Chapitre IV

Le flot des applications faiblement harmoniques en dimension deux

FLOT DES APPLICATIONS HARMONIQUES EN DIMENSION DEUX

Tristan RIVIERE

Résumé: On prouve un résultat d'existence, d'unicité et de régularité partielle pour les solutions faibles du flot des applications harmoniques en dimension deux.

I. Introduction

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$; pour tout entier $m \geq 1$ on note:

$$H^1(\Omega, S^{m-1}) = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ tel que } |u(x)| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} \tag{1}$$

Pour $u \in H^1(\Omega, S^{m-1})$, $E(u)$ désigne l'énergie de Dirichlet: $E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\, dy$. On appelle application harmonique de Ω dans S^{m-1} tout élément de $H^1(\Omega, S^{m-1})$, point critique de E pour les variations suivantes:

$$u \text{ est harmonique si : } \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \ \frac{d}{dt} E\left(\frac{u + t\phi}{|u + t\phi|}\right)_{|t=0} = 0 \tag{2}$$

une telle application vérifie alors l'équation:

$$-\Delta u = u\, |\nabla u|^2 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{3}$$

Nous nous intéressons ici au flot de la chaleur associé, c'est à dire aux applications vérifiant, pour $0 < T \leq \infty$ l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u\, |\nabla u|^2 \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega) \tag{4}$$

pour des conditions au bord et initiales données:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = \gamma(x) \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \partial\Omega \\ &u(x,0) = u^0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \end{aligned} \tag{5}$$

avec $\gamma(x) \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega, S^{m-1})$ et $u^0(x) \in H^1(\Omega, S^{m-1})$.

Le flot des applications harmoniques a été introduit pour la première fois par J. Eells et J.H. Sampson dans [8]. Dans [10], M.Struwe et dans [3], K.C.Chang (pour le problème avec bord) étudient l'existence et l'unicité de solutions de (4) et (5) dans le cas d'un nombre fini d'explosions.
Pour cela nous introduisons l'espace $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{r} u \in H^1_{loc}\left([0,+\infty) \times \overline{\Omega}\right) \ t.q. \ \exists \ T_0 = 0 < T_1 < \ldots < T_n < +\infty \\ t.q. \ \ \forall i \leq n-1 \ \ u \in L^2_{loc}\left([T_i, T_{i+1}) \times W^{22}(\Omega)\right) \end{array} \right\} \tag{6}$$

Ils obtiennent alors le résultat suivant:

Theoreme 1[10],[3]. *Soient $u^0 \in H^1(\Omega, S^{m-1})$, $\gamma(x) \in C^\infty(\partial\Omega, S^{m-1})$, il existe $u \in H^1((0,+\infty))$ solution de (4) (5) , vrifiant $E(u(\ ,t)) \leq E(u^0)$ pour tout t. u est régulière sur $(0,+\infty) \times \overline{\Omega}$ excepté en un nombre fini de point $(x_k, t_k)_{k\leq n}$. u est l'unique solution de (4) et (5) dans $\mathcal{E}$. D'autre part il existe C indpendant de u^0 telle que $n \leq C\, E(u^0)$.*

Remarque : Nous ne donnons pas ici l'énoncé complet du théorème démontré dans [10] et [3]: il contient, en plus, des informations sur le comportement asymptotique de la solution au voisinage de $+\infty$ (voir [11]).

Y. Chen, W.Y. Ding ainsi que J.M. Coron et J.M. Ghidaglia donnent des exemples, dans [4], [6] et [7], de solutions du flot en dimension deux ayant des points d'explosion: le résultat de régularité ci-dessus est donc optimal.

Nous nous interressons dans ce travail à élargir la classe d'unicité $\mathcal{E}$ à une classe plus grande.

Désormais nous nous plaçons dans le cas d'une énergie suffisament petite pour que, comme l'indique le théorème 1, il n'y ait pas d'explosions. D'aprés ce même théorème, dans ce cas il y a unicité de la solution de (4) et (5) dans
$H^1_{loc}\left([0,+\infty) \times \overline{\Omega}\right) \cap L^2_{loc}\left([0,+\infty) \times W^{22}(\overline{\Omega})\right)$.

