Applications harmoniques à valeur dans des tores de révolution

Tristan RIVIERE

Résumé: On prouve la régularité des applications harmoniques à valeur dans les tores de révolution de dimension deux.

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et soit (Σ, g) une variété Riemanienne régulière compacte de dimension deux munie de la métrique g. On peut supposer, en utilisant le théorème de Nash-Moser, que Σ est imergée isométriquement dans un espace $\mathbb{R}^k$. On définit alors l'espace de Sobolev $H^1(\Omega, \Sigma)$ de la manière suivante:

$$H^1(\Omega, \Sigma) = \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k) \ tel\ que\ u(x) \in \Sigma\ p.p. \right\} \tag{1}$$

Pour u dans $H^1(\Omega, \Sigma)$, on note $E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$, l'énergie de Dirichlet de u sur Ω.
Il existe un voisinage V de Σ dans $\mathbb{R}^k$ pour lequel la projection π de tout point de V sur Σ est bien définie et régulière. On dit que $u \in H^1(\Omega, \Sigma)$ est faiblement harmonique si elle est un point critique de E au sens suivant:

$$u \text{ est faibl. harmo. si: } \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k) \quad \frac{d}{dt} E(\pi(u + t\xi))|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

Si $A(u)$ est la seconde forme fondamentale de Σ dans $\mathbb{R}^k$, on montre que u est faiblement harmonique si et seulement si u vérifie l'équation d'Euler suivante:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} A(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega, I\!R^k) \\
 & \\
u \in \Sigma \qquad p.p. &
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

D'autre part si u est localement à valeur dans une carte de Σ où u_i sont les coordonnées de u et Γ_{ij}^k les coefficients de connections, on vérifie aisemment que u vérifie (3) si et seulement si

$$
\Delta u^k + \Gamma_{ij}^k \nabla u^i . \nabla u^j = 0 \tag{4}
$$

Nous nous intérressons désormais à la régularité de telles applications.

Lorsque $n = 1$ l'équation (4) est exactement celle des géodésiques sur Σ. Dans ce cas, donc, les applications faiblement harmoniques sont nécéssairement régulières.

Lorsque $n = 2$ un résultat de F.Hélein [Hel96] affirme que les applications faiblement harmoniques sont nécéssairement régulières .

Lorsque $n \geq 3$ nous avons construit dans [Riv92], lorsque Σ est homéomorphe à la sphère S^2 , des applications faiblement harmoniques partout discontinues. Pour éspérer avoir une nécéssaire régularité il faut donc se placer dans des situations plus particulières.

On peut par exemple considérer des classes particulières d'applications harmoniques: les applications minimisant la fonctionnelle E (voir à ce sujet les résultats de R.Schoen et K.Uhlenbeck [SU35]), ou la classe plus grande des applications stationnaires (voir les résultats de L.C.Evans [Eva13] et de F.Bethuel [Bet92]).

Ici nous nous intérressons plutôt à établir des conditions suffisantes sur (Σ, g) pour que, pour tout n, les aplications faiblement harmoniques soient nécéssairement régulières indépendement de la dimension de l'espace de départ.

Nous avons conjecturé dans [Riv92] que si $\pi_2(\Sigma) = 0$ les applications faiblement harmoniques sont nécéssairement régulières. En fait, jusqu'a présent, seule des conditions suffisantes portant sur la géométrie de Σ et non sur sa topologie ont été établies:

Condition A: Si la courbure de Gauss de Σ est en tout point négative, les applications faiblement harmoniques sont nécéssairement régulières (voir [ES60]).

Condition B: Si l'image de Ω par u est contenue dans une boule géodésique $B_r(Q)$ de Σ de rayon r plus petit que $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ où K majore la courbure de Gauss sur $B_r(Q)$ et telle que $B_r(Q)$ soit incluse dans le complémentaire du cut locus de tous ses points, alors u est régulière (voir [HKW15]).

