - \frac{y_1}{1-x_iy_1} = \frac{y_j-x_iy_1y_j-y_1+x_iy_1y_j}{(1-x_iy_j)(1-x_iy_1)} = \frac{y_j-y_1}{1-x_iy_1}\frac{1}{1-x_iy_j}$ gilt weiter

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_n)} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_2y_1}\frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{y_n-y_1}{1-x_2y_1}\frac{1}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ny_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_ny_1}\frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{y_n-y_1}{1-x_ny_1}\frac{1}{1-x_ny_n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_n)} \frac{(y_2-y_1)\cdots(y_n-y_1)}{(1-x_2y_1)\cdots(1-x_ny_1)} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & \frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)(y_2-y_1)\cdots(y_n-y_1)}{\prod_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i=1 \text{ oder } j=1}} (1-x_iy_j)} \quad \underbrace{\det\begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n} \end{pmatrix}}_{\substack{=\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j=2,\ldots n} \\ \overset{\text{Ind. Ann.}}{=} \Delta(x_2,\ldots,x_n)\Delta(y_2,\ldots,y_n)\prod_{i,j=2}^n \frac{1}{1-x_iy_j}}} \\
&= \underbrace{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\Delta(x_2,\ldots,x_n)}_{=(-1)^{n-1}\Delta(x_1,\ldots,x_n)} \underbrace{(y_2-y_1)\cdots(y_n-y_1)\Delta(y_1,\ldots,y_n)}_{=(-1)^{n-1}\Delta(y_1,\ldots,y_n)} \\
&\quad \cdot \prod_{i,j=2}^n \frac{1}{1-x_iy_j} \prod_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i=1 \text{ oder } j=1}} \frac{1}{1-x_iy_j} \\
&= \Delta(x_1,\ldots,x_n)\Delta(y_1,\ldots,y_n) \prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j}.
\end{aligned}
$$

□

**Proposition 2.21** *(Cauchy-Formel)*

$$\prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{L(\lambda)\leq \min\{n,m\}} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m), \tag{2.1}$$

*wobei beide Seiten als formale Potenzreihen in* $\mathbb{Z}[[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]]$ *betrachtet werden.*

**Beweis** Als erstes wollen wir zeigen, dass es genügt, die Formel für $m = n$ zu beweisen: Angenommen die Formel gelte für $m = n$, also

$$\prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{L(\lambda)\leq n} s_\lambda(x_1,\dots,x_n).s_\lambda(y_1,\dots,y_n).$$

Sei nun $m < n$. Mit $y_{m+1} = \ldots = y_n = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \frac{1}{1-x_iy_j} &= \sum_{L(\lambda)\leq n} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m,0,\dots,0)\\ &\overset{\text{Lemma 2.19}}{=} \sum_{L(\lambda)\leq n} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m).\end{aligned}$$

Analoges gilt für $m > n$.
*Behauptung*: Es gilt

$$\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} = \sum_{L(\lambda)\leq n} v_\lambda(x_1,\dots,x_n)\cdot v_\lambda(y_1,\dots,y_n).$$

*Beweis der Behauptung*: Wir formen die linke Seite wie folgt um:

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} &\overset{\text{geometrische Reihe}}{=} \det\left(\sum_{\nu\geq 0}(x_iy_j)^\nu\right) \overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n\sum_{\nu\geq 0}(x_iy_j)^\nu\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n(1+x_iy_{\sigma(i)}+x_i^2y_{\sigma(i)}^2+x_i^3y_{\sigma(i)}^3+\ldots)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\nu_1,\dots,\nu_n\geq 0}(x_1y_{\sigma(1)})^{\nu_1}(x_2y_{\sigma(2)})^{\nu_2}\cdots(x_ny_{\sigma(n)})^{\nu_n}\\ &= \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n\geq 0} x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)y_{\sigma(1)}^{\nu_1}y_{\sigma(2)}^{\nu_2}\cdots y_{\sigma(n)}^{\nu_n}.\end{aligned}$$

Falls $\nu_i = \nu_j$ ist für $i \neq j$, kommen in der Summe über die Permutationen jeweils zwei gleiche Terme mit verschiedenen Vorzeichen vor, nämlich einer von $\sigma$ und der andere von $\sigma\circ(i\ j)$. Folglich reicht es, in der ersten Summe nur über paarweise verschiedene $\nu_i$'s zu summieren. Somit können wir weiter umformen:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_n \geq 0 \\ \nu_i \neq \nu_j (i \neq j)}} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{\sigma(1)}^{\nu_1} y_{\sigma(2)}^{\nu_2} \cdots y_{\sigma(n)}^{\nu_n} \\
&= \sum_{\nu_1 > \ldots > \nu_n \geq 0} \sum_{\mu \in S_n} x_1^{\nu_{\mu(1)}} \cdots x_n^{\nu_{\mu(n)}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{\sigma(1)}^{\nu_{\mu(1)}} \cdots y_{\sigma(n)}^{\nu_{\mu(n)}} \\
&= \sum_{\nu_1 > \ldots > \nu_n \geq 0} \sum_{\mu \in S_n} x^{\nu_1}_{\underbrace{\mu^{-1}}_{=:\eta}(1)} \cdots x^{\nu_n}_{\underbrace{\mu^{-1}}_{=:\eta}(n)} \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{=\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(\tau)} y^{\nu_1}_{\underbrace{(\mu^{-1} \circ \sigma)}_{=:\tau}(1)} \cdots y^{\nu_n}_{\underbrace{(\mu^{-1} \circ \sigma)}_{=:\tau}(n)} \\
&= \sum_{\nu_1 > \ldots \nu_n \geq 0} \sum_{\eta \in S_n} \operatorname{sgn}(\eta) x_{\eta(1)}^{\nu_1} \cdots y_{\eta(n)}^{\nu_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) y_{\tau(1)}^{\nu_1} \cdots y_{\tau(n)}^{\nu_n} \\
&= \sum_{\nu_1 > \ldots \nu_n \geq 0} v_{(\nu_1 - n + 1, \nu_2 - n + 2, \ldots, \nu_n)}(x_1, \ldots, x_n) \cdot v_{(\nu_1 - n + 1, \nu_2 - n + 2, \ldots, \nu_n)}(y_1, \ldots, y_n) \\
&= \sum_{L(\lambda) \leq n} v_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \cdot v_\lambda(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Behauptung und Lemma 2.20 können wir nun die Cauchy-Formel beweisen:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i,j=1,\ldots,n} \frac{1}{1 - x_i y_j} &\overset{\text{Lemma 2.20}}{=} \frac{\det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}}{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \cdot \Delta(y_1, \ldots, y_n)} \\
&\overset{\text{Behauptung}}{=} \frac{\sum_{L(\lambda) \leq n} v_\lambda(x_1, \ldots, x_n) v_\lambda(y_1, \ldots, y_n)}{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \cdot \Delta(y_1, \ldots, y_n)} \\
&= \sum_{L(\lambda) \leq n} \frac{v_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{v_\lambda(y_1, \ldots, y_n)}{\Delta(y_1, \ldots, y_n)} \\
&= \sum_{L(\lambda) \leq n} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \cdots s_\lambda(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}
$$

□

**Definition 2.22** *Definiere*

$$
n_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{cases} x_1^i + x_2^i + \ldots + x_n^i & \textit{falls } i \geq 1 \\ 1 & \textit{falls } i = 0 \end{cases}.
$$

*Für jede Partition $\mu \in \mathcal{P}$ ist das* Newton-Polynom $n_\mu$ *definiert als*

$$
n_\mu(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i \geq 1} n_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n).
$$

**Bemerkung 2.23** Das Newton-Polynom $n_\mu \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ist symmetrisch, homogen und vom Grad $|\mu|$.

**Proposition 2.24** *Es existieren eindeutige $a_\lambda(\mu) \in \mathbb{Z}$ mit*

$$n_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.2}$$

**Beweis** Da $n_\mu \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{sym}}$ und $\{s_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\}$ nach Lemma 2.18 eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{sym}}$ ist, finden wir solche ganzen Koeffizienten $a_\lambda(\mu)$. Da $n_\mu$ und $s_\lambda$ beide homogen und vom Grad $|\mu|$ respektive $|\lambda|$ sind, summieren wir ausserdem nur über Partitionen $\lambda$ mit $|\lambda| = |\mu|$. □

**Notation 2.25** Für ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichne $[f]_{l_1,\ldots,l_n}$ den Koeffizient des Monoms $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ in $f$.