Nous montrons ici que, sous ces conditions d'energie initiale petite, l'unicité reste vraie sans supposer u dans $L^2_{loc}\left([0,+\infty) \times W^{22}(\overline{\Omega})\right)$; précisement notre résultat principal est le suivant:

THEOREME 2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout u^0 dans $H^1(\Omega, S^{m-1})$ vérifiant $E(u^0) < \alpha$, (4) et (5) admette une unique solution dans $H^1_{loc}\left([0,+\infty) \times \overline{\Omega}\right)$ pour laquelle $E(u(\ ,t)) \leq E(u^0)$ presque pour tout temps. Cette solution est régulière sur $(0,+\infty) \times \overline{\Omega}$.*

Un des intérets principaux qui incitait à se placer sur les $L^2_{loc}\left([T_i, T_{i+1}) \times W^{22}(\Omega)\right)$ réside dans le fait que, sur de tels espaces, l'énergie $E(u(.,t))$ des solutions de (4) est décroissante en temps: on le vérifie en multipliant (4) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant en temps et en espace. On obtient ainsi:

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+ \qquad E(u(.,t_2)) - E(u(.,t_1)) = \int_{t_2}^{t_1} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 \, dx\, dy\, dt \tag{7}$$

Dès lors que nous ne supposons plus $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \in L^2((T_i;T_{i+1}) \times \Omega)$ cette opération n'a plus de sens et, sous les seules hypothèses u dans $H^1_{loc}\left([0,+\infty) \times \overline{\Omega}\right)$, pour une energie initiale quelconque, la décroissance de l'énergie en temps est un problème ouvert.

<u>II Démonstration du théorème 2</u>

Nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME . *Soient $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega, S^{m-1})$ et soit $u \in H^1(\Omega, S^{m-1})$ vérifiant:*

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; u\,|\nabla u|^2 + f \text{ dans } \Omega \\ \quad u = \gamma \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

alors $u \in H^2(\Omega, S^{m-1})$.

<u>Démonstration du lemme</u>:

La démonstration est une adaptation de la preuve de F.Hélein de la régularité des applications harmoniques entre une surface et une sphère (voir [9]).

$$\text{Pour } i,j = 1,,m \quad \text{ on a } \quad \begin{aligned} div(u^i\,\nabla u^j \;-\; u^j\,\nabla u^i) &= u^i\,\Delta u^j \;-\; u^j\,\Delta u^i \\ &= u^i\, f^j - u^j\, f^i \end{aligned} \tag{9}$$

Comme $u^i\, f^j - u^j\, f^i \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, soit $\phi^{ij} \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la solution de:

$$\begin{cases} -\Delta \phi^{ij} = u^i\, f^j - u^j\, f^i \text{ dans } \Omega \\ \quad \phi^{ij} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

On a choisi ϕ^{ij} pour que

$$div(u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i + \nabla \phi^{ij}) = 0 \tag{11}$$

Il existe donc $b^{ij} \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial b^{ij}}{\partial y} = u^i \dfrac{\partial u^j}{\partial x} - u^j \dfrac{\partial u^i}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi^{ij}}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial b^{ij}}{\partial x} = u^i \dfrac{\partial u^j}{\partial y} - u^j \dfrac{\partial u^i}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi^{ij}}{\partial y} \end{array} \right. \tag{12}$$

les b^{ij} vérifient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^j}{\partial x}\frac{\partial b^{ij}}{\partial y} - \frac{\partial u^j}{\partial y}\frac{\partial b^{ij}}{\partial x} &= u^i((\frac{\partial u^j}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u^j}{\partial y})^2) + \nabla u^j.\nabla \phi^{ij} \\ &= u^i\,|\nabla u^j|^2 + \nabla u^j.\nabla \phi^{ij} \end{aligned} \tag{13}$$