Condition C: Dans [H57], F.Hélein montre que la contrainte de majoration par $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ de la condition B peut être dépassée en prouvant que les applications faiblement harmoniques à valeur strictement dans un hémisphère d'un éllipsoïde plat de révolution sont nécéssairement régulières.

Nous donnons dans ce travail des conditions géométriques suffisantes sur la surface d'arrivée afin d'avoir une nécéssaire régularité des applications faiblement harmoniques (voir les théorèmes 1 et 2). L'établissement de ces conditions suffisantes utilise une même technique qui consiste à exprimer les applications harmoniques à partir de géodésiques choisies dans l'espace d'arrivée.

Nous rappelons la définition d'un système de coordonnées géodésique:
On dit qu'un disque D dans Σ admet des coordonnées géodésiques (u_1, u_2) si les courbes de niveau de u_1 sont des géodésiques paramétrées par la longueur u_2 et si les courbes de niveau de u_2 sont des courbes perpendiculaires aux courbes de niveau de u_1.
Dans un tel système de coordonnées la métrique s'écrit:

$$ds^2 = a(u_1, u_2)\, du_1^2 + du_2^2 \tag{5}$$

Où $a(u_1, u_2)$ est une application strictement positive.

Nous montrons plus bas le théorème suivant:

Theoreme 1 *Soit D une partie de Σ, diffeomorphe à un disque, admettant des coordonnées géodésiques. Toute application faiblement harmonique à valeur dans D est régulière.*

Ce résultat implique en particulier la condition C, la condition B ou encore la condition A lorsque l'on est à valeur dans un disque.

Ce résultat a des contraintes plus géométriques que topologiques: il ne dit rien de nouveau, par exemple, sur la situation basique où l'on est à valeur dans la sphère non surjective, c'est-à-dire dans S^2 privé d'un petit ouvert: la condition B comme le théorème 1 ne nous assure la régularité que lorsque nous sommes à valeur strictement dans un hémisphère mais ne nous permet pas de dépasser l'équateur. Il serait pourtant intéressant, pour renforcer la conjecture évoquée plus haut, de pouvoir conclure à la nécéssaire régularité lorsque l'image évite un petit ouvert de S^2, sachant que, lorsque l'on s'autorise à recouvrir la sphère toute entière, les applications faiblement harmoniques peuvent devenir totalement discontinues comme nous le rappelions plus haut.

D'autre part, l'existence <u>globale</u> d'un feuilletage géodésique sur Σ, est évidement trés problématique lorsque la courbure peut devenir positive et la plus part du temps compromise excépté dans le cas où la surface est à symétrie de révolution:

Notre résultat principal est le suivant:

Theoreme 2 *Les applications faiblement harmoniques à valeur dans un tore de révolution de dimension 2 sont régulières*

Ce résultat illustre la conjecture faite dans [Riv92] selon laquelle, si la surface d'arrivée est de genre non nul, les applications faiblement harmoniques sont régulières.

Dans la partie 2 nous démontrons le théorème 1, dans la partie 3 nous démontrons le théorème 2, dans l'appendice, nous montrons que le résultat de régularité de Hildebrandt, Kaul et Widman mentionné plus haut sous le nom de condition B est une conséquence du théorème 1 et nous donnons la démonstration d'un lemme utilisé dans le théorème 2.

2 Démonstration du théorème 1

Soit u faiblement harmonique d'un domaine $\Omega \subset I\!R^n$ à valeur dans D, un disque de Σ, admettant des coordonnées géodésiques (u_1, u_2). Dans ces coordonnées les symboles de Christoffel de la connection riemannienne associée à la métrique $ds^2 = a(u_1, u_2)\, du_1^2 + du_2^2$ sont:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \dfrac{1}{2\,a}\dfrac{\partial a}{\partial 1} & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \dfrac{1}{2\,a}\dfrac{\partial a}{\partial 2} & \Gamma^1_{22} = 0 \\ \\ \Gamma^2_{22} = 0 & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0 & \Gamma^2_{11} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a}{\partial 2} \end{array} \tag{6}$$