**Satz 2.26** *(Frobenius-Formel)*
*Sei $L(\lambda) \leq n$ und $l_i := \lambda_i + n - i$. Für die Koeffizienten $a_\lambda(\mu)$ aus Proposition 2.24 gilt:*

$$a_\lambda(\mu) = [\Delta \cdot n_\mu]_{l_1,\ldots,l_n}. \tag{2.3}$$

**Beweis** Wir wollen zeigen, dass

$$n_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} [\Delta \cdot n_\mu]_{l_1,\ldots,l_n} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

gilt:

$$\begin{aligned}
n_\mu(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{\Delta(x_1, \ldots, x_n)} \Delta(x_1, \ldots, x_n) n_\mu(x_1, \ldots, x_n) \\
&\overset{\substack{\Delta\cdot n_\mu \text{ ist homogen}\\ \text{vom Grad } \binom{n}{2}+|\mu|}}{=} \frac{1}{\Delta(x_1, \ldots, x_n)} \sum_{l_1+\ldots+l_n=|\mu|+\binom{n}{2}} [\Delta \cdot n_\mu]_{l_1,\ldots,l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \\
&= \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} \frac{1}{\Delta(x_1, \ldots, x_n)} \sum_{\sigma\in S_m} [\Delta \cdot n_\mu]_{l_{\sigma(1)},\ldots,l_{\sigma(n)}} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \\
&= \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} \frac{s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}{v_\lambda(x_1, \ldots, x_n)} \sum_{\sigma\in S_n} [\Delta \cdot n_\mu]_{l_{\sigma(1)},\ldots,l_{\sigma(n)}} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \\
&= \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} \frac{s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}{\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) [\Delta \cdot n_\mu]_{l_1,\ldots,l_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+n-1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \\
&= \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) [\Delta \cdot n_\mu]_{l_1,\ldots,l_n}.
\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten $a_\lambda(\mu)$ aus Proposition 2.24 folgt die Frobenius Formel. □

## 2.2. Die irreduziblen Charaktere von $S_m$

Für jede Konjugationsklasse $[\sigma]$ von $S_m$ sei $\mu_i([\sigma])$ die Länge des $i$-längsten Zykels eines (und folglich jedes) Elements in $[\sigma]$, wobei dieses Element als Komposition disjunkter Zykeln dargestellt ist. Man sagt, $\sigma$ ist vom Zykeltyp $\mu([\sigma]) = (\mu_1([\sigma]), \mu_2([\sigma]), \mu_3([\sigma]), \ldots)$. Dadurch erhalten wir eine Bijektion zwischen den Konjugationsklassen von $S_m$ und den Partitionen $\mathcal{P}_m$. Somit können wir die $a_\lambda$ aus Proposition 2.24 für $\lambda \in \mathcal{P}_m$ als Funktionen auf den Konjugationsklassen von $S_m$ betrachten, also $a_\lambda(\sigma) := a_\lambda(\mu([\sigma])$.

Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik 0. Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass die Klassenfunktionen $a_\lambda$ aus Proposition 2.24, mit $\lambda \in \mathcal{P}_m$, gerade die irreduziblen Charaktere der Gruppe $S_m$ sind. Sobald dies gezeigt ist, liefert uns die Frobenius-Formel (2.3) folglich eine Vorschrift zur Bestimmung der irreduziblen Charaktere der $S_m$.

**Definition 2.27** *Sei $\sigma \in S_m$ und $\mu = \mu([\sigma]) \in \mathcal{P}_m$. Dann definieren wir $\gamma(\mu)$ als die Grösse der Konjugationsklasse von $\sigma$, also*

$$\gamma(\mu) = \#\{\tau \in S_m \mid \tau \textit{ ist vom Zykeltyp } \mu\}.$$

**Proposition 2.28** *Für $\mu = (\underbrace{s, \ldots, s}_{r_s \textit{ mal}}, \underbrace{s-1, \ldots, s-1}_{r_{s-1} \textit{ mal}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1 \textit{ mal}}) \in \mathcal{P}_m$ gilt:*

$$\gamma(\mu) = \frac{m!}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots s^{r_s} r_1! r_2! \cdots r_s!}. \tag{2.4}$$

**Beweis** Ein Element $\sigma \in S_m$ ist genau dann in der zu $\mu$ gehörigen Konjugationsklasse, wenn $\sigma$ die Komposition von folgenden disjunkten Zykeln ist: $r_s$ mal einen $s$-Zykel, $r_{s-1}$ mal einen $(s-1)$-Zykel, …, $r_1$ mal einen 1-Zykel. Da die Zykeln disjunkt sind, spielt die Reihenfolge keine Rolle und wir betrachten nur Elemente $\sigma$, bei denen die Zykeln der Grösse nach geordnet sind. Um $m$ Zahlen anzuordnen gibt es $m!$ Möglichkeiten. Ein Element $\sigma \in S_m$ in der beschriebenen Form bleibt genau dann unverändert und von derselben Form, wenn man entweder die Reihenfolge der Zykeln von derselben Länge vertauscht oder die Elemente innerhalb desselben Zykels wie folgt permutiert: $(i_1 i_2 \ldots i_j) = (i_2 \ldots i_j i_1) = \ldots = (i_j i_1 \ldots i_{j-1})$. Von ersterem kommen die Faktoren $r_1!, \ldots r_s!$, von letzterem die Faktoren $1^{r_1}, \ldots, s^{r_s}$. □

Im Folgenden benutzen wir die Abkürzungen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

**Lemma 2.29** *(Orthogonalitätsrelationen)*
*Für alle $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}_m$ gilt:*

$$\sum_{\sigma \in S_m} a_\lambda(\sigma) a'_\lambda(\sigma) = \begin{cases} m! & \textit{falls } \lambda = \lambda' \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

**Beweis** Definiere $R_m$ als den Term von Grad $2m$ in der Potenzreihe von $\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j}$. Nach der Cauchy-Formel (2.1) gilt

$$\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{L(\lambda)\leq n} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_n)$$

und da der Grad von $s_\lambda$ gleich $|\lambda|$ ist, folgt

$$R_m = \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=m}} s_\lambda(x)s_\lambda(y). \tag{2.5}$$

Auf der anderen Seite können wir $\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j}$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j} &= \exp\left(\log\left(\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{1-x_iy_j}\right)\right) = \exp\left(\sum_{i,j=1}^n \log\Big((1-x_iy_j)^{-1}\Big)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{i,j=1}^n (-1)\log(1+(-x_iy_j))\right)\\
&\overset{\substack{\text{Potenzreihe von}\\ \log(1+\dots)}}{=} \exp\left(\sum_{i,j=1}^n (-1)\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{(-x_iy_j)^k}{k}\right)\\
&= \exp\left(\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^\infty \frac{(x_iy_j)^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{n_k(x)n_k(y)}{k}\right)\\
&= \prod_{k=1}^\infty \exp\left(\frac{n_k(x)n_k(y)}{k}\right) = \prod_{k=1}^\infty\sum_{l=0}^\infty \frac{\left(\frac{n_k(x)n_k(y)}{k}\right)^l}{l!}\\
&= \prod_{k=1}^\infty\sum_{l=0}^\infty \frac{n_k(x)^l n_k(y)^l}{k^l l!}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $R_m$:

$$\begin{aligned}
R_m &= \text{Term vom Grad } 2m \text{ in } \prod_{k=1}^\infty\sum_{l=0}^\infty \frac{n_k(x)^l n_k(y)^l}{k^l l!}\\
&= \text{Term vom Grad } 2m \text{ in } \prod_{k=1}^\infty \left(1+\frac{n_k(x)n_k(y)}{k\cdot 1!}+\frac{n_k(x)^2n_k(y)^2}{k^2\cdot 2!}+\frac{n_k(x)^3n_k(y)^3}{k^3\cdot 3!}+\dots\right)\\
&= \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\ r_1,r_2,\dots,r_s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ r_1+2r_2+\dots+sr_s=m}} \frac{n_1(x)^{r_1}n_1(y)^{r_1}}{1^{r_1}r_1!}\cdot\frac{n_2(x)^{r_2}n_2(y)^{r_2}}{2^{r_2}r_2!}\cdots\frac{n_s(x)^{r_s}n_s(y)^{r_s}}{s^{r_s}r_s!}\\
&= \sum_{r_1+2r_2+\dots+sr_s=m} \frac{n_1(x)^{r_1}n_2(x)^{r_2}\cdots n_s(x)^{r_s}n_1(y)^{r_1}n_2(y)^{r_2}\cdots n_s(y)^{r_s}}{1^{r_1}2^{r_2}\cdots s^{r_s}r_1!r_2!\cdots r_s!}.
\end{aligned}$$