L'équation vérifiée par u^i peut ainsi s'écrire

$$\forall\, i = 1,,m \qquad -\Delta u^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u^j}{\partial x}\frac{\partial b^{ij}}{\partial y} - \frac{\partial u^j}{\partial y}\frac{\partial b^{ij}}{\partial x} - \nabla u.\nabla \phi^i + f^i \tag{14}$$

ou encore

$$\forall i = 1, ..., m \quad -\Delta u^i = [\nabla u; \nabla b^i] - \nabla u.\nabla \phi^i + f^i \tag{15}$$

où ϕ^i et b^i sont respectivement les élements de $H^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ suivant:

$$\phi^i = (\phi^{ij})_{j=1,,m} \quad \text{et} \quad b^i = (b^{ij})_{j=1,,m} \tag{16}$$

$$\text{et} \quad [\nabla u; \nabla b^i] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u^j}{\partial x}\frac{\partial b^{ij}}{\partial y} - \frac{\partial u^j}{\partial y}\frac{\partial b^{ij}}{\partial x}.$$

Si finalement on pose $[\nabla u; \nabla b] = ([\nabla u; \nabla b^i])_{i=1,,m}$ l'équation vérifiée par u s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = [\nabla u; \nabla b] - \nabla u.\nabla \phi + f \ \text{ dans } \Omega \\ \quad u = \gamma \ \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{17}$$

Soit w un élement de $H^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ de trace γ sur $\partial\Omega$, posons $v = u - w$ on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = [\nabla v; \nabla b] - \nabla u.\nabla \phi + f + \Delta w + [\nabla w; \nabla b] \quad \text{dans } \Omega \\ \quad v = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{18}$$

Posons

$$\tilde{f} = -\nabla u.\nabla\phi + f + \Delta w + [\nabla w; \nabla b] \tag{19}$$

comme $\nabla\phi^i \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$,pour tout $p < +\infty$, $\nabla\phi^i \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et donc, pour tout $q < 2$, $\nabla u.\nabla\phi \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$.
De la même façon on vérifie que, pour tout $q < 2$, $[\nabla w; \nabla b] \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$ donc, pour tout $q < 2$, $\tilde{f} \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Pour $p > 1$ on note Δ^{-1} l'inverse de l'operateur Δ de $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
L'équation vérifiée par v s'écrit alors

$$v = \Delta^{-1}([\nabla v; \nabla b] + \tilde{f}) \tag{20}$$

Nous faisons appel maintenant à une methode de décomposition de la partie la moins régulière du second membre, utilisée par J.M.Coron [5] pour prouver la régularité des solutions faibles du problème des surfaces à courbure moyenne préscrite et inspirée d'un travail de H.Brezis et T.Kato [2].

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, fixé ultérieurement, et soit $b_\varepsilon \in C^\infty(\Omega, M^m)$ tels que $||b_\varepsilon - b||_{H^1(\Omega, M^m)} < \varepsilon$ (M^m désigne les $\mathbb{R}$ matrices carrées $m \times m$) .
Posons $\tilde{b}_\varepsilon = b_\varepsilon - b$ on a ainsi

$$v + \Delta^{-1}([\nabla v; \nabla\tilde{b}_\varepsilon]) = \Delta^{-1}([\nabla v; \nabla b_\varepsilon] + \tilde{f}) \tag{21}$$

Comme pour tout $p < 2$ $[\nabla v; \nabla b_\varepsilon] + \tilde{f} \in L^p$ on a

$$\forall p < +\infty \qquad \Delta^{-1}([\nabla v; \nabla b_\varepsilon] + \tilde{f}) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \tag{22}$$

Montrons désormais que l'opérateur $\mathcal{C} : \phi \longrightarrow \phi + \Delta^{-1}([\nabla\phi; \nabla\tilde{b}_\varepsilon])$ est, pour ε suffisament petit et pour $p \geq 2$, une bijection de $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dans lui même.