Donc, d'aprés (4), u est harmonique dans D si et seulement si u vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 + \dfrac{1}{2a}\dfrac{\partial a}{\partial 1}(u_1, u_2)\, |\nabla u_1|^2 + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial 2}(u_1, u_2)\, \nabla u_1 . \nabla u_2 = 0 \\ \\ \Delta u_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a}{\partial 2}(u_1, u_2)\, |\nabla u_1|^2 \end{array} \right. \tag{7}$$

Soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} div(a(u_1, u_2)\, \nabla u_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a}{\partial 1}(u_1, u_2)\, |\nabla u_1|^2 \\ \\ \Delta u_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a}{\partial 2}(u_1, u_2)\, |\nabla u_1|^2 \end{array} \right. \tag{8}$$

Remarque: Ce système non linéaire entre dans les conditions d'application des résultats de régularités de S.Hildebrandt et K.-O.Widman, présentés dans [HW78] (voir le théorème 5.1), et nous permet directement de conclure. En fait nous présentons ci-dessous une preuve de la régularité de u plus adaptée à la particularité du système (8), elle introduit d'autre part des idées de la preuve de la régularité de u dans le théorème 2 qui lui ne découle pas des résultats de régularité de S.Hildebrandt et K.-O.Widman mentionnés ci-dessus.

On s'aperçoit que la première équation de (8) peut s'interpréter comme une équation scalaire en u_1 et comme il existe M et α tels que

$M \geq a(u_1, u_2) \geq \alpha > 0$ c'est une équation élliptique sous forme divergence. La non linéarité est constituée du gradient de u_1 au carré avec $u_1 \in L^\infty$ on peut donc appliquer à u_1 les résultats classiques de régularité sur les equations scalaires elliptiques de O.A.Ladyzhenskaya et N.N. Ural'tseva: u_1 est Hölder continue et u_1 vérifie l'estimation de Morrey suivante

$$\forall \omega \subset\subset \Omega \quad sup_{B_r(x) \subset \omega} \left\{ \frac{1}{r^{n-2+\gamma}} \int_{B_r(x)} |\nabla u_1|^2 \, dx \right\} < +\infty \tag{9}$$

Où $B_r(x)$ désigne la boule de rayon r et de centre x.

Nous cherchons désormais à établir, pour u_2, une estimation de Morrey semblable à (9), en injectant l' estimation vérifiée par u_1 dans la seconde équation de (8); et si u_2 vérifie (9), daprés les résultats classiques de Morrey, nous savons que u_2 est Hölder continue (voir par exemple [Gia77] Théorème 1.1 chap. III).

Pour démontrer une estimation de Morrey de type (9) pour u_2, il suffit de montrer que u_2 vérifie une estimation de la forme:

$$\exists C > 0 \quad t.q. \quad \forall R > 0 \quad t.q. \quad B_R(x) \subset \Omega$$

$$\forall \rho < R \quad \int_{B_\rho(x)} |\nabla u_2|^2 \, dx \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla u_2|^2 \, dx \; + \; C \, R^{n-2+\gamma} \tag{10}$$

(voir à nouveau [Gia77] Lemme 2.1 chap. III).

Soit R et x tels que $B_R(x) \subset \Omega$. Soit v l'extension harmonique de u_2 sur $B_R(x)$ i.e.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } B_R(x) \\ v = u_2 & \text{sur } \partial B_R(x) \end{cases} \tag{11}$$

v est harmonique, un résultat classique nous dit donc qu'il existe C indépendant de R et de v tel que

$$\forall \rho < R/2 \qquad \int_{B_\rho(x)} |\nabla v|^2 \, dx \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla v|^2 \, dx \tag{12}$$

donc, en faisant apparaître $u_2 - v$ dans l'inéquation précédente, il existe C tel que

$$\forall \rho < R/2 \qquad \int_{B_\rho(x)} |\nabla u_2|^2 \, dx \ \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla u_2|^2 \, dx + C \int_{B_R(x)} |\nabla(u_2 - v)|^2 \, dx \tag{13}$$

Nous cherchons désormais à établir une décroissance uniforme de $\int_{B_R(x)} |\nabla(u - v)|^2 \, dx$ en $R^{n-2+\gamma}$ afin d'obtenir (10).