Betrachte folgende Bijektion:

$$\left\{ (r_1, r_2, \ldots, r_s) \;\middle|\; \begin{array}{c} s \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ und } \forall\ 1 \leq i \leq s : r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \text{und } r_1 + 2r_2 + \ldots + sr_s = m \end{array} \right\} \longrightarrow \mathcal{P}_m$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_s) \mapsto (\underbrace{s, \ldots, s}_{r_s \text{ mal}}, \ldots, \underbrace{2, \ldots, 2}_{r_2 \text{ mal}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1 \text{ mal}}).$$

Dadurch lässt sich $R_m$ wie folgt weiter umformen:

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{r_1+2r_2+\ldots+sr_s=m} \frac{n_1(x)^{r_1} n_2(x)^{r_2} \cdots n_s(x)^{r_s} n_1(y)^{r_1} n_2(y)^{r_2} \cdots n_s(y)^{r_s}}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots s^{r_s} r_1! r_2! \cdots r_s!} \\ &\overset{(2.4)}{=} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{m!} \gamma(\mu) n_\mu(x) n_\mu(y) \\ &\overset{(2.2)}{=} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_m} \left( \frac{1}{m!} \gamma(\mu) \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_m \\ L(\lambda) \leq n}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x) \sum_{\substack{\lambda' \in \mathcal{P}_m \\ L(\lambda') \leq n}} a_{\lambda'}(\mu) s_{\lambda'}(y) \right) \\ &= \sum_{\substack{\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}_m \\ L(\lambda), L(\lambda') \leq n}} \left( \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_m} \gamma(\mu) a_\lambda(\mu) a_{\lambda'}(\mu) \right) s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) \\ &= \sum_{\substack{\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}_m \\ L(\lambda), L(\lambda') \leq n}} \left( \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} a_\lambda(\sigma) a_{\lambda'}(\sigma) \right) s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y). \end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.5) gilt aber auch $R_m = \sum_{\substack{L(\lambda) \leq n \\ |\lambda| = m}} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$, woraus folgt:

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} a_\lambda(\sigma) a_{\lambda'}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

□

**Definition 2.30** *Definiere für jedes* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}$ *das Polynom*

$$r_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}.$$

**Bemerkung 2.31** Das Polynom $r_\lambda$ ist homogen, symmetrisch und vom Grad $|\lambda|$.

**Proposition 2.32** *Es existieren eindeutige* $b_\lambda(\mu) \in \mathbb{Z}$ *mit*

$$n_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{L(\lambda) \leq n \\ |\lambda| = |\mu|}} b_\lambda(\mu) r_\lambda(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.6}$$

**Beweis** Wie wir bereits im Beweis von Lemma 1.9 gesehen haben, ist $\{r_\lambda \mid L(\lambda) \leq n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis des Rings der symmetrischen Polynome $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_{\text{sym}}$. □

**Lemma 2.33** *Seien $a_\lambda$ und $b_\lambda$ wie in den Propositionen 2.24 und 2.32.*

*(a) Für $\lambda \in \mathcal{P}$ mit $L(\lambda) \leq n$ gilt $a_\lambda \in \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\lambda|}} \mathbb{Z} b_\eta$.*

*(b) Für $\eta \in \mathcal{P}$ mit $L(\eta) \leq n$ haben wir $b_\eta \in a_\eta + \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ \lambda>\eta}} \mathbb{Z} a_\lambda$.*

*(c) Für $\lambda \in \mathcal{P}$ mit $L(\lambda) \leq n$ sei $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_r} \subset S_m$ und $m := |\lambda|$. Dann entspricht $b_\lambda$ dem Charakter der von der eindimensionalen trivialen Darstellung induzierten Darstellung $\operatorname{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} K$ auf $S_m$.*

**Beweis** (a) Da die $r_\lambda$ symmetrische Polynome sind, können wir sie nach Lemma 2.18 in den Schur-Polynomen ausdrücken: Es existieren eindeutige $c_\eta(\lambda) \in \mathbb{Z}$ mit

$$r_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\lambda|}} c_\eta(\lambda) s_\eta(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.7}$$

Damit erhalten wir einerseits:

$$n_\mu(x_1, \ldots, x_n) \overset{(2.6)}{=} \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\mu|}} b_\eta(\mu) r_\eta(x_1, \ldots, x_n) \overset{(2.7)}{=} \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\mu|}} b_\eta(\mu) \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\eta|}} c_\lambda(\eta) s_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Andererseits gilt aber auch:

$$n_\mu(x_1, \ldots, x_n) \overset{(2.2)}{=} \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Somit erhalten wir

$$a_\lambda(\mu) = \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\mu|}} b_\eta(\mu) \underbrace{c_\lambda(\eta)}_{\in \mathbb{Z}} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad a_\lambda \in \sum_{\substack{L(\eta)\leq n\\ |\eta|=|\lambda|}} \mathbb{Z} b_\eta.$$

(b) Da $s_\lambda$ und $r_\lambda$ denselben führenden Term, nämlich $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$, haben, kann $s_\lambda$ als die Summe von $r_\lambda$ und einem symmetrischen Polynom von kleinerem Grad als $|\lambda|$ geschrieben werden. Dieses symmetrische Polynom kann wiederum in Termen von $r_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \lambda$ ausgedrückt werden. Beides zusammen ergibt:

$$s_\lambda = r_\lambda + \sum_{\substack{L(\lambda')\leq n\\ \lambda'<\lambda}} \gamma_{\lambda,\lambda'} r_{\lambda'} \text{ mit } \gamma_{\lambda,\lambda'} \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten damit:

$$n_\mu(x_1,\dots,x_n) \overset{(2.2)}{=} \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$$

$$= \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} \left( a_\lambda(\mu) r_\lambda(x_1,\dots,x_n) + a_\lambda(\mu) \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ \lambda'<\lambda}} \gamma_{\lambda,\lambda'} r_{\lambda'}(x_1,\dots,x_n) \right).$$

Es gilt aber auch:

$$n_\mu(x_1,\dots,x_n) \overset{(2.6)}{=} \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ |\lambda|=|\mu|}} b_\lambda(\mu) r_\lambda(x_1,\dots,x_n).$$

Durch Koeffizientenvergleich von $r_\eta(x_1,\dots,x_n)$ mit $L(\eta)\leq n$ und $|\eta|=|\mu|$ folgt daraus

$$b_\eta(\mu) = a_\eta(\mu) + \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ \lambda>\eta}} a_\lambda(\mu) \underbrace{\gamma_{\lambda,\eta}}_{\in\mathbb{Z}} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad b_\eta \in a_\eta + \sum_{\substack{L(\lambda)\leq n\\ \lambda>\eta}} \mathbb{Z} a_\lambda.$$

(c) Nach Proposition 2.32 gilt für $\mu \in \mathcal{P}_m$

$$\begin{aligned}(x_1^{\mu_1} + x_2^{\mu_1} + \ldots + x_n^{\mu_1})&(x_1^{\mu_2} + x_2^{\mu_2} + \ldots + x_n^{\mu_2})(x_1^{\mu_m} + x_2^{\mu_m} + \ldots + x_n^{\mu_m})\\ &= \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{P}_m\\ L(\eta)\leq n}} b_\eta(\mu)\left(x_1^{\eta_1}x_2^{\eta_2}\cdots x_n^{\eta_n} + x_2^{\eta_1}x_1^{\eta_2}\cdots x_n^{\eta_n} + \ldots + x_n^{\eta_1}x_{n-1}^{\eta_2}\cdots x_1^{\eta_n}\right).\end{aligned}$$