<u>1^{er} cas: $p > 2$.</u>

Soit $p > 2$. Posons $\mathcal{U}(\phi) = \Delta^{-1}([\nabla\phi; \nabla\tilde{b}_\varepsilon])$ on a $\mathcal{C} = Id + \mathcal{U}$.

Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{1}{q}$; comme $p > 2$, L^q s'injecte continument dans $W^{-1,p}$.

Soit $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$; d'aprés Hölder on a

$$||[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]||_{L^q} \leq ||\nabla\phi||_{L^p}\ ||\nabla\tilde{b}_\varepsilon||_{L^2} \tag{23}$$

donc d'aprés la remarque précédente $[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon] \in W^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ et

$$||[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]||_{W^{-1,p}} \leq C\ ||[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]||_{L^q} \leq C\ ||\nabla\phi||_{L^p}\ ||\nabla\tilde{b}_\varepsilon||_{L^2} \leq C\ \varepsilon\ ||\phi||_{W_0^{1,p}} \tag{24}$$

Comme Δ^{-1} envoie continuement $W^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{U}$ envoit bien $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ et $|||\mathcal{U}||| \leq C'\varepsilon$.

Ainsi pour ε suffisament petit $Id + \mathcal{U}$ est bien une bijection de $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans lui même. (ε depend évidement de p).

<u>2^{eme} cas $p = 2$</u>.

Pour montrer que $\mathcal{C}$ réalise une bijection de $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans lui même les estimations classiques utilisées dans le cas précedent ne marchent plus; on utilise alors la forme tout à fait particulière de $[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]$ c'est à dire:

$$[\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon] = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\phi^j}{\partial x}\frac{\partial\tilde{b}_\varepsilon^{ij}}{\partial y} - \frac{\partial\phi^j}{\partial y}\frac{\partial\tilde{b}_\varepsilon^{ij}}{\partial x}\right)_{i=1,,m} \tag{25}$$

On peut alors appliquer le lemme de Wente [12] (adapté au cas d'un domaine borné dans [1]) a $\Delta^{-1}([\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon])$ ce qui nous donne

$$\begin{gathered}\Delta^{-1}([\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]) \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)\\ ||\Delta^{-1}([\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon])||_{W^{1,2}} \leq C\ ||\nabla\tilde{b}_\varepsilon||_{L^2}\ ||\nabla\phi||_{L^2} \leq C'\ \varepsilon\ ||\nabla\phi||_{L^2}\end{gathered} \tag{26}$$

Donc comme dans le cas précédent l'opérateur $\mathcal{U}$ applique $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans lui même et est de norme aussi petite que l'on veut pour ε suffisament petit; pour un tel ε, $\mathcal{C}$ est une bijection de $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dans lui même .

Ainsi pour ε suffisament petit

$$\exists\ !\ \phi \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m) \quad \text{tel que} \quad \phi + \Delta^{-1}([\nabla\phi;\nabla\tilde{b}_\varepsilon]) = \Delta^{-1}([\nabla v;\nabla b_\varepsilon] + \tilde{f}) \tag{27}$$

Ce ϕ est évidement le même que celui du premier cas, il est donc en particulier dans $W_0^{1,4}$ pour ε suffisament petit; naturellement $\phi = v$ et donc u est dans $W^{1,4}$.
Ainsi $\Delta u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ avec $u/_{\partial\Omega} \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega, S^{m-1})$ ce qui nous asssure que u est dans $H^2(\Omega, S^{m-1})$. Le lemme est démontré. $\triangle$

Soit u solution faible de (4) et (5) dans $H^1(]0,T[\times\Omega; S^{m-1}) \cap L^\infty(]0,T[, H^1(\Omega))$. D'aprés Fubini presque pour tout temps $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ donc d'aprés le lemme précédent $u \in H^2(\Omega)$ et

$$p.p.\ t \quad ||u(.,t)||^2_{H^2(\Omega)} \leq C \left(||\ |\nabla u(.,t)|^2\ ||^2_{L^2(\Omega)} + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}(.,t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + ||\gamma||^2_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \right) \tag{28}$$