D'aprés (8) et (11) on a:

$$\begin{cases} \Delta(u_2 - v) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a}{\partial 2} |\nabla u_1|^2 & \text{dans } B_R(x) \\ u_2 - v = 0 \quad \text{sur } \partial B_R \end{cases} \tag{14}$$

En multipliant (14) par $u_2 - v$ (qui est borné L^∞ indépendement de u et de $B_R(x)$ d'aprés le principe du maximum qui nous dit que $||v||_{L^\infty(B_R(x))} \leq ||u_2||_{L^\infty(B_R(x))}$), puis en intégrant sur $B_R(x)$ on obtient:

$$\int_{B_R(x)} |\nabla(u_2 - v)|^2 \, dx \leq \ C \ Max_D \left\{ \frac{\partial a}{\partial 2} \right\} \int_{B_R(x)} |\nabla u_1|^2 \, dx \tag{15}$$

Donc en utilisant (9) on obtient la décroissance cherchée sur $u_2 - v$ soit:

$$\int_{B_R(x)} |\nabla(u_2 - v)|^2 \, dx \leq C \, R^{n-2+\gamma} \tag{16}$$

où C est évidement indépendant de x et de R

On injecte cette décroissance dans (13) ce qui nous permet d'établir (10) et donc d'aprés les remarques précédentes u_2 vérifie l'estimation de Morrey (9).

u est donc Hölder continue et, d'aprés des résultats classiques sur les applications harmoniques nous savons que u est réelle analytique. ■

3 Démonstration du théorème 2

On considère un tore $T = (S^1 \times S^1, g)$, supposé de révolution; donc il existe θ, ϕ et λ une fonction 2π périodique strictement positive telles que $T = \left\{(e^{i\theta}, e^{i\phi});\ (\theta, \phi) \in I\!R^2\right\}$ et telles que la métrique g s'écrive

$$ds^2 = \lambda(\phi)\, d\theta^2 + d\phi^2 \tag{17}$$

Soit u une application faiblement harmonique dans $H^1(\Omega, T)$ et u_1 et u_2 dans $H^1(\Omega, S^1)$ tels que $u = (u_1, u_2)$. D'aprés les résultats de F.Bethuel et X.Zheng il existe des relèvements θ et ϕ dans $H^1(\Omega, I\!R)$ tels que $u_1 = e^{i\theta}$ et $u_2 = e^{i\phi}$ (voir [BZ75] lemme III.1).
On écrit désormais u dans le relèvement $I\!R^2/(2\pi Z\!\!Z)^2$ muni de la métrique $ds^2 = \lambda(\phi)\, d\theta^2 + d\phi^2$. Les coefficients de connexion associés sont

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \dfrac{1}{2\,\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\theta} = 0 & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \dfrac{1}{2\,\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\phi} & \Gamma^1_{22} = 0 \\[2ex] \Gamma^2_{22} = 0 & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0 & \Gamma^2_{11} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\phi} \end{array} \tag{18}$$

Donc θ et ϕ vérifient les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta + \dfrac{\lambda'}{\lambda}(\phi)\, \nabla\phi.\nabla\theta = 0 \\[2ex] \Delta\phi = \dfrac{1}{2}\lambda'(\phi)\, |\nabla\theta|^2 \end{array} \right. \tag{19}$$

Soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} div(\lambda(\phi)\, \nabla\theta) = 0 \\[2ex] \Delta\phi = \dfrac{1}{2}\lambda'(\phi)\, |\nabla\theta|^2 \end{array} \right. \tag{20}$$