Um $b_\lambda(\mu)$ zu bestimmen, vergleichen wir die Koeffizienten von $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$: In der rechten Seite der Gleichung ist der Koeffizient gerade $b_\lambda(\mu)$. Auf der linken Seite ist er gleich der Anzahl Möglichkeiten, auf die man die $\mu_j$ für $1\leq j\leq n$ so gruppieren kann, dass jeweils die Summe aller $\mu_j$ in der i-ten Gruppe dem Wert von $\lambda_i$ entspricht. Also erhalten wir für $\lambda \in \mathcal{P}_m$ mit $L(\lambda)\leq n$:

$$\begin{aligned} b_\lambda(\mu) = \#\ &\text{Möglichkeiten für eine Zerlegung von } \{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m\} \text{ in } n \text{ Teilmengen}\\ &M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n, \text{ so dass jedes } \mu_j \text{ in genau einem } M_i \text{ vorkommt und}\\ &\sum_{\mu_j\in M_i} \mu_j = \lambda_i \text{ für alle } 1\leq i\leq n.\end{aligned}$$

Sei $\rho$ die 1-dimensionale triviale Darstellung von $S_\lambda$, also

$$\rho : S_\lambda \longrightarrow \mathrm{End}(K) \text{ mit } \rho(\eta) = \mathrm{id} \text{ für alle } \eta \in S_\lambda.$$

Via dem kanonischen Isomorphismus $\varphi : K[S_m]\otimes_{K[S_\lambda]} K \longrightarrow K[S_m/S_\lambda]$ , $\sum_{\tau\in S_m}\alpha_\tau\tau\otimes k \mapsto \sum_{\tau\in S_m} k\alpha_\tau\tau S_\lambda$ erhalten wir den von $K$ induzierten $K[S_m]$-Linksmodul $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} K = K[S_m]\otimes_{K[S_\lambda]} K \cong K[S_m/S_\lambda]$. Mit der Linksaktion

$$S_m \times \Big(K[S_m]\otimes_{K[S_\lambda]} K\Big) \longrightarrow K[S_m]\otimes_{K[S_\lambda]} K \quad , \quad \sigma(\sum_i \alpha_i\tau_i\otimes k_i) = \sum_i \alpha_i(\sigma\circ\tau_i)\otimes k_i$$

ist die von $\rho$ induzierte Darstellung die Permutationsdarstellung auf $K[S_m/S_\lambda]$:

$$\tilde{\rho} := \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} \rho : S_m \longrightarrow \mathrm{End}\,(K[S_m/S_\lambda]) \qquad \text{gegeben durch} \qquad \tilde{\rho}(\sigma)(\tau S_\lambda) = (\sigma\tau)S_\lambda.$$

Der von der 1-dimensionalen trivialen Darstellung induzierte Charakter ist somit:

$$\psi(\sigma) = \#\ \text{Fixpunkte } \tau S_\lambda \in S_m/S_\lambda \text{ von } \tilde{\rho}(\sigma) \qquad \text{für alle } \sigma \in S_m.$$

Für $\sigma \in S_m$ vom Zykeltyp $\mu$ haben wir folgende Bijektion:

$$\left\{\tau \in S_m \mid \tau^{-1}\sigma\tau \in S_\lambda\right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Zerlegung von } \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\} \text{ in } n \text{ Teilmengen} \\ M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \text{ so dass jedes } \mu_j \text{ in genau einem} \\ M_i \text{ vorkommt und } \sum_{\mu_j \in M_i} \mu_j = \lambda_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}.$$

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} b_\lambda(\sigma) := b_\lambda(\mu[\sigma]) &= \#\left\{\tau \in S_m \mid \tau^{-1}\sigma\tau \in S_\lambda\right\} \\ &= \#\left\{\tau \in S_m \mid \sigma\tau \in \tau S_\lambda\right\} = \#\{\tau \in S_m \mid (\sigma\tau)S_\lambda \subset \tau S_\lambda\} \\ &= \#\{\tau \in S_m \mid (\sigma\tau)S_\lambda = \tau S_\lambda\} = \#\{\tau \in S_m \mid \tau S_\lambda \text{ ist ein Fixpunkt von } \tilde{\rho}(\sigma)\} \\ &= \psi(\sigma) \end{aligned}$$

□

**Satz 2.34** *Für jedes $\lambda \in \mathcal{P}_m$ gibt es eine irreduzible $K$-lineare Darstellung von $S_m$ mit Charakter $a_\lambda$. Insbesondere sind die $a_\lambda$, mit $\lambda \in \mathcal{P}_m$, gerade die irreduziblen Charaktere der $S_m$.*

**Beweis** Da nach dem Satz von Maschke $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} T$ vollständig reduzibel ist, erhalten wir die isotypische Zerlegung $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$. Sei $\chi_i$ der Charakter der irreduziblen Darstellung $U_i$. Da $b_\lambda$ nach Lemma 2.33 (c) der Charakter von $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} T$ ist, gilt $b_\lambda = \sum_i n_i \chi_i$. Somit erhalten wir nach Teil (a) desselben Lemmas

$$a_\lambda = \sum_i \gamma_i \chi_i \qquad \text{für } \gamma_i \in \mathbb{Z} \text{ und irreduzible Charaktere } \chi_i.$$

Mithilfe der Orthogonalitätsrelationen von $a_\lambda$ und dem Skalarprodukt

$$\langle \chi, \chi' \rangle := \frac{1}{|S_m|} \sum_{\sigma \in S_m} \chi(\sigma)\overline{\chi'(\sigma)}$$

berechnet man

$$\begin{aligned} m! &\overset{(2.29)}{=} \sum_{\sigma \in S_m} a_\lambda(\sigma) a_\lambda(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_m} \left(\sum_i \gamma_i \chi_i(\sigma)\right)^2 = \sum_{\sigma \in S_m} \left(\sum_i \gamma_i^2 \chi_i(\sigma)^2 + \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j \chi_i(\sigma)\chi_j(\sigma)\right) \\ &= \sum_i \gamma_i^2 \sum_{\sigma \in S_m} \chi_i(\sigma)^2 + \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j \sum_{\sigma \in S_m} \chi_i(\sigma)\chi_j(\sigma) \\ &\overset{\substack{\overline{\chi_j(\sigma)} = \chi_j(\sigma^{-1}) \\ = \chi_j(\sigma)}}{=} \sum_i \gamma_i^2 |S_m| \underbrace{\langle \chi_i, \chi_j \rangle}_{=1} + \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j |S_m| \underbrace{\langle \chi_i, \chi_j \rangle}_{=0} = \sum_i \gamma_i^2 m!. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$\sum_i \gamma_i^2 = 1.$$

Da $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ ist, existiert ein $k$, so dass $\gamma_k \in \{\pm 1\}$ und $\gamma_i = 0$ für alle $i \neq k$. Somit ist $a_\lambda \in \{\chi_k, -\chi_k\}$, also ist entweder $a_\lambda$ oder $-a_\lambda$ ein irreduzibler Charakter. Wir wissen, dass $b_\lambda = \sum_i n_i \chi_i$ die Summe von irreduziblen Charakteren mit positiven Koeffizienten ist und nach Lemma 2.33 (b) gilt ausserdem $b_\lambda = a_\lambda + \sum_{\eta > \lambda} \gamma_{\lambda,\eta} a_\eta$. Daher muss $a_\lambda$ das positive Vielfache eines Charakters sein, also $a_\lambda = \chi_k$. Da $a_\lambda$ mit Vielfachheit 1 in $b_\lambda$ auftritt, besitzt $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m} T$ eine eindeutige Unterdarstellung mit Charakter $a_\lambda$. Dies beweist den ersten Teil des Satzes. Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, dass es gleich viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $S_m$ wie Konjugationsklassen von $S_m$, also $\#\{\lambda \in \mathcal{P}_m\}$ gibt.$\square$

**Bemerkung 2.35** Die irreduzible Darstellung von $S_m$ mit Charakter $a_\lambda$ wird Specht-Modul genannt und mit $M_\lambda$ bezeichnet.

# 3. Polynomiale irreduzible Darstellungen von $\mathrm{GL_n}$

In diesem Kapitel benutzen wir die Schur-Weyl Dualität aus Kapitel 1 sowie die Ergebnisse aus Kapitel 2 um die Charaktere der irreduziblen polynomialen Darstellungen von $GL_n$ zu bestimmen. Sei $K$ ein unendlicher Körper. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale Vektorräume über $K$.