On utilise l'inégalité d'interpolation suivante due a O.A.Ladyzenskaya et N.N Ural'ceva: soit ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$ alors

$$\exists\ C' > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall v \in W^{1,2}(\omega) \quad ||v||_{L^4} \leq C'\ ||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2}\ ||v||^{\frac{1}{2}}_{W^{1,2}} \tag{29}$$

On l'applique à $v = \nabla u$ sur $\omega = \Omega$ et pour presque tout temps soit:

$$\begin{aligned} p.p.\ t \quad \int_\Omega |\nabla u|^4\, dx\, dy &\leq C' \int_\Omega |\nabla u(.,t)|^2\, dx\, dy\ ||u(.,t)||^2_{H^2} \\ &\leq C'\ ||u||^2_{L^\infty(]0,T[,H^1(\Omega))}\ ||u(.,t)||^2_{H^2} \end{aligned} \tag{30}$$

(28) et (30) donnent alors

$$p.p.\, t \quad \left(1 - C\,C'\,||u||^2_{L^\infty(]0,T[,H^1)}\right)\ ||u||^2_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\, dy\ +\ ||\gamma||^2_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \right) \tag{31}$$

Ainsi pour $E(u^0)$ suffisament petit $||u||^2_{L^\infty(]0,T[,H^1(\Omega))} < \frac{1}{C\,C'}$ en utilisant (31) on obtient que $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 dx\, dy$ est dans $L^1([0;T])$ pour tout $T < +\infty$. Donc pour tout $T < +\infty$ toute solution faible de (4) et (5) vérifiant les hypothèses du théorème est dans $L^2_{loc}\left([0,+\infty) \times W^{22}(\Omega)\right)$; on peut lui appliquer les résultats de Struwe et Chang c'est à dire le thorème 1 . Le théorème 2 est démontré. $\triangle$

Je tiens à remercier F.Bethuel pour avoir attiré mon attention sur cette question et m'avoir fait des suggestions trés intéressantes ainsi que F.Helein pour des discussions fructueuses.

REFERENCES

[1] H.Brezis and J.M.Coron:"*Multiple Solutions of H-systems and Rellich's conjec ture*".Comm. Pure Appl. Math.,37,1984,p.149-187.

[2] H.Brezis and T.Kato:"*Remarks on the Schrödinger Operator with Singular Complex Potentials*". J. Math. Pure et Appl.,58, (1979),p.137-151.

[3] K.C.Chang:"*Heat flow and boundary value problem for harmonic maps*". Ann.Inst.Henri Poincaré, vol 6, n¡ 5,(1989),p. 363-395.

[4] Y.Chen et W.-Y.Ding:"*Blow up and global existence for heatflows of harmonic maps*". Invent. Math., 99, n¡ 3, (1990), p. 567-578

[5] J.-M.Coron: *Communications privées*

[6] J.-M.Coron et J.-M.Ghidaglia: "*Explosion en temps fini pour le flot des applications harmoniques*".C.R.A.S, t.308, srie I, (1989), p. 339-344

[7] W.-Y. Ding: "*Blow up of solutions of heat flows for harmonic maps*" Adv. in Math., 19, n¡1, (1990), p. 80-92.

[8] J.Eells et J.H.Sampson: "*Harmonic mappings of Riemannian manifolds*" Amer. J. Math.,86,(1964), p. 109-160

[9] F.Helein:"*Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère*".C.R.A.S, t.311, série I,(1990), p. 519-524.

[10] M.Struwe:"*On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces*". Comment. Math. Helv., 60, (1985), p. 558-581.

[11] M.Struwe:"*Variational Methods*", Springer Verlag, 1990.

[12] H.Wente:"*An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*". J. Math. Anal. Appl., 26, (1969), p. 318-344.

Adresse: Centre de Mathematiques et de Leurs Applications
ENS CACHAN
61,Avenue du Président Wilson
94235 CACAN CEDEX, FRANCE