Le théorème de De Giorgi nous donne immédiatement que, d'aprés la première equation, θ est Hölder continue et vérifie l'estimation de Morrey (9). On est alors tenté, comme lors de la démonstration du théorème 1, d'injecter cette estimation de Morrey dans la deuxième équation pour obtenir une même estimation de Morrey vérifiée par ϕ. En réalité le fait que ϕ n'est pas à priori dans L^∞ est un obstacle nous empèchant de procéder exactement comme dans la partie précédente. Nous allons plutôt chercher pour ϕ une estimation de Morrey de la forme

$$\forall\omega \subset\subset \Omega \quad sup_{B_r(x)\subset\omega}\left\{\frac{1}{r^{n-1+\frac{\gamma}{2}}}\int_{B_r(x)}|\nabla\phi|\,dx\right\} < +\infty \tag{21}$$

Une telle estimation nous donne la même régularité $C^{0,\frac{\gamma}{2}}$ que (9).

Plus généralement, nous démontrons dans l'appendice le lemme suivant:

Lemme A 1 *Soit* $f \in L^{1,n-2+\gamma}$ *et soit* u *dans* $H^1(\Omega)$ *vérifiant*

$$\Delta u = f \tag{22}$$

Alors u *est dans* $C^{0,\frac{\gamma}{2}}$.

$L^{1,p}(\Omega)$ désigne l'Espace de Morrey des applications $L^1(\Omega)$ telles que

$$sup_{B_r(x)\subset\Omega}\left\{r^{-p}\int_{B_r(x)}|f|\,dx < +\infty\right\} \tag{23}$$

<u>*Remarque*</u>: Ce lemme est peut être bien connu des spécialistes mais difficile à trouver dans la litterature. Des résultats de régularité semblables pour des équations linéaires elliptiques avec des conditions de décroissance du second membre peuvent être trouver dans [Zie89].

Pour finir la démonstration du théorème 2 il suffit d'appliquer le lemme A1 à $u = \phi$ et $f = \frac{\lambda'}{2}(\phi)\,|\nabla\phi|^2$. On a alors ϕ et θ Hölder continues, donc u l'est aussi et d'aprés un résultat classique sur les applications harmoniques nous savons que u est analytique réelle. ■

4 Appendice

4.1 Théorème 1 $\Rightarrow$ Condition B

Soit $B_r(Q)$ une boule géodésique de centre Q, de rayon $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ telle que $B_r(Q)$ soit dans le complémentaire du cut locus de chacun de ses points. Pour montrer que la condition B découle du théorème 1 il suffit de construire des coordonnées géodésiques sur $B_r(Q)$.

Par continuité il existe $r < r' < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ telle que $B_{r'}(Q)$ soit aussi dans le complémentaire du cut locus de chacun de ses points. D'aprés [Kar02] de telles boules sont convexes, c'est à dire que deux points quelconques de ces boules peuvent être rejoints par une unique géodésique, qui est incluse dans la boule.

Soit x un point quelconque de $B_{r'}(Q) \backslash B_r(Q)$. Soit $\gamma\ : S^1 \to \partial B_{r'}(Q)$ une paramétrisation du bord de $B_{r'}(Q)$. Pour σ dans S^1 notons $v(\sigma)$ le vecteur unitaire de $T_x\Sigma$ tel que $\{exp_x(t\, v(\sigma));\ 0 \leq t \leq t_\sigma\}$ soit la géodésique joignant x à $\gamma(\sigma)$ avec $exp_x(t_\sigma\, v(\sigma)) = \gamma(\sigma)$. Pour des raisons topologiques évidentes $\sigma \to v(\sigma)$ est un homéomorphisme de S^1 dans S^1.