**Definition 3.1** *Eine Funktion* $f : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow K$ *heisst* polynomial*, falls sie die Einschränkung einer polynomialen Funktion* $f' \in K[\mathrm{End}(V)]$ *ist.*

**Definition 3.2** *Eine Darstellung* $\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ *von* $\mathrm{GL}(V)$ *heisst* polynomial*, falls die Einträge* $\rho_{ij}(g)$ *der Matrix* $\rho(g)$ *bezüglich einer (und somit jeder) Basis von* $W$ *polynomiale Funktionen auf* $\mathrm{GL}(V)$ *sind.*

**Lemma 3.3** *Sei* $\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ *eine poynomiale Darstellung von* $\mathrm{GL}(V)$. *Dann hat* $\rho$ *eine eindeutige Erweiterung zu einer polynomialen Funktion* $\rho' : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(W)$.

**Beweis** Sei $\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ eine polynomiale Darstellung von $GL(V)$. Wähle eine Basis von $W$. Per Definition ist $\rho_{ij} : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow K$ für alle $i, j$ die Einschränkung einer polynomialen Funktion $\rho'_{ij} \in K[\mathrm{End}(V)]$. Definiere $\rho' : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(W)$ als die Matrix mit Einträgen $\rho'_{ij}$ bezüglich der gewählten Basis von $W$. □

**Proposition 3.4** *Es gelten folgende Eigenschaften:*

*(a) Alle Unterdarstellungen polynomialer Darstellungen von* $GL(V)$ *sind polynomial.*

*(b) Die direkte Summe zweier polynomialer Darstellungen von* $GL(V)$ *ist eine polynomiale Darstellung von* $GL(V)$.

*(c) Das Tensorprodukt zweier polynomialer Darstellungen von* $GL(V)$ *ist eine polynomiale Darstellung von* $GL(V)$.

**Beweis** (a) Sei $\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ eine polynomiale Darstellung von $\mathrm{GL}(V)$ und $\tilde{\rho} : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(\tilde{W})$ eine Unterdarstellung von $\rho$. Sei $\tilde{\beta}$ eine Basis von $\tilde{W}$ mit erweiterter Basis $\beta$ von $W$. Dann ist die Matrixdarstellung von $\rho(g)$ für $g \in \mathrm{GL}(V)$ gegeben durch

$$[\rho(g)]_\beta = \begin{pmatrix} [\tilde{\rho}(g)]_{\tilde{\beta}} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $\tilde{\rho}$ ebenfalls eine polynomiale Darstellung.
(b) Seien $\rho_1 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_1)$ und $\rho_2 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_2)$ polynomiale Darstellungen von $\mathrm{GL}(V)$. Sei $\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_1 \oplus W_2)$ die direkte Summe dieser beiden Darstellungen. Sei $\beta_1$ eine Basis von $W_1$ und $\beta_2$ eine Basis von $W_2$. Dann ist $\beta := \{\beta_1, \beta_2\}$ eine Basis von $W_1 \oplus W_2$ und für alle $g \in \mathrm{GL}(V)$ ist die Matrix von $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)$ bezüglich dieser Matrix

$$[(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)]_\beta = \begin{pmatrix} [\rho_1(g)]_{\beta_1} & 0 \\ 0 & [\rho_2(g)]_{\beta_2} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\rho_1 \oplus \rho_2$ ebenfalls polynomial.
(c) Seien $\rho_1 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_1)$ und $\rho_2 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_2)$ polynomiale Darstellungen von $\mathrm{GL}(V)$. Sei $\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W_1 \otimes W_2)$ das Tensorprodukt dieser beiden Darstellungen. Sei $\beta^{(1)}$ eine Basis von $W_1$ und $\beta^{(2)}$ eine von $W_2$. Dann ist $\beta := \{\beta_i^{(1)} \otimes \beta_j^{(2)}\}_{i,j}$ eine Basis von $W_1 \otimes W_2$. Für $g \in \mathrm{GL}(V)$ sind die Einträge der Matrix $[\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)]_\beta = [\rho_1(g)]_{\beta^{(1)}} \otimes [\rho_2(g)]_{\beta^{(2)}}$ Produkte von jeweils einem Eintrag von $[\rho_1(g)]_{\beta^{(1)}}$ und einem Eintrag von $[\rho_2(g)]_{\beta^{(2)}}$. Dadurch ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ wiederum eine polynomiale Darstellung. $\square$

**Korollar 3.5** *Das Tensorprodukt $V^{\otimes m}$ ist eine polynomiale Darstellung von $GL(V)$.*

Sei von nun an $n := \dim(V)$, also $V \cong K^n$.

**Proposition 3.6** *Jede endlich-dimensionale polynomiale Darstellung von* $\mathrm{GL}(V)$ *ist isomorph zu einer Unterdarstellung einer direkten Summe der Form $\bigoplus_i V^{\otimes m_i}$.*

**Beweis** Sei $\rho : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$ eine polynomiale Darstellung von $\mathrm{GL}(V)$ und $\tilde{\rho} : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(U)$ ihre Erweiterung wie in Lemma 3.3. Betrachte die Linksaktion von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{End}(V)$ gegeben durch

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V) \quad , \quad (g, A) \mapsto g \cdot A := Ag^{-1}.$$

Definiere für jedes $\lambda \in U^* := \{f : U \to K \text{ linear}\}$ die lineare Abbildung

$$\varphi_\lambda : U \longrightarrow K[\mathrm{End}(V)] \quad \text{durch} \quad \varphi_\lambda(u)(A) := \lambda\left(\tilde{\rho}(A)u\right) \text{ für alle } u \in U \text{ und } A \in \mathrm{End}(V).$$

Sei $u \in U$ und $A \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt für alle $g \in GL(V)$:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\rho(g)u)(A) &= \varphi_\lambda(\tilde{\rho}(g)u)(A) = \lambda\left(\tilde{\rho}(A)\tilde{\rho}(g)u\right) \\ &= \lambda\left(\tilde{\rho}(Ag)u\right) = \varphi_\lambda(u)(Ag) = \left(g\varphi_\lambda(u)\right)(A). \end{aligned}$$

Demnach ist $\varphi_\lambda$ eine $\mathrm{GL}(V)$-äquivariante Abbildung. Sei $m := \dim(U)$. Wähle eine Basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $U^*$ und betrachte die Abbildung

$$\varphi : U \longrightarrow K[\mathrm{End}(V)]^m \quad , \quad u \mapsto (\varphi_{\lambda_1}(u), \ldots, \varphi_{\lambda_m}(u))$$

Sei $u \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann ist $\varphi_{\lambda_i}(u)(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{End}(V)$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$. Für $\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$ gilt also

$$0 = \varphi_{\lambda_i}(u)(\mathrm{id}_V) = \lambda_i(\underbrace{\tilde{\rho}(\mathrm{id}_V)}_{=\mathrm{id}_U} u) = \lambda_i(u) \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}$$

und somit ist $u = 0$. Dies beweist die Injektivität der $\mathrm{GL}(V)$-äquivarianten Abbildung $\varphi$. Mit dem Homomorphiesatz folgt $U \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$ und folglich erscheint die $m$-dimensionale polynomiale Darstellung $U$ von $\mathrm{GL}(V)$ als Unterdarstellung von $K[\mathrm{End}(V)]^m$. Es bleibt zu zeigen, dass jede endlich-dimensionale Unterdarstellung von $K[\mathrm{End}(V)]^m$ als Unterdarstellung in einem $\bigoplus_i V^{\otimes m_i}$ auftaucht. Nach der Definition der Aktion von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{End}(V)$ gilt $\mathrm{End}(V) \cong (V^*)^n$. Durch das Identifizieren des Unterraums der homogenen Polynome von Grad $d$, nämlich $K[W]_d$, mit den symmetrischen Potenzen von $W^*$, nämlich $S^d(W^*)$, erhält man mit $W = (V^*)^n$:

$$\begin{aligned} K[\mathrm{End}(V)] &\cong K[(V^*)^n] = \bigoplus_d K[(V^*)^n]_d \cong \bigoplus_d S^d(((V^*)^n)^*) = \bigoplus_d S^d(V^n) \\ &= S(V^n) \cong \underbrace{S(V) \otimes \ldots \otimes S(V)}_{n \text{ mal}}. \end{aligned}$$

Für die symmetrische K-Algebra gilt $S(V) = \bigoplus_{j \geq 0} S^j(V)$ und für jedes $j \geq 0$ erhalten wir eine $\mathrm{GL}(V)$-lineare Einbettung in $V^{\otimes j}$ wie folgt:

$$S^j(V) \hookrightarrow V^{\otimes j} \quad , \quad v_1 v_2 \cdots v_j \mapsto \sum_{\sigma \in S_j} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(j)}.$$

Dadurch kann $S^j(V)$ mit den symmetrischen Tensoren in $V^{\otimes j}$ identifiziert werden. Insgesamt erhalten wir also eine $\mathrm{GL}(V)$-äquivariante Einbettung von jeder endlich-dimensionalen Unterdarstellung von $K[\mathrm{End}(V)]^m$ in eine direkte Summe von Tensorprodukten $V^{\otimes j}$, was die Proposition beweist. $\square$

**Korollar 3.7** *Für jede irreduzible polynomiale Darstellung $U$ von $GL(V)$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, so dass $U$ eine Unterdarstellung von $V^{\otimes m}$ ist.*

**Beweis** Die Existenz folgt aus Proposition 3.6. Sei die irreduzible polynomiale Darstellung $U$ eine Unterdarstellung sowohl von $V^{\otimes m}$ als auch von $V^{\otimes l}$. Für $t \in K \setminus \{0\}$ und $g = \mathrm{diag}(t, \ldots, t) \in \mathrm{GL}_n(K) = \mathrm{GL}(V)$ betrachten wir $\rho(g) \in \mathrm{End}(U)$. Einerseits ist $U$ eine Unterdarstellung von $V^{\otimes m}$ und $\rho(g)$ folglich die Einschränkung von

$$\tilde{\rho}(g) : V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes m} \quad , \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \mapsto g v_1 \otimes \ldots \otimes g v_m = t v_1 \otimes \ldots \otimes t v_m = t^m v_1 \otimes \ldots \otimes v_m.$$

Also ist $\rho(g) = t^m \, \mathrm{id}_U$. Betrachten wir andererseits $U$ als Unterdarstellung von $V^{\otimes l}$, so erhalten wir analog $\rho(g) = t^l \, \mathrm{id}_U$. Da $U$ irreduzibel und somit nicht trivial ist, folgt daraus $m = l$. $\square$

**Proposition 3.8** *Die Menge der diagonalisierbaren Matrizen ist Zariski-dicht in* $\mathrm{GL}_n(K)$.

**Beweis** Für $n = 1$ gilt die Aussage, da bereits jede Matrix diagonal ist. Sei also $n > 1$. Jede Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar. Somit reicht es zu zeigen, dass die Menge der Matrizen mit paarweise verschiedenen Eigenwerten Zariski-dicht in $\mathrm{GL}_n(K)$ ist. Für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ bezeichne $D(A)$ die Diskriminante von $A$. Es gilt genau dann $D(A) \neq 0$, wenn $A$ paarweise verschiedene Eigenwerte hat. Da beispielsweise die Diagonalmatrix $diag(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ für paarweise verschiedene $k_i \in K \setminus \{0\}$ in $\mathrm{GL}_n(K)$ liegt und paarweise verschiedene Eigenwerte hat, ist $D \in K[\mathrm{GL}_n(K)]$ nicht null. Nach Lemma 1.7 ist die Menge $\{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid D(A) \neq 0\}$ Zariski-dicht in $\mathrm{GL}_n(K)$, was die Proposition beweist. $\square$

**Bemerkung 3.9** Da die Menge der diagonalisierbaren Matrizen nach Proposition 3.8 Zariski-dicht in $\mathrm{GL}_n(K)$ ist, ist der Charakter einer polynomialen irreduziblen Darstellung auf $\mathrm{GL}(V)$ durch seine Werte auf den diagonalisierbaren Matrizen eindeutig bestimmt. Per Definition ist jede diagonalisierbare Matrix in derselben Konjugationsklasse wie eine Diagonalmatrix. Folglich reicht es, die Charaktere einer polynomialen irreduziblen Darstellung auf den Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \text{ mit } t_i \in K^* = \mathrm{GL}_1(K) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n$$

zu definieren.

**Definition 3.10** *Der $n$-dimensionale* Torus *ist definiert als*

$$T_n := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{GL}_1(K) \right\}.$$

Sei $\sigma \in S_m$ von Zykeltyp $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathcal{P}_m$. Betrachte den Endomorphismus

$$\varphi := \sigma \circ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} : V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes m}.$$

Es gilt:

$$\varphi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = \sigma\left(\begin{pmatrix} x_1 v_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n v_1^{(n)} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} x_1 v_m^{(1)} \\ \vdots \\ x_n v_m^{(n)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 v_{\sigma^{-1}(1)}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n v_{\sigma^{-1}(1)}^{(n)} \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} x_1 v_{\sigma^{-1}(m)}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n v_{\sigma^{-1}(m)}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.11** *Die Spur von $\varphi$ ist* $\mathrm{Spur}(\varphi) = n_\mu(x_1, \ldots, x_n)$.

**Beweis** Betrachte die bezüglich des Skalarprodukts $\langle e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}, e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m} \rangle = \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_m,j_m}$ orthonormale Basis $(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m})_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\}}$ von $V^{\otimes m}$. Für diese Basiselemente gilt wegen $e^{(j)}_{i_{\sigma^{-1}(k)}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i_{\sigma^{-1}(k)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m} &= \begin{pmatrix} x_1 e^{(1)}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \\ \vdots \\ x_n e^{(n)}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} x_1 e^{(1)}_{i_{\sigma^{-1}(m)}} \\ \vdots \\ x_n e^{(n)}_{i_{\sigma^{-1}(m)}} \end{pmatrix} \\
&= x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \ldots \otimes x_{i_{\sigma^{-1}(m)}} e_{i_{\sigma^{-1}(m)}}.
\end{aligned}$$

Die Spur von $\varphi$ berechnet man nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(\varphi) &= \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\}} \langle \varphi(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}), e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m} \rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\}} x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_{i_{\sigma^{-1}(m)}} \underbrace{\langle e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(m)}}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m} \rangle}_{=\delta_{i_{\sigma^{-1}(1)},i_1} \cdots \delta_{i_{\sigma^{-1}(m)},i_m}} \\
&= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\} \\ i_{\sigma^{-1}(k)} = i_k \text{ für alle } 1 \le k \le m}} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\sigma$ von der Form $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ \mu_1)(\mu_1 + 1\ \cdots\ \mu_1 + \mu_2) \cdots (m - \mu_s + 1\ \cdots\ m)$ ist. Somit erhalten wir aus der Bedingung $i_{\sigma^{-1}(k)} = i_k$ für alle $1 \le k \le m$, dass $i_1 = i_{\sigma^{-1}(1)} = i_{\mu_1} = i_{\sigma^{-1}(\mu_1)} = i_{\mu_1 - 1} = \ldots = i_2$ etc. ist. Dadurch ergibt sich für die Spur von $\varphi$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(\varphi) &= \sum_{j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} x_{j_1}^{\mu_1} \cdots x_{j_s}^{\mu_s} = \underbrace{\Big( \sum_{j_1 \in \{1,\ldots,n\}} x_{j_1}^{\mu_1} \Big)}_{=x_1^{\mu_1} + \ldots + x_n^{\mu_1}} \cdots \underbrace{\Big( \sum_{j_s \in \{1,\ldots,n\}} x_{j_s}^{\mu_s} \Big)}_{=x_1^{\mu_s} + \ldots + x_n^{\mu_s}} \\
&= \prod_{i=1}^{s} (x_1^{\mu_i} + \ldots + x_n^{\mu_i}) = \prod_{i=1}^{s} n_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n) = n_\mu(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels. Sei $K$ algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik 0.