Soit p un point de $B_r(Q)$, comme $B_{r'}(Q)$ est convexe il existe un unique $\sigma \in S^1$ et $t_p \leq t_\sigma$ tel que $exp_x(t_p\, v(\sigma)) = p$ et comme p est dans le complémentaire du cut locus de x contenant x,

$$\frac{d}{dt} exp_x(t\, v(\sigma))|_{t=t_p} \neq 0$$

Soit $X(p) = \dfrac{\frac{d}{dt} exp_x(t_p\, v(\sigma))|_{t=t_p}}{||\frac{d}{dt} exp_x(t_p\, v(\sigma))|_{t=t_p}||}$ et $Y(p)$ le vecteur unitaire de $T_p\Sigma$ tel que $(X(p), Y(p))$ soit orthonormée directe. (X, Y) constitue sur $B_r(Q)$, qui est simplement connexe, un champ régulier de repères ortonormés dont les lignes de champs sont des géodésiques et des courbes qui leur sont perpendiculaires.

4.2 Démonstration du lemme A1

Nous cherchons à établir pour u des estimations de la forme

$$\forall \omega \subset\subset \Omega \quad sup_{B_r(x)\subset\omega}\left\{\frac{1}{r^{n-1+\frac{\gamma}{2}}}\int_{B_r(x)}|\nabla u|\,dx\right\} < \ +\infty \tag{24}$$

Pour cela, de la même façon que dans la partie 1, il suffit d' établir une estimation de la forme

$$\begin{aligned} &\exists \ \ C>0 \ \ t.q. \ \ \forall R>0 \ \ t.q. \ \ B_R(x)\subset\Omega \\ &\forall \rho<R \quad \int_{B_\rho(x)}|\nabla u| \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)}|\nabla u|\,dX \ + \ C\ R^{n-1+\frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \tag{25}$$

Soient R et x tels que $B_R(x)\subset\Omega$. Soit v l'extension harmonique de u sur $B_R(x)$ i.e.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{dans } B_R(x) \\ \\ v = u \quad \text{sur } \partial B_R(x) \end{cases} \tag{26}$$

v est harmonique, un résultat classique nous dit donc qu'il existe C indépendant de R et de v tel que

$$\forall \rho < R/2 \qquad \int_{B_\rho(x)}|\nabla v|\,dx \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)}|\nabla v|\,dx \tag{27}$$

donc il existe C tel que

$$\begin{aligned} \forall \rho < R/2 \quad \int_{B_\rho(x)}|\nabla u| \leq \ & C\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x)}|\nabla u|\,dx \\ & + C\int_{B_R(x)}|\nabla(u-v)|\,dx \end{aligned} \tag{28}$$

Nous cherchons désormais à établir une décroissance uniforme de $\int_{B_R(x)}|\nabla(u-v)|\,dx$ en $R^{n-1+\frac{\gamma}{2}}$ afin d'obtenir (25).

On a:

$$\begin{cases} \Delta(u-v) = f \qquad \text{dans } B_R(x) \\ \\ u-v = 0 \qquad \text{sur } \partial B_R(x) \end{cases} \tag{29}$$

On ne peut plus procéder comme dans le théorème 1 en multipliant la première équation de (29) par $u-v$ qui n'est pas nécéssairement dans L^∞.

Considérons alors la fonction $\phi(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}}$.
$\phi(x)$ est bornée sur $I\!R$ par M.

On multiplie la première équation de (29) par
$\phi(u-v)\in H_0^1(B_R(x))\cap L^\infty(B_R(x))$, ce qui nous donne:

$$\int_{B_R(x)} \phi(u-v)\,\Delta(u-v)\,dx=\int_{B_R(x)}\phi(u-v)\,f\,dx \tag{30}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)}\frac{|\nabla(u-v)|^2}{(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}}\,dx &\le M\int_{B_R(x)}|f|\,dx\\ &\le C\,R^{n-2+\gamma}\end{aligned} \tag{31}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)}|\nabla(u-v)|\,dx&=\int_{B_R(x)}\frac{|\nabla(u-v)|\,(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{4}\frac{n}{n-1}}}{(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{4}\frac{n}{n-1}}}\,dx\\ &\le\left(\int_{B_R(x)}(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R(x)}\frac{|\nabla(u-v)|^2}{(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{32}$$