**Satz 3.12** *Für jede Partition $\lambda$ mit $L(\lambda) \le n$ gibt es eine irreduzible polynomiale Darstellung $L_\lambda$ von $GL_n$, deren Charakter gerade das Schur-Polynom $s_\lambda$ ist. Insbesondere repräsentieren die $L_\lambda$, mit $L(\lambda) \le n$, alle Äquivalenzklassen irreduzibler polynomialer Darstellungen von $GL_n$.*

**Beweis** Sei $m := |\lambda|$. Betrachte die Darstellung von $S_m \times GL_n$ auf $V^{\otimes m}$ mit dem Charakter

$$\chi(\sigma; x_1, \ldots, x_n) := \operatorname{Spur}\left(\sigma \circ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}\right) : S_m \times T_n \longrightarrow K.$$

Da die Äquivalenzklassen irreduzibler Charaktere von $S_m$ eine $\mathbb{Z}$-Basis der Klassenfunktionen auf $S_m$ bilden, trifft dies nach Satz 2.34 auch auf die $a_\lambda$, mit $\lambda \in \mathcal{P}_m$, zu. Somit existieren eindeutige $s'_\lambda \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ mit

$$\chi = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m} a_\lambda s'_\lambda. \tag{3.1}$$

Nach Proposition 3.11 gilt für die Partition $\mu = \mu([\sigma]) \in \mathcal{P}_m$:

$$\chi(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = n_\mu(x_1, \ldots, x_n) \overset{(2.2)}{=} \sum_{\substack{L(\lambda) \leq n \\ |\lambda| = \underbrace{|\mu|}_{=m}}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_m \\ L(\lambda) \leq n}} a_\lambda(\mu) s_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Somit erhalten wir für $\lambda \in \mathcal{P}_m$:

$$s'_\lambda = \begin{cases} s_\lambda & \text{falls } L(\lambda) \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{3.2}$$

Andererseits folgt aus der Zerlegung in der Schur-Weyl Dualität Satz 1.25 (c) die Existenz paarweise nicht-isomorpher irreduzibler Darstellungen $L_\lambda$ von $GL_n$ und einer Teilmenge $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}_m$, so dass $V^{\otimes m} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}'} M_\lambda \otimes L_\lambda$ ist. Nach Korollar 3.5 und Proposition 3.4 (a) sind die $L_\lambda$ ausserdem polynomiale Darstellungen. Wegen der Eindeutigkeit von $s'_\lambda$ in Gleichung (3.1) gilt für den Charakter $\chi_{L_\lambda}$ von $L_\lambda$:

$$s'_\lambda = \begin{cases} \chi_{L_\lambda} & \text{falls } \lambda \in \mathcal{P}' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ein Vergleich mit (3.2) liefert unter Berücksichtigung der Tatsache, dass ein Charakter $\chi_{L_\lambda}$ niemals konstant gleich null sein kann:

$$\chi_{L_\lambda} = s_\lambda \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}' = \{\lambda \in \mathcal{P}_m \mid L(\lambda) \leq n\}.$$

Dies beweist den ersten Teil des Satzes. Der zweite Teil folgt mit Korollar 3.7. $\square$

**Bemerkung 3.13** Für $n = \dim(V) \geq m$ gilt $L(\lambda) \leq m \leq n$ für jedes $\lambda \in \mathcal{P}_m$. Im Beweis von Satz 3.12 haben wir somit $\mathcal{P}' = \{\lambda \in \mathcal{P}_m \mid L(\lambda) \leq n\} = \mathcal{P}_m$, also

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_m} M_\lambda \otimes L_\lambda.$$

Dies stimmt mit der Aussage von Lemma 1.27 überein.

# 4. Beispiele

Mit der erarbeiteten Theorie wollen wir ein paar Beispiele explizit berechnen. Als erstes betrachten wir ein eher einfaches Beispiel, um die einzelnen Rechenschritte genau ausführen zu können. Danach demonstrieren wir, dass mit dieser Methode auch für grössere Gruppen $S_m$ (respektive $GL_n$) die irreduziblen (respektive polynomialen irreduziblen) Charaktere leicht berechnet werden können, sofern man einen Rechner zur Hand hat.

**Beispiel 4.1** Sei $K = \mathbb{C}$. Wir wollen zeigen, dass die Charaktertafel der Gruppe $S_3$ wie folgt aussieht:

| | id | (1 2) | (1 2 3) |
|---|---|---|---|
| $\chi_{\text{trivial}}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{\text{sgn}}$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_{\text{Standard}}$ | 2 | 0 | -1 |

Beachte, dass man im Fall von $S_3$ mit anderen Methoden sehr viel schneller auf diese Charaktertafel kommt. Dennoch wollen wir an dieser Stelle die Theorie aus Kapitel 2 benutzen, um die Rechnungen zu demonstrieren.

Sei also $m = n = 3$. Die Vandermonde-Determinante ist

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j) = x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2.$$

Die Partitionen von $m = 3$ sind:

$$\lambda = (3, 0, 0) \qquad \mu = (2, 1, 0) \qquad \eta = (1, 1, 1)$$

Zu jeder dieser Partitionen gibt es genau eine irreduzible Darstellung von $S_3$. Im Folgenden berechnen wir die entsprechenden Charaktere:

- Um die Werte der drei Charaktere auf der durch $\lambda$ beziehungsweise (1 2 3) repräsentierten Konjugationsklasse zu berechnen, benötigt man das Polynom $\Delta \cdot n_\lambda$.

$$n_\lambda(x_1, x_2, x_3) = n_3(x_1, x_2, x_3) \cdot \underbrace{n_0(x_1, x_2, x_3)}_{=1} \cdot \underbrace{n_0(x_1, x_2, x_3)}_{=1} = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, x_3) \cdot n_\lambda(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \\ &= x_1^5 x_2 - x_1^5 x_3 - x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 \\ &\quad - x_1^2 x_3^4 - x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 - x_1 x_2^5 + x_1 x_3^5 + x_1 x_2^3 x_3^2 \\ &\quad - x_1 x_2^2 x_3^3 + x_2^5 x_3 - x_2^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^4 - x_2 x_3^5 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Für den Charakter bezüglich der Partition $(3,0,0)$ erhalten wir mit $l_1 = \lambda_1 + n - 1 = 3+3-1 = 5$ und $l_2 = \lambda_2 + n - 2 = 0+3-2 = 1$ sowie $l_3 = \lambda_3 + n - 3 = 0+3-3 = 0$:

$$[\Delta \cdot n_\lambda]_{5,1,0} = \text{Koeffizient von } x_1^5 x_2 \text{ in Polynom (4.1)} = 1.$$

Für die anderen beiden Charaktere erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[\Delta \cdot n_\lambda]_{4,2,0} &= \text{Koeffizient von } x_1^4 x_2^2 \text{ in Polynom (4.1)} = -1 \\
[\Delta \cdot n_\lambda]_{3,2,1} &= \text{Koeffizient von } x_1^3 x_2^2 x_3 \text{ in Polynom (4.1)} = 1
\end{aligned}$$

- Für die Konjugationsklasse, die durch $\mu$ beziehungsweise $(1\ 2)(3)$ repräsentiert wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
n_\mu(x_1,x_2,x_3) &= n_2(x_1,x_2,x_3) \cdot n_1(x_1,x_2,x_3) \cdot n_0(x_1,x_2,x_3) \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 1 \\
&= x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1,x_2,x_3) \cdot n_\mu(x_1,x_2,x_3) = {} & (x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2) \cdot (x_1^3 + x_1^2 x_2 \\
& + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Da wir nur 3 Koeffizienten aus (4.2) benötigen, sparen wir uns diesmal das Ausmultiplizieren und berechnen:

$$\begin{aligned}
[\Delta \cdot n_\mu]_{5,1,0} &= \text{Koeffizient von } x_1^5 x_2 \text{ in obigem Polynom} = 1 \\
[\Delta \cdot n_\mu]_{4,2,0} &= \text{Koeffizient von } x_1^4 x_2^2 \text{ in obigem Polynom} = 1 - 1 = 0 \\
[\Delta \cdot n_\mu]_{3,2,1} &= \text{Koeffizient von } x_1^3 x_2^2 x_1 \text{ in obigem Polynom} = -1 - 1 + 1 = -1
\end{aligned}$$

- Bezüglich der Konjugationsklasse von $\eta$ respektive $(1)(2)(3) = \mathrm{id}$ berechnet man:

$$\begin{aligned}
n_\eta(x_1,x_2,x_3) &= n_1(x_1,x_2,x_3) \cdot n_1(x_1,x_2,x_3) \cdot n_1(x_1,x_2,x_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1^2 x_3 + 3x_1 x_2^2 + 6x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2 x_3 + 3x_2 x_3^2 \\
&\quad + x_3^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1,x_2,x_3) \cdot n_\eta(x_1,x_2,x_3) = {} & (x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2) \cdot (x_1^3 + 3x_1^2 x_2 \\
& + 3x_1^2 x_3 + 3x_1 x_2^2 + 6x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2 x_3 \\
& + 3x_2 x_3^2 + x_3^3)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Analog wie vorhin berechnen wir die gewünschten Koeffizienten in (4.3):

$$\begin{aligned}
[\Delta \cdot n_\eta]_{5,1,0} &= \text{Koeffizient von } x_1^5 x_2 \text{ in obigem Polynom} = 1 \\
[\Delta \cdot n_\eta]_{4,2,0} &= \text{Koeffizient von } x_1^4 x_2^2 \text{ in obigem Polynom} = 3 - 1 = 2 \\
[\Delta \cdot n_\eta]_{3,2,1} &= \text{Koeffizient von } x_1^3 x_2^2 x_3 \text{ in obigem Polynom} = 6 - 3 - 3 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die gewünschte Charaktertafel. Der Charakter bezüglich der Partition $(5,1,0)$ ist folglich der triviale eindimensionale Charakter, derjenige bezüglich $(3,2,1)$ der Vorzeichen-Charakter und derjenige bezüglich $(4,2,0)$ der Charakter der zweidimensionalen Standarddarstellung.

**Beispiel 4.2** Sei $K=\mathbb{C}$. Wir wollen die irreduziblen polynomialen Charaktere vom Grad 3 von $GL_3$ berechnen. Sei $m=n=3$ und seien $\lambda$, $\mu$ und $\eta$ wie in Beispiel 4.1 die Partitionen von $m=3$. Da die gesuchten Charaktere nach Satz 3.12 die Schur-Polynome zu den drei Partitionen sind, müssen wir diese berechnen:

- Für $\lambda=(3,0,0)$ erhalten wir

  $$v_\lambda(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^5x_{\sigma(2)}^1x_{\sigma(3)}^0=x_1^5x_2-x_1^5x_3-x_1x_2^5+x_1x_3^5+x_2^5x_3-x_2x_3^5.$$

  Somit ergibt sich für das Schur-Polynom mittels Polynomdivision

  $$\begin{aligned}s_\lambda(x_1,x_2,x_3)&=\frac{v_\lambda(x_1,x_2,x_3)}{\Delta(x_1,x_2,x_3)}=\frac{x_1^5x_2-x_1^5x_3-x_1x_2^5+x_1x_3^5+x_2^5x_3-x_2x_3^5}{x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2}\\&=x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^3.\end{aligned}$$

- Für $\mu=(2,1,0)$ berechnen wir

  $$v_\mu(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^4x_{\sigma(2)}^2x_{\sigma(3)}^0=x_1^4x_2^2-x_1^4x_3^2-x_2^4x_1^2+x_2^4x_3^2+x_3^4x_1^2-x_3^4x_2^2.$$

  Das Schur-Polynom bezüglich $\mu$ ist somit

  $$\begin{aligned}s_\mu(x_1,x_2,x_3)&=\frac{v_\mu(x_1,x_2,x_3)}{\Delta(x_1,x_2,x_3)}=\frac{x_1^4x_2^2-x_1^4x_3^2-x_2^4x_1^2+x_2^4x_3^2+x_3^4x_1^2-x_3^4x_2^2}{x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2}\\&=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+2x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2.\end{aligned}$$

- Für $\eta=(1,1,1)$ haben wir folgende Polynome:

  $$\begin{aligned}v_\eta(x_1,x_2,x_3)&=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^3x_{\sigma(2)}^2x_{\sigma(3)}^1\\&=x_1^3x_2^2x_3-x_1^3x_3^2x_2-x_2^3x_1^2x_3+x_2^3x_3^2x_1-x_3^3x_2^2x_1+x_3^3x_1^2x_2\\s_\eta(x_1,x_2,x_3)&=\frac{v_\eta(x_1,x_2,x_3)}{\Delta(x_1,x_2,x_3)}=\frac{x_1^3x_2^2x_3-x_1^3x_3^2x_2-x_2^3x_1^2x_3+x_2^3x_3^2x_1-x_3^3x_2^2x_1+x_3^3x_1^2x_2}{x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2}\\&=x_1x_2x_3\end{aligned}$$

**Beispiel 4.3** Wir wollen herausfinden, welche Dimensionen die irreduziblen Darstellungen von $S_7$ haben, das heisst, welche Werte die irreduziblen Charaktere auf der trivialen Konjugationsklasse $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)=\mathrm{id}$ annehmen. Das entsprechende Newton-Polynom ist

$$n_{(1,1,1,1,1,1,1)}(x_1,\ldots,x_7)=(x_1+\ldots+x_7)^7$$

Die Partitionen von $m = 7$ sind

$$(7,0,0,0,0,0,0),(6,1,0,0,0,0,0),(5,2,0,0,0,0,0),(5,1,1,0,0,0,0,0),\dots,(1,1,1,1,1,1,1).$$

Für die dazugehörigen $(l_1,\dots,l_7)$ aus der Frobenius-Formel (2.3) erhält man

$$(13,5,4,3,2,1,0),(12,6,4,3,2,1,0),(11,7,4,3,2,1,0),(11,6,5,3,2,1,0),\dots,(7,6,5,4,3,2,1).$$

Wie in Beispiel 4.1 kann man nun mittels Polynommultiplikation, Polynomdivision und Ablesen der Koeffizienten die Werte der irreduziblen Charaktere auf der trivialen Konjugationsklasse herausfinden. In Wolfram Mathematica kann man beispielsweise mit

$$\begin{aligned}\text{Coefficient}[&(a-b)*(a-c)*(a-d)*(a-e)*(a-f)*(a-g)*(b-c)*(b-d)*(b-e)\\ &*(b-f)*(b-g)*(c-d)*(c-e)*(c-f)*(c-g)*(d-e)*(d-f)\\ &*(d-g)*(e-f)*(e-g)*(f-g)*(a+b+c+d+e+f+g)^7, a^{13}*b^5*c^4\\ &*d^3*e^2*f]\end{aligned}$$

den Wert des zu der Partition $(13,5,4,3,2,1,0)$ gehörigen irreduziblen Charakters auf der trivialen Konjugationsklasse berechnen, was 1 gibt. Analog kann man für die anderen Partitionen vorgehen und erhält insgesamt folgende Dimensionen:

$$1,6,14,15,14,35,20,21,21,35,15,14,14,6,1$$

Zur Kontrolle, kann man die Summe der Quadrate dieser Dimensionen berechnen, was tatsächlich $5040 = 7! = |S_7|$ ergibt.

# A. Anhang

Seien $V_1, \ldots, V_m$ und $W$ Vektorräume über $K$.

**A.1** ***Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts:*** *Zu jeder multilinearen Abbildung*

$$f : V_1 \times \ldots \times V_m \longrightarrow W$$

*gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$g : V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \longrightarrow W \quad \textit{mit} \quad f = g \circ \tau$$

*wobei*

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \quad , \quad (v_1, \ldots, v_m) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$$

*die multilineare kanonische Abbildung ist.*

Definieren wir also $\rho : \{v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \mid v_i \in V_i \textit{ für } 1 \leq i \leq m\} \longrightarrow W$, so entspricht dies einer multilinearen Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_m \longrightarrow W$ und $\rho$ hat eine eindeutige lineare Erweiterung $g : V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \longrightarrow W$.

**A.2** ***Satz von Wedderburn:*** *Sei $A$ eine halbeinfache endlich-dimensionale Algebra über einem Körper $K$ und $V_1, \ldots, V_r$ die nicht-isomorphen irreduziblen $A$-Linksmoduln in der isotopischen Zerlegung. Dann gilt:*

$$A \cong \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$$

*wobei $D_i = \mathrm{End}_A(V_i)^{op}$ ist und $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ sind. Des Weiteren gilt $V_i \cong D_i^{\oplus n_i}$.*

Ein Beweis kann z.B. in Knapp [2], Seite 83 ff. gefunden werden.

# Literaturverzeichnis

[1] Curtis, Charles W. ; Reiner, Irving: *Methods of Representation Theory*. John Wiley and Sons, 1981

[2] Knapp, Anthony W.: *Advanced Algebra*. Birkhäuser, 2007

[3] Kraft, Hanspeter ; Procesi, Claudio: *Classical Invariant Theory: A Primer*. Brandeis Vorlesungsausarbeitung, 1996

[4] Lambek, Joachim: *Lectures on Rings and Modules*. AMS Chelsea Publishing, 1966

[5] Nebe, Gabriele: *Algebra Vorlesung im Wintersemester 2010/2011*. Website, . – Online verfügbar unter http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/Vorl/ZT/algebra.pdf, Stand: 25. Mai 2014