Donc en insérant (31) dans (32) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)}|\nabla(u-v)|\,dx&\le C\,R^{\frac{n}{2}-1+\frac{\gamma}{2}}\left(\int_{B_R(x)}(1+|u-v|^2)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\,R^{n-1+\frac{\gamma}{2}}+C\,R^{\frac{n}{2}-1+\frac{\gamma}{2}}\left(\int_{B_R(x)}|u-v|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{33}$$

$\frac{n}{n-1}$ est la puissance critique associée à $W_0^{1,1}$ dans $I\!R^n$, donc, l'inégalité de Poincaré nous donne l'existence de C, indépendant de R, tel que

$$\left(\int_{B_R(x)} |u-v|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C\int_{B_R(x)} |\nabla(u-v)|\,dx \tag{34}$$

En injectant ceci dans (33) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)} |\nabla(u-v)|\,dx \leq\ & C\,R^{n-1+\frac{\gamma}{2}} \\ & +C\,R^{\frac{n}{2}-1+\frac{\gamma}{2}}\left(\int_{B_R(x)} |\nabla(u-v)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}\end{aligned} \tag{35}$$

En divisant par $R^{n-1+\frac{\gamma}{2}}$ et en posant $g(R) = \dfrac{\int_{B_R(x)} |\nabla(u-v)|\,dx}{R^{n-1+\frac{\gamma}{2}}}$, (35) devient:

$$g(R) \leq C\left(1+R^{\frac{n\gamma}{4(n-1)}}\,(g(R))^{\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}}\right) \tag{36}$$

Ceci implique clairement que $g(R)$ est borné indépendemment de R. Donc

$$sup_{B_r(x)\subset\Omega}\left\{\frac{1}{r^{n-1+\frac{\gamma}{2}}}\int_{B_r(x)} |\nabla(u-v)|\,dX\right\} < +\infty \tag{37}$$

En injectant cette estimation dans (28) on obtient (25) ce qui nous permet d'établir, d'aprés les remarques précédentes, que u est $C^{0,\frac{\gamma}{2}}$. ■

L'auteur tient à remercier Fabrice Bethuel pour les discussions fructueuses qu'ils ont eues à ce sujet.

References

[Bet92] F. Bethuel. On the singular set of stationary harmonic maps. *à paraître*, 1992.

[BZ75] F. Bethuel and X. Zheng. Density of smooth functions between two manifolds in sobolev spaces. *J. Funct. Ana.*, 80:(1988), 60–75.

[ES60] J. Eells and J. H. Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *Amer. J. Math*, 86:(1964), 109–160.

[Eva13] L. C. Evans. Partial regularity for stationary harmonic maps into the sphere. *Arch. Rationa. Mech. Anal.*, 116:(1991), 101–113.

[Gia77] M. Giaquinta. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Princeton Univ. Press, 1977.

[H́57] F. Hélein. Regularity and uniqueness of harmonic maps into an ellipsoid. *Manuscripta Math.*, 60:(1988), 235–257.

[Hel96] F. Helein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. *C.R.A.S.*, 312:(1991), 591–596.

[HKW15] S. Hildebrandt, H. Kaul, and K. O. Widman. An existence theorem for harmonic mappings of riemannian manifolds. *Acta Mathematica*, 138:(1977), 1–15.

[HW78] S. Hildebrandt and K. O. Widman. On the holder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 4:(1977), 145–178.

[Kar02] Karcher. Anwendungen der alexandrowschen winkelvergleichssatze. *Manuscripta Math.*, 2:(1970), 77–102.

[Riv92] T. Rivière. Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres. *prépublication*, 1992.

[SU35] R. Schoen and K. Uhlenbeck. A regularity theory for harmonic maps. *J. Diff. Geom.*, 17:(1982), 307–335.

[Zie89] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Graduate Texts in Math. vol. 120, Springer Verlag, 1989.

Adresse:

CMLA, ENS Cachan
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX