Differentialgeometrie I
Vorlesung Wintersemester 2003/04

Michael Struwe

17. Januar 2005

Das vorliegende Skript entstand als Ausarbeitung meiner Notizen zur Vorlesung *Differentialgeometrie I* im Wintersemester 1998/99 und, in leicht überarbeiteter Form, im Wintersemester 2003/04 an der ETH Zürich. Neben den im Text erwähnten Quellen stützt sie sich auf die umfangreiche Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die folgenden Texte:

- M. do Carmo: *Differentialgeometrie*, Vieweg, Studium 55,
- V. Guillemin - A. Pollack: *Differential topology*, Prentice Hall, N.J., 1974,
- W. Klingenberg: *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Springer,
- J. A. Thorpe: *Elementary topics in differential geometry*, Springer.

Ich danke Herrn Christoph Frei, Frau Laura Keller und Frau Johanna Ziegel für die sorgfältige Durchsicht der ersten Fassung des Skripts und zahlreiche nützliche Korrekturhinweise.

Inhaltsverzeichnis

1 Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ 1

1.1 Satz über implizite Funktionen 1
1.2 Tangentialraum 3
1.3 Vektorfelder 3
1.4 Vektorfelder längs Kurven 4
1.5 Orientierung, Gauss-Abbildung 7
1.6 Geodäten 8
1.7 Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung 12
1.8 Die Weingarten-Abbildung 15
1.9 Ebene Kurven 17
1.10 Der Umlaufsatz 17
1.11 Isoperimetrische Ungleichung 20
1.12 Die Krümmung von Hyperflächen 21
1.13 Parametrische n-Flächen 27
1.14 Die Krümmung parametrischer n-Flächen 31
1.15 Bernstein-Theorem 37
1.16 Der Satz von Alexandrov-Hopf 41
1.17 Weierstrass-Darstellung von Minimalflächen 44
1.18 Gausssche Krümmung 48
1.19 Mittlere Krümmung 49
1.20 Fokalpunkte 50

2 Die innere Geometrie von Hyperflächen 53

2.1 Die Ableitungsgleichungen 53
2.2 Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung 57
2.3 Die Exponentialabbildung 59
2.4 Isometrien 63
2.5 Geodätische Krümmung, Satz von Gauss-Bonnet 65

2.6 Der Satz von Gauss-Bonnet im Grossen 69
2.7 Parallelverschiebung und Krümmung 73
2.8 Morse Theorie 74

3 Riemannsche Geometrie **79**
3.1 Topologiscche Mannigfaltigkeiten 79
3.2 Differenzierbare Strukturen 83
3.3 Tangentialraum und Tangentialbündel 85

Kapitel 1

Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$

Gekrümmte Objekte erscheinen in der Mathematik auf ganz natürliche Weise.

Beispiele. i) Die Standard-Sphäre

$$S^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}); |x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |x^i|^2 = 1\}$$

ii) Das Paraboloid

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2\}.$$

Wie kann man auf solchen Objekten die jeweils kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten finden? Wie kann man tangentiale Vektoren parallel verschieben? – Wir wollen diese und andere Fragen nicht nur in den oben genannten konkreten Fällen beantworten sondern allgemeine Begriffe entwickeln, die sich auch auf abstrakte Situationen übertragen lassen, denen man zum Beispiel in der allgemeinen Relativitätstheorie begegnet.

Die Beispiele 1 und 2 entstehen als Niveaumengen $f^{-1}(c)$ geeigneter Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} S^n &= f^{-1}(1) \text{ mit } f(x) = |x|^2; \\ P &= f^{-1}(0) \text{ mit } f(x) = x^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2. \end{aligned}$$

Die Eigenschaften solcher Niveaumengen erhält man aus dem Satz über implizite Funktionen.

1.1 Satz über implizite Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+l}$ offen, $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^l), k \geq 1, l \geq 1$.

Definition 1.1.1 *Ein Punkt* $x_0 \in \Omega$ *heisst* **regulärer Punkt** *von* f, *falls* $df(x_0)$ *maximalen Rang hat.*

Bemerkung 1.1.1 *Falls speziell* $l = 1$, *so ist* x_0 *regulär genau dann, wenn* $df(x_0) \neq 0$.

Im folgenden sei $l = 1$.

Definition 1.1.2 *Die Zahl* $c \in \mathbb{R}$ *heisst* **regulärer Wert** *von* f, *falls* $f^{-1}(c)$ *nur aus regulären Punkten besteht.*

Beispiel 1.1.1 *Sei* $f(x) = |x|^2$ *mit* $df(x) = 2x^t$. *Jeder Wert* $c \neq 0$ *ist regulär. (Für* $c < 0$ *besteht* $f^{-1}(c) = \emptyset$ *trivialerweise aus regulären Punkten.)*

Satz 1.1.1 *Sei* $z_0 \in \Omega$ *regulär. Dann gibt es Koordinaten* $x = (x^1, \ldots, x^n), y = x^{n+1}$ *für* $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, *so dass* $z_0 = (x_0, y_0)$ *und*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0;$$

weiter gibt es eine Umgebung U *von* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *und eine Funktion* $h \in C^1(U; \mathbb{R})$ *sowie eine Umgebung* W *von* z_0, *so dass gilt*

$$\{z \in W; f(z) = f(z_0)\} = graph(h) = \{(x, h(x)); x \in U\}.$$

Falls $f \in C^k$ *für ein* $k \geq 1$, *so gilt* $h \in C^k$.

Im folgenden werden wir es meist nur mit "glatten" Funktionen $f \in C^\infty$ zu tun haben.

Bemerkung 1.1.2 *Mittels der Abbildung* $\Phi\colon U \ni x \to (x, h(x)) \in W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *können wir den in* W *liegenden Teil von* S **parametrisieren**, *so dass* $\Phi(U) = S \cap W$.

Korollar 1.1.1 *Sei* $c \in \mathbb{R}$ *regulärer Wert von* $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$. *Dann gibt es eine offene Überdeckung* $(W_\iota)_{\iota \in I}$ *von*

$$S = f^{-1}(c)$$

mit zugehörigen C^k*-Funktionen* $h_\iota \in C^k(U_\iota; \mathbb{R})$, $\Phi_\iota \in C^k(U_\iota; \mathbb{R}^{n+1})$, $\iota \in I$, *wobei* $U_\iota \subset \mathbb{R}^n$ *offen für jedes* $\iota \in I$ *und* $\Phi_\iota(x) = (x, h_\iota(x))$, *so dass gilt*

$$S \cap W_\iota = \mathrm{graph}(h_\iota) = \Phi_\iota(U_\iota),\ \iota \in I.$$

Definition 1.1.3 *Im folgenden bezeichnen wir eine Niveaumenge* S *wie in Korollar 1.1.1 als eine* **reguläre** (C^k-) **Hyperfläche**.

Beispiel 1.1.2 *Insbesondere ist somit* $S^n = f^{-1}(1)$ *mit* f *aus Beispiel 1.1.1 reguläre* C^∞*-Hyperfläche.*

1.2 Tangentialraum

Sei $S = f^{-1}(0)$ reguläre Hyperfäche im $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert. Weiter sei $z_0 = (x_0, y_0) \in S$, W eine Umgebung von z_0 mit

$$S \cap W = \text{graph}(h) = \Phi(U),$$

wobei $h \in C^1(U)$ auf einer Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi(x) = (x, h(x)),\ x \in U$.

Definition 1.2.1 *Der n-dimensionale Vektorraum*

$$T_{z_0}S = d\Phi(z_0)(\mathbb{R}^n) = \{\zeta = (\xi, dh(x_0)\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}; \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

heisst **Tangentialraum** *von S im Punkt z_0.*

Beispiel 1.2.1 *Für $h \in C^1(]a,b[)$, $x_0 \in]a,b[$ ist der Tangentialraum an $S =$ graph(h) im Punkt $z_0 = (x_0, h(x_0))$ gegeben durch die in den Nullpunkt verschobene Tangente*

$$T = \{z_0 + t(1, h'(x_0)); t \in \mathbb{R}\}$$

durch z_0.

Satz 1.2.1 $T_{z_0}S = \ker df(z_0) = (\nabla f(z_0))^{\perp}$.

Beweis. Aus der Gleichung $f(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in U$ folgt mit der Kettenregel

$$df(z_0)(\xi, dh(x_0)\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

das heisst, $T_{z_0}S \subset \ker df(z_0)$. Da weiter gilt

$$\dim(T_{z_0}S) = n = \dim(\ker df(z_0)),$$

folgt die Behauptung.

□

Beispiel 1.2.2 *Für die Sphäre $S = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; f(x) = |x|^2 = 1\}$ gilt*

$$T_xS^n = \ker(df(x)) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1}; x \cdot \xi = 0\}, \forall x \in S.$$

Definition 1.2.2 *Die Zusammenfassung aller Tangentialräume*

$$TS = \{(x, v); v \in T_xS, x \in S\}$$

heisst **Tangentialbündel**.

1.3 Vektorfelder

Sei $S = f^{-1}(0)$ reguläre Hyperfäche im $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert.

Definition 1.3.1 *Ein* **Vektorfeld** *auf S ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in S$ einen Vektor $v(x) \in T_xS$ zuordnet.*

Bemerkung 1.3.1 *Ein Vektorfeld auf S wird also durch eine Abbildung*

$$V: S \to TS := \{(x, v); v \in T_xS\}$$

beschrieben, so dass für jedes $x \in S$ gilt

$$V(x) = (x, v(x)),\ v(x) \in T_xS.$$

Mit der Bündelprojektion $\pi: TS \ni (x, v) \to x \in S$ kann man Vektorfelder V äquivalent durch die Bedingung $\pi \circ V = id$ (oder durch ein kommutatives Diagramm) charakterisieren.

Beispiel 1.3.1 *Für den Kreis $S = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2; |z| = 1\}$ mit*

$$T_zS^1 \cong iz \cdot \mathbb{R} = \{\lambda iz; \lambda \in \mathbb{R}\}, z \in S^1,$$

lassen sich alle Vektorfelder in der Form

$$V(z) = (z, \lambda(z)iz)$$

mit $\lambda: S^1 \to \mathbb{R}$ angeben.

1.4 Vektorfelder längs Kurven

Sei $S = f^{-1}(0)$ reguläre C^1-Hyperfläche, wobei $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert, und sei $\alpha: I =]a, b[\to S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Kurve auf S. **Notation:** $\alpha \in C^1(I; S)$.

Definition 1.4.1 *$V: I \to TS$ heisst ein Vektorfeld längs α, falls gilt*

$$V(t) = (\alpha(t), v(t)) \text{ mit } v(t) \in T_{\alpha(t)}S, t \in I.$$

Beispiel 1.4.1 *Falls $\alpha \in C^1(I; S)$, so ist das* **Geschwindigkeitsvektorfeld**

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \frac{d\alpha}{dt}(t)\right)$$

ein Vektorfeld längs α.

Satz 1.4.1 *Zu jedem $z_0 \in S$, $\zeta \in T_{z_0}S$ gibt es eine Kurve $\alpha \in C^1(I; S)$ auf einem Intervall I um 0 mit $\alpha(0) = z_0$, $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \zeta$.*

Beweis. Wähle Koordinaten $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, Umgebungen W von $z_0 = (x_0, y_0)$ und U von x_0 entsprechend Satz 1.1.1, so dass

$$S \cap W = \Phi(U) = \{(x, h(x)); x \in U\}$$

mit $\Phi(x) = (x, h(x)) \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})$. OBdA sei $x_0 = 0$. Sei $r > 0$ mit $B_r(0) \subset U$, und sei $\zeta = d\Phi(0)\xi$. Wähle

$$\alpha(t) = \Phi(t\xi)),\ -r < t|\xi| < r,$$

mit $\alpha(0) = \Phi(0) = z_0$, $\frac{d\alpha}{dt}(0) = d\Phi(0)\xi = \zeta$. □

Folgerung: Aufgrund von Satz 1.4.1 können wir den Tangentialraum $T_{z_0}S$ mit dem Raum der Geschwindigkeitsvektoren $\frac{d\alpha}{dt}(0)$ von Kurven $\alpha \in C^1(I; S)$ durch $\alpha(0) = z_0$ identifizieren.

Sei V mit $V(x) = (x, v(x))$ ein Vektorfeld auf S nach Abschnitt 1.3, $\alpha \in C^1(I; S)$ eine C^1-Kurve auf S.

Definition 1.4.2 *α heisst* **Integralkurve** *von V, falls gilt*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = v(\alpha(t)), t \in I.$$

Kann man zu jedem Vektorfeld V Integralkurven von V durch jeden Punkt $p \in S$ finden? – Wir betrachten zunächst den "flachen" Fall $S = \mathbb{R}^n$.

Satz 1.4.2 *(Picard-Lindelöf) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem Anfangswert $x_0 \in U$ genau eine Lösung $x = x(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems*

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(x(t)), t \in I$$
$$x(0) = x_0$$

auf einem maximalen, offenen Existenzintervall $I =]T_-, T_+[$ um $t = 0$. Falls $T_+ < \infty$, so gilt weiter

$$|x(t)| \to \infty \quad (t \uparrow T_+)$$

oder

$$\mathrm{dist}(x(t), \partial U) \to 0 \quad (t \uparrow T_+);$$

analog, falls $T_- > -\infty$.

Analoges gilt für Vektorfelder auf regulären Hyperflächen.

Definition 1.4.3 *Ein Vektorfeld $V(z) = (z, v(z))$ ist von der Klasse C^k in einer Umgebung von $z_0 \in S$, falls bezüglich einer lokalen Darstellung*

$$S \cap W = \Phi(U)$$

von S um $z_0 = \Phi(x_0)$ gemäss Satz 1.1.1 gilt

$$v(\Phi(x)) =: w(x) \in C^k(U; \mathbb{R}^{n+1}).$$

Satz 1.4.3 *Zu jedem C^1-Vektorfeld $V(z) = (z, v(z))$ auf S, jedem Punkt $z_0 \in S$ gibt es genau eine maximale Integralkurve $\alpha \in C^1(I; S)$ durch $\alpha(0) = z_0$, wobei $I =]T_-, T_+[$. Falls $T_+ < \infty$, so gilt*

$$|\alpha(t)| + (dist(\alpha(t), \partial\Omega))^{-1} \to \infty \quad (t \uparrow T_+);$$

analog, falls $T_- > -\infty$.

Beweis. Sei $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Umgebung von $z_0 = \alpha(t_0) \in S$ mit

$$S \cap W = \Phi(U),$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi(x) = (x, h(x)) \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})$ lokale Parametrisierung von S gemäss Satz 1.1.1.

Nach Definition von $T_z S$ gilt

$$v(\Phi(x)) =: w(x) = (w_1(x), dh(x)w_1(x)) = d\Phi(x) \cdot w_1(x). \tag{1.4.1}$$

Weiter gilt für eine Kurve $\alpha \in C^1(I; S \cap W)$ mit

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = \Phi(x(t))$$

die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = d\Phi(x(t))\frac{dx}{dt}(t),\ t \in I. \tag{1.4.2}$$

Behauptung: *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) $\alpha \in C^1(I; S \cap W)$ *löst das Anfangswertproblem*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = v(\alpha(t)),\ t \in I,\ \alpha(0) = z_0; \tag{1.4.3}$$

ii) $x \in C^1(I; U)$ *löst das Anfangswertproblem*

$$\frac{dx}{dt}(t) = w_1(x(t)),\ t \in I,\ x(0) = x_0. \tag{1.4.4}$$

Beweis. (1.4.3) $\Rightarrow$ (1.4.4) : Sei $pr_1 : \mathbb{R}^{n+1} \ni z = (x, y) \to x \in \mathbb{R}^n$ die Projektion auf $\mathbb{R}^n$. Beachte, dass $pr_1 \circ \Phi = id$ und daher auch $pr_1 \circ d\Phi(x) = id$ für alle $x \in U$. Mit (1.4.1) und (1.4.2) folgt daher (1.4.4) aus (1.4.3).

(1.4.4) $\Rightarrow$ (1.4.3) : Wende $d\Phi$ an auf (1.4.4) und benutze (1.4.1), (1.4.2). □

Das Anfangswertproblem (1.4.4) kann mit Hilfe von Satz 1.4.2 gelöst werden; dies liefert eine lokale Lösung von (1.4.3) auf einer Umgebung von $t = 0$. Durch Aneinanderhängen lokaler Lösungen in verschiedenen Karten kann man das Existenzintervall schrittweise vergrössern. Schliesslich erhält man die gesuchte maximale Integralkurve $\alpha \in C^1(I; S)$ auf einem maximalem, offenen Intervall $I =]T_-, T_+[$ durch Anwendung des Lemmas von Zorn.

Um die Charakterisierung von $T_\pm$ einzusehen, nehmen wir an, es sei $T_+ < \infty$. Widerspruchsweise sei

$$\lim_{k\to\infty} |\alpha(t_k)| + (dist(\alpha(t_k), \partial\Omega)^{-1} < \infty$$

für eine Folge $t_k \uparrow T_+$ $(k \to \infty)$. Dann existiert eine Teilfolge $k \to \infty$ mit Häufungspunkt $z_1 = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k) \in S$. Sei W_1 eine Umgebung von z_1 gemäss Satz 1.1.1. Für genügend grosses k gilt dann $\alpha(t_k) \in W_1$, und die lokale Lösung α_1 von (1.4.3) mit Anfangswert $\alpha_1(t_k) = \alpha(t_k)$ setzt α fort auf ein offenes Intervall $I_1 \supset]T_-, T_+]$, im Widerspruch zur Maximalität von I. □

1.5 Orientierung, Gauss-Abbildung

Sei S reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, $S = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert, und sei $p \in S$.

Definition 1.5.1 *i) Der eindimensionale lineare Raum*

$$\begin{aligned} T_pS^\perp &= \{w \in \mathbb{R}^{n+1}; v \cdot w = 0, \forall v \in T_pS\} \\ &= \operatorname{span}\{\nabla f(p)\} \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

heisst **Normalraum** *von S in p,*

$$TS^\perp = \{(x, w); w \in T_xS^\perp, x \in S\}$$

das **Normalenbündel** *von S.*

ii) Ein Vektorfeld N mit $N(x) = (x, \nu(x))$, wobei $\nu(x) \in T_xS^\perp, |\nu(x)| = 1$, heisst **Einheits-Normalenfeld**.

Satz 1.5.1 *Sei S zusammenhängend. Dann gibt es genau zwei stetige Einheits-Normalenfelder $\nu_\pm = \pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ auf S.*

Beweis. Offenbar definieren $\nu_\pm$ Einheits-Normalenfelder. Sei umgekehrt N ein Einheits-Normalenfeld mit zugehörigem ν . Dann gilt punktweise

$$g(x) = \frac{\nu(x) \cdot \nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = \pm 1, \ x \in S.$$

Da ν nach Annahme stetig ist, sind die Mengen $U_\pm = \{x \in S; \pm g(x) > 0\}$ (relativ) offen mit $U_+ \cap U_- = \emptyset$, und $S = U_+ \cup U_-$. Da S zusammenhängend, folgt $U_- = \emptyset$ oder $U_+ = \emptyset$. □

Bemerkung 1.5.1 *i) Durch Auswahl eines Einheits-Normalenfeld wird eine* **Orientierung** *für S festgelegt.*

ii) Es gibt nicht orientierbare Flächen S im $\mathbb{R}^3$, die lokal als reguläre Hyperflächen beschrieben werden können, z.B. das Möbiusband.

Sei S reguläre Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ wie oben, $N(x) = (x, \nu(x))$ eine Orientierung auf S.

Definition 1.5.2 *Die Abbildung $\nu: S \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heisst* **Gauss-Abbildung**.

Beispiel 1.5.1 *i) Sei $S = S^n$, $\nu(x) = x$; das heisst, $\nu = id$ auf S^n. Insbesondere ist ν surjektiv.*

ii) Sei $S = P = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}); x^{n+1} = \sum_{i-1}^n |x^i|^2\}$ mit

$$\nu = \frac{(-2x^1, \ldots, -2x^n, 1)}{\sqrt{1 + 4\sum_{i=1}^n |x^i|^2}}.$$

Es gilt $\nu(P) = S^n_+ = \{x; x^{n+1} > 0\}$.

Die obigen Beispiele illustrieren den folgenden Satz.

Satz 1.5.2 *Sei S kompakte, reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Gauss-Abbildung $\nu\colon S \to S^n$. Dann ist ν surjektiv.*

Beweis. i) Sei $S = f^{-1}(0)$, wobei wir zunächst annehmen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. OBdA dürfen wir S als zusammenhängend voraussetzen. Nach Satz 1.5.1 dürfen wir weiter annehmen, dass $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$; andernfalls betrachte $\tilde{\nu} = -\nu$. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus S$ die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S$. Die Funktion f hat auf U konstantes Vorzeichen; allenfalls nach Übergang zu $\tilde{f} = -f$ dürfen wir daher schliesslich annehmen, dass $f|_U > 0$.

Sei $\xi \in S^n$. Betrachte die Funktion $\varphi(x) = x \cdot \xi$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Da S nach Annahme kompakt, gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in S$ mit

$$x_{\min} \cdot \xi = \min_{x \in S} x \cdot \xi < \max_{x \in S} x \cdot \xi = x_{\max} \cdot \xi.$$

Mit der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel folgt die Gleichung

$$\xi + \lambda_{\min} \nabla f(x_{\min}) = 0 = \xi + \lambda_{\max} \nabla f(x_{\max})$$

für geeignete $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} \in \mathbb{R}$: das heisst,

$$\xi = \pm \frac{\nabla f(x_{\min})}{|\nabla f(x_{\min})|} = \pm \nu(x_{\min}),$$

und analog für $x_{\max}$.

Da f bei $x_{\max}$ sowohl in Richtung von $\nu(x_{\max})$ als auch in Richtung von ξ zunimmt, gilt

$$\nu(x_{\max}) = +\xi;$$

analog

$$\nu(x_{\min}) = -\xi,$$

wie gewünscht.

ii) Allgemein sei $S = f^{-1}(0)$, wobei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Wie oben dürfen wir annehmen, dass S zusammenhängend ist und $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Sei U die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S$, $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{U}$, $W \subset \Omega$ eine zusammenhängende Umgebung von S, so dass $\nabla f \neq 0$ auf W. Für c nahe 0 ist dann $S_c = f^{-1}(c) \cap W$ kompakt, zusammenhängend, und $S_c \subset U \cup V$, wobei $U \cap V = \emptyset$. Allenfalls nach Übergang zu $\tilde{f} = -f$ folgt $S_c \subset U$ für genügend kleine $c > 0$; das heisst, $\nabla f(x)$ – also auch $\nu(x)$ – zeigt nach U für alle $x \in S$.

Der Beweis lässt sich nun abschliessen wie in i). $\square$

1.6 Geodäten

Sei S reguläre C^∞-Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha \in C^\infty(I; S)$ eine Kurve auf S mit Geschwindigkeitsvektorfeld

$$\dot{\alpha}(t) = \big(\alpha(t), \frac{d\alpha}{dt}(t)\big).$$

Als vektorwertige Funktion können wir die Abbildung $\frac{d\alpha}{dt} \in C^\infty(I;\mathbb{R}^{n+1})$ (komponentenweise) differenzieren und erhalten so das Beschleunigungsfeld

$$\ddot{\alpha}(t) = \big(\alpha(t), \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t)\big).$$

Im folgenden schreiben wir der Einfachheit halber auch $\dot{\alpha}$ anstelle von $d\alpha/dt$ sowie $\ddot{\alpha}$ anstelle von $d^2\alpha/dt^2$.

Definition 1.6.1 *Die Kurve α heisst* **Geodäte** *auf S, falls $\ddot{\alpha}$ normal ist längs α, das heisst, falls gilt*

$$\ddot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}S^\perp,\ t \in I.$$

Satz 1.6.1 *Sei $\alpha \in C^\infty(I;S)$ Geodäte auf S. Dann ist α proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Es gilt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|^2 = \ddot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0.$$

□

Geometrische Interpretation: Geodätische im $\mathbb{R}^n$ sind kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte. Zu vorgegebenen Punkten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ betrachte die Verbindungsgerade $\alpha(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $0 \le t \le 1$, mit Länge

$$L(\alpha) = \int_0^1 |\dot{\alpha}(t)|\,dt = |x_1 - x_0|.$$

Weiter gilt $\ddot{\alpha} = 0$; das heisst, α ist Geodätische. Für jede Kurve $\gamma \in C^1(I)$ mit $\gamma(1) = x_1, \gamma(0) = x_0$ gilt andererseits nach Cauchy-Schwarz:

$$L(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)|\,dt \ge \int_I \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot (x_1 - x_0)}{|x_1 - x_0|}\,dt = |x_1 - x_0| = L(\alpha).$$

Allgemein werden wir später Geodätische charakterisieren als *lokal* kürzeste Verbindungen zwischen den auf ihnen liegenden Punkten.

Physikalische Interpretation: Eine Geodäte α beschreibt die Bewegung eines Massepunktes auf S, auf welchen nur die Zwangskraft wirkt, welche $\alpha(t)$ auf S hält. Insbesondere wird nach Newton die kräftefreie Bewegung eines Massepunktes im euklidischen Raum durch die Gleichung $\ddot{\alpha} = 0$ beschrieben.

Beispiel 1.6.1 *i) Enthält S ein Geradensegment L, so erhält man nach Umparametrisierung daraus eine Geodäte.*

ii) Jeder Grosskreis auf $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$ entspricht einer Geodäten. Wähle orthonormale Vektoren e_1, e_2 und setze

$$\alpha(t) = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2 \in S^n,\ t \in \mathbb{R}$$

mit

$$\ddot{\alpha}(t) = -\alpha(t) \perp T_{\alpha(t)}S^n.$$

iii) Sei S der Zylinder

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Jede Spiralkurve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist Geodäte, denn es gilt

$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \perp T_{\alpha(t)}Z, \ t \in \mathbb{R}.$$

iii) Sei S das Ellipsoid

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

mit Halbachsen $0 < a < b < c$. Die Koordinatenebenen $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ sind Symmetrieebenen für S.

Jede mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{\alpha}(t)| = const.$ durchlaufene Schnittkurve α von E mit einer Symmetrieebene H ist Geodäte. Aus Symmetriegründen folgt unter Benutzung von Satz 1.5.1 zunächst $\nu(\alpha(t)) \in H$ für alle t. Die Ebene H wird somit aufgespannt durch die Vektoren $\nu(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)$. Weiter gilt $\ddot{\alpha}(t) \in H$ und $\ddot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|^2 = 0$; also ist $\ddot{\alpha}(t)$ proportional zu $\nu(\alpha(t))$.

Bemerkung 1.6.1 *Sei S orientiert durch $N(x) = (x, \nu(x))$. Eine Kurve α ist Geodäte auf S genau dann, wenn gilt*

$$\ddot{\alpha}(t) = (\ddot{\alpha}(t) \cdot \nu(\alpha(t)))\nu(\alpha(t)).$$

Da $\dot{\alpha}(t) \cdot \nu(\alpha(t))) \equiv 0$, erhalten wir

$$\ddot{\alpha}(t) \cdot \nu(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t) \cdot \nu(\alpha(t))) - \dot{\alpha}(t) \cdot \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)) = -\dot{\alpha}(t) \cdot \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)).$$

Somit ist α genau dann Geodäte, wenn

$$\ddot{\alpha}(t) = -\left(\dot{\alpha}(t) \cdot \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right)\nu(\alpha(t)) = -\langle\dot{\alpha}(t), d\nu(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}\nu(\alpha(t)). \tag{1.6.1}$$

Satz 1.6.2 *Zu jedem $p \in S$, $v \in T_pS$ gibt es genau eine maximale Geodäte $\alpha \in C^\infty(I;S)$ mit $\alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = v$.*

Beweis. Sei $S = f^{-1}(0)$, wobei $f \in C^\infty(\Omega)$. Wähle eine Umgebung U von S, $U \subset \Omega$, mit $\nabla f \neq 0$ in U und setze ν fort durch $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ in U. Löse das Anfangswertproblem für (1.6.1) mit Anfangswerten $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf, Satz 1.4.2, hat dieses Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung $\alpha \in C^\infty(I;\mathbb{R}^{n+1})$. Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha(t) \in S$ für alle $t \in I$.

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{df(\alpha(t))}{dt} = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha}{dt}(t) = \lambda(t)\nu(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t),$$

wobei $\lambda(t) = |\nabla f(\alpha(t))| > 0$. Setze $g(t) = \nu(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)$. Mit (1.6.1) folgt

$$\dot{g}(t) = \left(\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) + \nu(\alpha(t)) \cdot \ddot{\alpha}(t) \right) = 0,$$

also $g(t) = g(0) = 0$ und daher auch $df(\alpha(t))/dt = 0$, $f(\alpha(t)) = f(\alpha(0)) = 0$; das heisst, $\alpha(t) \in S$ für alle $t \in I$. $\square$

Beispiel 1.6.2 *i) Alle Geodäten auf S^n sind Teile von Grosskreisen, da durch jeden Punkt $p \in S^n$ zu jeder Richtung $v \in T_pS^n$ ein Grosskreis durch p existiert, zu dem v tangential ist.*

ii) Jede Geodäte auf dem Zylinder Z nach Beispiel 1.6.1.iii) ist Teil einer Spiralkurve oder einer Mantelgeraden.

Definition 1.6.2 *Die Hyperfläche S heisst* **geodätisch vollständig***, falls für jede maximale Geodäte $\alpha \in C^\infty(I;S)$ gilt $I = \mathbb{R}$.*

Beispiel 1.6.3 *i) S^n ist geodätisch vollständig, da nach Beispiel 1.6.2.i) jede Geodäte α auf S^n Teil eines Grosskreises ist.*

ii) $S^n \setminus \{p\}$ für ein $p \in S^n$ ist nicht geodätisch vollständig, da jede Geodäte durch $-p$ Teil eines Grosskreises auf S^n ist, welcher auch durch p läuft.

iii) Sei $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ und sei $f \in C^\infty(\Omega)$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

und sei $K = f^{-1}(0)$ der Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

Jede Mantellinie $\alpha \in C^\infty(]0,\infty[;K)$ mit

$$\alpha(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t), t > 0$$

ist maximale Geodäte, K also nicht geodätisch vollständig.

Satz 1.6.3 *Sei S reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, und sei S vollständig (als metrischer Raum bezüglich der euklidischen Metrik in $\mathbb{R}^{n+1}$). Dann ist S geodätisch vollständig.*

Beweis. Sei $\alpha \in C^\infty(I;S)$ maximale Geodäte, $T = \sup I \le \infty$. Nach Satz 1.6.1 dürfen wir annehmen, dass $|\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$.

Widerspruchsweise nehmen wir an, dass $T < \infty$. Da $|\dot{\alpha}(t)| = 1$, folgt

$$|\alpha(t) - \alpha(s)| \le \int_s^t |\dot{\alpha}(t')|\,dt' \le |t-s|;$$

das heisst, α ist gleichmässig (sogar Lipschitz) stetig, und es existiert $p = \lim_{t \nearrow T} \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Da S nach Voraussetzung vollständig ist, liegt p auch in S.

Analog folgt mit (1.6.1) und $|\dot{\alpha}| = 1$ für genügend grosse $s < t < T$ die Abschätzung

$$|\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(s)| \leq \int_s^t |\ddot{\alpha}(t')|dt' = \int_s^t |\dot{\alpha}(t') \cdot \frac{d}{dt}(\nu \circ \alpha)(t')|\, dt'$$
$$\leq \int_s^t |d\nu(\alpha(t'))|\, dt' \leq \sup_{p' \in B_1(p) \cap S} |d\nu(p')||t-s|;$$

also ist auch die Funktion $\dot{\alpha}$ gleichmässig stetig in einer linksseitigen Umgebung von T, und es existiert $v = \lim_{t \nearrow T} \dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Weiter gilt

$$v \cdot \nu(p) = \lim_{t \nearrow T} \dot{\alpha}(t) \cdot \nu(\alpha(t)) = 0;$$

das heisst, $v \in T_p S$.

Nach Satz 1.6.2 gibt es eine eindeutige Geodäte $\beta \in C^\infty(J; S)$ auf einem Intervall J um T mit

$$\beta(T) = p,\ \dot{\beta}(T) = v.$$

Da die Lösung des Anfangswertproblems für (1.6.1) stetig von den Daten abhängt, gibt es ein Intervall J_0 um T und $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\tau \in [T - \varepsilon, T[$ eine Geodäte $\beta_\tau \in C^\infty(J_0; S)$ existiert mit

$$\beta_\tau(\tau) = \alpha(\tau),\ \dot{\beta}_\tau(\tau) = \dot{\alpha}(\tau).$$

Da jedoch auch α dieses Anfangswertproblem löst und da die Lösung andererseits eindeutig ist, folgt $\beta_\tau = \alpha$ auf $J_0 \cap I$. Für genügend grosse $\tau < T$ setzt β_τ daher α über T hinaus fort, im Widerspruch zur angenommenen Maximalität von T. $\square$

Korollar 1.6.1 *Jede kompakte reguläre Hyperfläche S ist geodätisch vollständig.*

1.7 Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung

Sei S reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Orientierung $N(x) = (x, \nu(x))$. Weiter sei $\alpha \in C^\infty(I; S)$ eine Kurve auf S und $X \in C^\infty(I; \mathbb{R}^{n+1})$ ein (tangentiales) Vektorfeld längs α; das heisst,

$$X(t) \in T_{\alpha(t)} S, \forall t.$$

Definition 1.7.1 *Die* **kovariante Ableitung** *von X längs α ist das Vektorfeld*

$$\frac{D}{dt} X(t) = \frac{dX}{dt}(t) - \left(\nu(\alpha(t)) \cdot \frac{dX}{dt}(t)\right) \nu(\alpha(t));$$

das heisst, in jedem Punkt $\alpha(t)$ erhalten wir $\frac{D}{dt} X(t)$ durch Projektion von $\dot{X}(t)$ in den Tangentialraum $T_{\alpha(t)} S$.

Beispiel 1.7.1 *Die Kurve α ist Geodäte genau dann, wenn $\frac{D}{dt}\dot{\alpha}(t) = 0$.*

Satz 1.7.1 *Die kovariante Ableitung hat die Eigenschaften*

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$;

ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{d}{dt}f \cdot X + f\frac{D}{dt}X$;

iii) $\frac{d}{dt}(X \cdot Y) = \frac{D}{dt}X \cdot Y + X \cdot \frac{D}{dt}Y$.

Beweis. Die angegebenen Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition. Beispielsweise erhalten wir mit der Produktregel

$$\frac{d}{dt}(X \cdot Y) = \dot{X} \cdot Y + X \cdot \dot{Y} = \frac{D}{dt}X \cdot Y + X \cdot \frac{D}{dt}Y,$$

da $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)}S$ für alle t. Es folgt Eigenschaft iii) □

Definition 1.7.2 *Das Vektorfeld X heisst* **parallel** *längs α, falls $\frac{D}{dt}X = 0$.*

Beispiel 1.7.2 *Sei α Geodäte. Dann ist $\dot{\alpha}$ parallel längs α.*

Satz 1.7.2 *Für parallele Vektorfelder X, Y längs α gilt*

i) $X + Y$ *und* cX *sind parallel für jedes* $c \in \mathbb{R}$;

ii) $\frac{d}{dt}|X(t)|^2 = \frac{d}{dt}(X \cdot X) = 2\frac{D}{dt}X \cdot X = 0$;

iii) $\frac{d}{dt}(X \cdot Y) = \frac{D}{dt}X \cdot Y + X \cdot \frac{D}{dt}Y = 0$.

Insbesondere bleibt der durch

$$\cos\gamma(t) = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|}$$

definierte Winkel γ zwischen $X(t)$ und $Y(t)$ erhalten.

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 1.7.1. □

Bemerkung 1.7.1 *Sei X ein Vektorfeld längs α. Wegen*

$$\nu(\alpha(t)) \cdot \dot{X}(t) = \frac{d}{dt}(\nu(\alpha(t)) \cdot X(t)) - \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)) \cdot X(t)$$

ist X parallel längs α genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \frac{D}{dt}X(t) + (\nu(\alpha(t)) \cdot \dot{X}(t))\,\nu(\alpha(t)) \\ &= -(X(t) \cdot \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)))\,\nu(\alpha(t)). \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Mit Hilfe von Bemerkung 1.7.1 erhalten wir leicht den folgenden Satz.

Satz 1.7.3 *Sei S reguläre Hyperfläche, $\alpha \in C^\infty(I; S)$ eine Kurve auf S, $\alpha(0) = p$. Dann gibt es zu jedem $X_0 \in T_pS$ genau ein paralleles Vektorfeld X längs α mit $X(0) = X_0$.*

Beweis. Die lineare Differentialgleichung (1.7.1) besitzt eine auf ganz I definierte Lösung $X \in C^\infty(I;\mathbb{R}^{n+1})$ mit Anfangswert

$$X(0) = X_0.$$

Da mit (1.7.1) weiter folgt

$$\frac{d}{dt}(X(t)\cdot \nu(\alpha(t))) = \dot{X}(t)\cdot \nu(\alpha(t)) + X(t)\cdot \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)) = 0,$$

ist X tangential längs α. □

Beispiel 1.7.3 *Sei $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $e_1,\dots,e_3$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^3$, und sei α der Äquator $\alpha(t) = e_1\cos t + e_2 \sin t$, $X \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld längs α. Der Tangentialraum*

$$T_{\alpha(t)}S = \operatorname{span}\{\dot\alpha(t), e_3\}$$

wird aufgespannt von den parallelen Vektorfeldern $\dot\alpha$ und $e_3 = \alpha \times \dot\alpha$, dem Normalenvektor zur Bahnebene. Mit Satz 1.7.2 folgt, dass jedes Vektorfeld

$$X(t) = c_1\dot\alpha(t) + c_2 e_3$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ parallel ist längs α. Gemäss Satz 1.7.3 werden alle parallelen Vektorfelder so beschrieben.

Insbesondere ist das Vektorfeld X aus Beispiel 1.7.3 ebenfalls periodisch mit der Periode 2π der Kurve α. Ist dies stets der Fall?

Beispiel 1.7.4 *Sei $S = S^2$, α der Breitenkreis*

$$\alpha(t) = (\cos\theta\cos t, \cos\theta \sin t, \sin\theta),\ t \in \mathbb{R},$$

wobei $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$. In jedem Punkt $\alpha(t)$ wähle die Vektoren $\dot\alpha(t), \alpha(t)\times\dot\alpha(t)$ als Basis für $T_{\alpha(t)}S^2$. Das Vektorfeld

$$X(t) = X_1(t)\dot\alpha(t) + X_2(t)\alpha(t)\times\dot\alpha(t)$$

ist gemäss (1.7.1) parallel längs α, falls

$$\begin{aligned}\dot X &= \dot X_1\dot\alpha + \dot X_2 \alpha\times\dot\alpha + X_1\ddot\alpha + X_2\alpha\times\ddot\alpha\\ &= -\alpha(X\cdot\dot\alpha) = -\alpha X_1\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Insbesondere muss gelten

$$\dot X\cdot\dot\alpha = \dot X_1\cos^2\theta + X_1\ddot\alpha\cdot\dot\alpha + X_2\alpha\times\ddot\alpha\cdot\dot\alpha = -X_1\cos^2\theta\alpha\cdot\dot\alpha = 0.$$

Mit

$$\ddot\alpha\cdot\dot\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot\alpha|^2 = 0,\ \alpha\times\ddot\alpha\cdot\dot\alpha = -\sin\theta\cos^2\theta$$

folgt

$$\dot X_1 = \sin\theta X_2.$$

Analog folgt aus

$$\dot X\cdot(\alpha\times\dot\alpha) = \dot X_2|\alpha\times\dot\alpha|^2 + X_1\alpha\times\dot\alpha\cdot\ddot\alpha = 0$$

die Bedingung

$$\dot{X}_2 = -\sin\theta X_1.$$

In komplexer Notation erhalten wir somit für $Z = X_1 + iX_2$ die Gleichung

$$\dot{Z} = -i\sin\theta Z;$$

das heisst,

$$Z(t) = e^{-i\sin\theta t} Z(0).$$

Im physikalischen Modell gibt $X(t)$ die Richtung an, in welcher ein längs α mitgeführtes Pendel schwingt (Foucaultsches Pendel).

Sei $\alpha \in C^\infty([0,1]; S)$ eine Kurve von $p = \alpha(0)$ nach $q = \alpha(1)$, $X_0 \in T_pS$. Sei $X(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems (1.7.1) mit $X(0) = X_0$. Setze $X_1 = X(1) \in T_qS$.

Definition 1.7.3 *Die durch $X_1 =: P_\alpha(X_0)$ definierte Abbildung*

$$P_\alpha \colon T_pS \to T_qS.$$

heisst **Parallelverschiebung** *längs α,*

Satz 1.7.4 *P_α ist ein isometrischer Vektorraum-Isomorphismus.*

Beweis. Linearität von P_α folgt mit Satz 1.7.2.i). Weiter liefert Teil ii) von Satz 1.7.2 die Beziehung $|X_1| = |X_0|$; das heisst, P_α ist isometrisch. Insbesondere ist P_α injektiv, also auch bijektiv, da $\dim T_pS = n = \dim T_qS$. □

Bemerkung 1.7.2 *i) Durch Aneinanderhängen $P_{\alpha_k} \circ P_{\alpha_{k-1}} \circ \ldots \circ P_{\alpha_1}$ können wir die Parallelverschiebung P_α längs eines stückweise glatten Weges $\alpha = \alpha_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_1$ definieren.*

ii) Im allgemeinen ist die Parallelverschiebung abhängig vom Weg. Sogar falls α und β Geodäten sind mit $\alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1)$, gilt im allgemeinen

$$P_\alpha X_0 \neq P_\beta X_0,$$

wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.7.5 *Seien α und β Grosskreise auf S^2 in zueinander senkrechten Ebenen mit $\alpha(0) = \beta(0) = -\alpha(1) = -\beta(1)$, und sei $X_0 = \dot{\alpha}(0)$. Gemäss Beispiel 1.7.3 gilt $P_\alpha X_0 = -X_0$, während $P_\beta X_0 = X_0$.*

1.8 Die Weingarten-Abbildung

Sei $S = f^{-1}(0)$ reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert von f. OBdA sei S zusammenhängend und durch $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ orientiert. (Im folgenden wird zur Vereinfachung der Notation nicht mehr unterschieden zwischen dem Normalfeld $N(p) = (p, \nu(p))$ und ν.)

Beachte, dass N durch $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ zu einer glatten Funktion $N \in C^\infty(U; \mathbb{R}^{n+1})$ in einer Umgebung $U \subset \Omega$ von S fortgesetzt werden kann mit $|N|^2 = 1$. Daher gilt

$$N(p) \cdot dN(p)v = 0, \forall v \in \mathbb{R}^{n+1};$$

insbesondere erhalten wir die Beziehung

$$dN(p)v \in T_pS.$$

für alle $p \in S$, $v \in T_pS$.

Definition 1.8.1 *Die Abbildung $L_p \colon T_pS \to T_pS$ mit*

$$v \mapsto L_pv = -dN(p)v$$

heisst **Weingarten-Abbildung** *der orientierten Hyperfläche S.*

Bemerkung 1.8.1 *Sei $\alpha \in C^\infty(I; S)$ Kurve durch $\alpha(0) = p$ mit $\dot\alpha(0) = v$ nach Satz 1.4.1. Dann gilt*

$$dN(p)v = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0);$$

insbesondere ist L_p nur durch die Werte von N auf S bestimmt.

Beispiel 1.8.1 *Sei $S = S^n$ mit $N(x) = x$ auf S^n. Nach obiger Bemerkung gilt $L_p(v) = -v$, da $\tilde N = id$ auf S^n mit N übereinstimmt.*

Die Weingarten-Abbildung liefert ein Mass für die Krümmung von S in Richtung v. Genauer gilt:

Satz 1.8.1 *Für* **jede** *Kurve $\alpha \in C^\infty(I; S)$ durch $\alpha(0) = p$ mit $\dot\alpha(0) = v$ gilt*

$$L_p(v) \cdot v = \ddot\alpha(0) \cdot N(p).$$

Beweis: Es gilt

$$0 = \frac{d}{dt}(\dot\alpha(t) \cdot N(\alpha(t)))|_{t=0} = \ddot\alpha(0) \cdot N(p) + \dot\alpha(0) \cdot dN(p)\dot\alpha(0).$$

□

Satz 1.8.2 *L_p ist bezüglich dem Skalarprodukt im umgebenden Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ selbstadjungiert; das heisst, es gilt*

$$L_p(v) \cdot w = L_p(w) \cdot v, \ \forall v, w \in T_pS.$$

Beweis: Mit der Fortsetzung $N = \lambda \nabla f$ von N, wobei $\lambda = |\nabla f|^{-1}$, erhalten wir für $v, w \in T_pS$ die Beziehung

$$\begin{aligned} L_p(v) \cdot w &= \langle -d(\lambda \nabla f)(p)v, w \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= -\lambda \langle d\nabla f(p)v, w \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - d\lambda(p)v \, \langle \nabla f(p), w \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= -\lambda \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j = L_p(w) \cdot v. \end{aligned}$$

Beachte, dass $\langle \nabla f(p), w \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$. □

1.9 Ebene Kurven

Sei $C = f^{-1}(0)$ reguläre Kurve, orientiert durch $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, wobei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $c = 0$ regulärer Wert. Lokal kann man C als Graph darstellen oder durch eine Abbildung $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ parametrisieren.

Sei $p \in C$. Da $T_pS \cong \mathbb{R}$, wird L_p durch eine 1×1-Matrix mit Koeffizienten $k(p)$ dargestellt mit

$$L_p(v) = k(p)v, \forall v \in T_pC.$$

Definition 1.9.1 *Die Zahl $k(p)$ heisst die* **Krümmung** *von C bezüglich N an der Stelle p.*

Bemerkung 1.9.1 *Es gilt*

$$k(p) = \frac{L_p(v) \cdot v}{|v|^2},\ \forall v \in T_pC \setminus \{0\}.$$

Falls $\alpha \in C^\infty(I;C)$ lokale Parametrisierung von C ist mit $|\dot\alpha(t)| > 0$, so erhalten wir mit Satz 1.8.1 für k die Darstellung

$$k(\alpha(t)) = \frac{L_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t)) \cdot \dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|^2} = \frac{\ddot\alpha(t) \cdot N(\alpha(t)))}{|\dot\alpha(t)|^2}.$$

Insbesondere ist für $k > 0$ die Kurve C in Richtung von N gekrümmt.

Beispiel 1.9.1 *i) Der Kreis*

$$C = \{(x,y);\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$$

wird parametrisiert durch $\alpha(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Je nach Wahl der Orientierung

$$N(x,y) = \pm\frac{(x-x_0, y-y_0)}{r},$$

erhalten wir

$$k(\alpha(t)) = \mp\frac{1}{r}.$$

ii) Der **Schmiegekreis** *an eine Kurve C in $p \in C$ ist ein Kreis S durch p mit $T_pC = T_pS$ und Krümmung $k_C \equiv k_S(p)$, wobei die Normalen an C und S in p gleichorientiert sind. Dieser Schmiegekreis hat nach Beispiel i) den Radius $|k_C(p)|^{-1}$ und Mittelpunkt $p + k_C^{-1}(p) \cdot N(p)$.*

1.10 Der Umlaufsatz

Sei C eine geschlossene, reguläre Kurve der Länge L mit Orientierung N, parametrisiert durch eine L-periodische Abbildung $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R};C)$ mit $|\dot\alpha| \equiv 1$.

Begüglich einem fest gewählten Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ können wir $\dot\alpha(t)$ in der Form

$$\dot\alpha(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) \tag{1.10.1}$$

mit einer stetigen Funktion ϑ schreiben, wobei ϑ bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist. Nach Wahl von $\vartheta(0)$ ist die Funktion ϑ durch die Forderung der Stetigkeit eindeutig bestimmt. Da α periodisch mit Periode L, folgt zudem

$$\vartheta(L) = \vartheta(0) \mod 2\pi.$$

Weiter gilt

$$N(\alpha(t)) = (-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t)),$$

und nach Abschnitt 1.9 erhalten wir für $k(t)$ die Darstellung

$$k(t) = \ddot{\alpha}(t) \cdot N(\alpha(t)) = \dot{\vartheta}(t).$$

Insbesondere erkennen wir, dass für jede geschlossene Kurve gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \dot{\vartheta}(t)\,dt \in \mathbb{Z}. \tag{1.10.2}$$

Offenbar gilt (1.10.2) auch für beliebige "immersierte" Kurven $C = \alpha(\mathbb{R})$, wobei α periodisch mit Periode L und mit $|\dot{\alpha}| = 1$.

Definition 1.10.1 *Die Zahl*

$$j = \frac{1}{2\pi}\int_0^L k(t)\,dt \in \mathbb{Z}$$

heisst **Umlaufzahl** *der geschlossenen Kurve* $C = \alpha(\mathbb{R})$.

Satz 1.10.1 *(Umlaufsatz) Sei C eine reguläre, einfach geschlossene Kurve mit Orientierung N und Krümmung k, und sei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; C)$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L, $k(t) = k(\alpha(t))$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L k(t)\,dt = \pm 1.$$

Beweis (nach Hopf) Wir dürfen annehmen, dass

$$0 = \alpha(0) \in C \subset \{(x,y); x \geq 0\}.$$

Für $0 \leq s < t \leq L$ mit $t - s < L$ sei $\vartheta(s,t)$ der Winkel zwischen $(\alpha(t) - \alpha(s))$ und dem Vektor $e_1 = (1,0)$. Durch die Forderung der Stetigkeit und die Bedingung

$$|\vartheta(0,t)| \leq \pi/2 \text{ für alle } t \in]0, L[$$

ist $\vartheta(s,t)$ eindeutig bestimmt. Weiter gilt dann auch

$$|\vartheta(s,L) - \pi| \leq \pi/2 \text{ für alle } s \in]0, L[,$$

und

$$\lim_{t\nearrow L}\vartheta(0,t) - \lim_{t\searrow 0}\vartheta(0,t) = \lim_{s\nearrow L}\vartheta(s,L) - \lim_{s\searrow 0}\vartheta(s,L) = \pm\pi.$$

Andererseits liefert die Funktion

$$\vartheta(t) := \lim_{s\nearrow t}\vartheta(s,t) = \lim_{r\searrow t}\vartheta(t,r)$$

eine Darstellung für $\dot{\alpha}(t)$ gemäss (1.10.1), wobei die Konvergenz wegen

$$|\vartheta(t) - \vartheta(s,t)| \le \left| \dot{\alpha}(t) - \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{|\alpha(t) - \alpha(s)|} \right| \le C \sup_r |\ddot{\alpha}(r)| |t - s|$$

gleichmässig ist bezüglich s und t; $\vartheta(t)$ ist also insbesondere stetig. Mit den Beziehungen

$$\vartheta(L) = \lim_{s \nearrow L} \vartheta(s, L), \;\; \vartheta(0) = \lim_{t \searrow 0} \vartheta(0, t)$$

und

$$\lim_{t \nearrow L} \vartheta(0, t) = \lim_{s \searrow 0} \vartheta(s, L)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_0^L k(t)\, dt &= \vartheta(L) - \vartheta(0) = \lim_{s \nearrow L} \vartheta(s, L) - \lim_{t \searrow 0} \vartheta(0, t) \\ &= \lim_{s \nearrow L} \vartheta(s, L) - \lim_{s \searrow 0} \vartheta(s, L) + \lim_{t \nearrow L} \vartheta(0, t) - \lim_{t \searrow 0} \vartheta(0, t) = \pm 2\pi. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.10.1 *i) Für einen geschlossenen Weg $\gamma \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$ mit $\gamma(t) \neq z_0$, $0 \le t \le 1$, liefert der Residuensatz die Beziehung*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} =: l \in \mathbb{Z}.$$

Wie hängt diese in der komplexen Analysis eingeführte "Umlaufzahl" l der Kurve γ um z_0 mit dem in Definition 1.10.1 eingeführten Begriff zusammen?

Für eine geschlossene reguläre Kurve C der Länge L mit Parametrisierung $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; C)$ mit $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ und Periode L betrachte die zugehörige Bahn $\gamma(t) = \dot{\alpha}(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\alpha}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{\ddot{\alpha}(t)\, dt}{\dot{\alpha}(t)}.$$

Nach Abschnitt 1.9 gilt, mit $\overline{x + iy} = x - iy$,

$$\frac{\ddot{\alpha}}{i\dot{\alpha}} = -\frac{i\overline{\dot{\alpha}}\, \ddot{\alpha}}{\overline{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}} = \overline{i\dot{\alpha}}\, \ddot{\alpha} = \overline{N}\, k\, N = k.$$

Somit stimmt die Umlaufzahl von C überein mit der Umlaufzahl von $\dot{\alpha}$ um 0.

ii) Die **Totalkrümmung** *der nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $C = \alpha([0, L])$ ist gegeben durch*

$$\int_0^L |k(t)|\, dt = \int_0^L |(N \circ \alpha) \cdot \ddot{\alpha}|\, dt = \int_0^L \left| \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t) \right| dt.$$

Sie entspricht der Länge der parametrisierten Kurve $N \circ \alpha \in C^\infty([0, L]; S^1)$.

1.11 Isoperimetrische Ungleichung

Sei C eine reguläre, geschlossene Kurve der Länge L, $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; C)$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L. Nach dem **Jordanschen Kurvensatz** besitzt $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Es sei Ω die von C berandete beschränkte Komponente mit Flächeninhalt $A = \mu(\Omega)$.

Satz 1.11.1 *(Isoperimetrische Ungleichung) Es gilt stets*

$$4\pi A \leq L^2,$$

und Gleichheit gilt genau für Kreise C.

Beweis (nach Lax, Amer. Math. Monthly **102.2** (1995), 158–159). Zunächst bemerken wir, dass es genügt, konvexe Gebiete zu betrachten. Ersetze allenfalls Ω durch $\tilde{\Omega} = \operatorname{conv}(\Omega)$, die konvexe Hülle, mit

$$\tilde{A} = \mu(\tilde{\Omega}) \geq A,\ \tilde{L} = \text{Länge } (\partial\tilde{\Omega}) \leq L.$$

Falls Satz 1.11.1 für konvexe Gebiete gilt, so folgt

$$4\pi A \leq 4\pi \tilde{A} \leq \tilde{L}^2 \leq L^2,$$

wie gewünscht.

Sei also Ω konvex. Wähle Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass für

$$\Omega_\pm = \{(x, y) \in \Omega; \pm y \geq 0\}$$

gilt

$$\mu(\Omega_+) \geq \mu(\Omega_-)$$

und

$$|\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_+| = |\partial\Omega \cap \Omega_-|.$$

Nach Skalierung der Koordinatenachsen dürfen wir weiter annehmen, dass $L = 2\pi$ und $\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_+ = \alpha([0, \pi])$.

Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ mit $\dot{\alpha}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. Die Flächenformel der Analysis II ergibt

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) \leq 2\mu(\Omega_+) &= -2\int_{\partial\Omega_+} y\,dx = -2\int_0^\pi y(t)\dot{x}(t)\,dt \\ &\leq \int_0^\pi (y^2(t) + \dot{x}^2(t))\,dt = \int_0^\pi (y^2 + (1 - \dot{y}^2))\,dt. \end{aligned} \tag{1.11.1}$$

Beachte, dass $y \in C^\infty([0, \pi])$, und $y(0) = y(\pi) = 0$. Das folgende Lemma liefert daher

$$A = \mu(\Omega) \leq \pi \tag{1.11.2}$$

und somit den ersten Teil der Behauptung. Falls in (1.11.2) Gleichheit gilt, so folgt mit Lemma 1.11.1 die Darstellung $y(t) = C\sin(t)$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt die Gleichheit in (1.11.1) genau dann, wenn $\mu(\Omega_-) = \mu(\Omega_+)$ und $\dot{x} = y$. Die Beziehungen $\dot{\alpha}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ sowie $y(t) \geq 0$ für $0 < t < \pi$ liefern sodann $C = 1$; das Gebiet Ω_+ muss also ein Halbkreis sein, und ebenso Ω_-. $\square$

Lemma 1.11.1 *Sei $y \in C^\infty([0,\pi])$ mit $y(0) = y(\pi) = 0$. Dann gilt*

$$\int_0^\pi y^2\,dt \le \int_0^\pi \dot{y}^2\,dt,$$

und Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $y(t) = C\sin(t)$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Schreibe $y(t) = u(t)\sin t$, wobei $u \in C^\infty(]0,\pi[)$. Mit der Regel von de l'Hopital folgt sogar $u \in C^0([0,\pi])$, und daher auch $\dot{u}(t)\sin t = \dot{y}(t) - u(t)\cos t \in C^0([0,\pi])$.

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (y^2 - \dot{y}^2)\,dt &= \int_0^\pi (u^2(\sin^2 t - \cos^2 t) - 2u\dot{u}\sin t\cos t - \dot{u}^2\sin^2 t)\,dt \\ &\le \int_0^\pi (u^2(\sin^2 t - \cos^2 t) - 2u\dot{u}\sin t\cos t)\,dt \\ &= \int_0^\pi \big(-u^2\cos(2t) - \frac{d}{dt}(\frac{u^2}{2})\sin(2t)\big)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d}{dt}(u^2\sin 2t)\,dt = 0\end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\dot{u} = 0$. □

Bemerkung 1.11.1 *Peter Topping (Comm. Math. Helv.* **72** *(1997), 316-328) hat den folgenden 2-Zeilen-Beweis der isoperimetrischen Ungleichung gefunden. Wie üblich schreiben wir $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = x - iy$, $dz \wedge d\overline{z} = \frac{2}{i}dx \wedge dy = -d\overline{z} \wedge dz$. Sei $C = \partial\Omega$ so orientiert, dass Ω zur Linken liegt. Mit Residuensatz, Cauchy'schem Integralsatz und dem Satz von Fubini folgt:*

$$\begin{aligned}4\pi A = 2\pi i \int_\Omega \frac{2}{i}\,dx\,dy &= \int_\Omega \left(\int_C \frac{dw}{w-z}\right) dz \wedge d\overline{z} = \int_C \left(\int_\Omega \frac{d\overline{z} \wedge dz}{z-w}\right) dw \\ &= \int_C \left(\int_C \frac{\overline{z} - \overline{w}}{z-w}\,dz\right) dw \le L^2.\end{aligned}$$

□

1.12 Die Krümmung von Hyperflächen

Sei $S = f^{-1}(0)$ reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $c = 0$ regulärer Wert von f. OBdA sei S zusammenhängend und durch $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ orientiert.

Definition 1.12.1 *Zu $p \in S$, $v \in T_pS$ mit $|v| = 1$ sei*

$$k(v) = k_p(v) = L_p(v)v$$

die **Normalkrümmung** *von S an der Stelle p in Richtung v.*

Mit Satz 1.8.1 folgt $k(v) = N(p) \cdot \ddot{\alpha}(0)$ für *jede* Kurve $\alpha \in C^\infty(I;S)$ mit $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$, insbesondere für die durch den **Normalschnitt** $S \cap E_{p,v} = (f_{|E_{p,v}})^{-1}(0)$ definierte Kurve C, wobei

$$E_{p,v} = p + \mathrm{span}\{N(p), v\}$$

die durch die Vektoren $N(p)$ und v aufgespannte affine Ebene durch p ist.

Beispiel 1.12.1 *i) Sei $S = S^n$ mit Orientierung $N(p) = -p$. Dann gilt $L_p = id$ und daher $k_p(v) = 1$ für alle $p \in S$, $v \in T_pS$.*

ii) Sei S das Rotationshyperboloid

$$S = \{p = (x,y,z); y^2 + z^2 = 1 + x^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit Orientierung $N(x,y,z) = \frac{(-x,y,z)^t}{|(x,y,z)|}$. Wir setzen N fort zu einer differenzierbaren Funktion in einer Umgebung von S. Fixiere $p = (0,0,1) \in S$ mit

$$T_pS = \mathrm{span}(e_1, e_2).$$

Für $v = (v_1, v_2, 0)^t \in T_pS$ mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$ erhalten wir

$$L_pv = -dN(p)v = (-v_1, v_2, 0)^t;$$

also

$$k(v) = L_pv \cdot v = v_2^2 - v_1^2.$$

Insbesondere folgt

$$k(e_1) = -1,\ k(e_2) = 1,\ k(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)) = 0.$$

Beachte, dass die Geraden $l_\pm = \{(t, \pm t, 1); t \in \mathbb{R}\}$ auf S liegen.

iii) Sei S der Zylinder

$$Z = \{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = 1\},$$

mit Orientierung $N(x,y,z) = (-x,-y,0)^t$. Fixiere $p = (1,0,0)$ mit

$$T_pZ = \mathrm{span}(e_2, e_3).$$

Aus den Identitäten

$$L_p(e_2) = -dN(p)e_2 = -\frac{\partial N(p)}{\partial y} = e_2,\ L_p(e_3) = -\frac{\partial N(p)}{\partial z} = 0$$

erhalten wir sofort $k(e_2) = 1$ sowie $k(e_3) = 0$.

Gemäss Satz 1.8.2 ist $L_p \colon T_pS \to T_pS$ bezüglich dem Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$ selbstadjungiert. Wähle eine Orthonormal-Basis $e_1, \ldots, e_n$ für T_pS. Für die Matrix-Darstellung $A = (a_i^j)$ von L_p bezüglich $(e_i)_{1 \le i \le n}$ mit $L_pe_i = \sum_j a_i^j e_j$ folgt

$$a_i^j = L_pe_i \cdot e_j = L_pe_j \cdot e_i = a_j^i;$$

das heisst, $A = A^t$ ist symmetrisch.

Nach einem Lehrsatz der linearen Algebra kann man A durch eine Drehung der Basis $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ diagonalisieren. OBdA sei A diagonal bezüglich $(e_i)_{1\leq i\leq n}$,

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$L_p e_i = k_i e_i, 1 \leq i \leq n.$$

Wir erhalten

Satz 1.12.1 *In jedem Punkt $p \in S$ gibt es eine Orthonormalbasis $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ von T_pS, bestehend aus Eigenvektoren von L_p mit Eigenwerten $k_i = L_p e_i \cdot e_i = k(e_i) \in \mathbb{R}$.*

Definition 1.12.2 *Die Eigenwerte $k_i = k(e_i)$ von L_p heissen* **Hauptkrümmungen**, *die zugehörigen Eigenvektoren* **Hauptkrümmungsrichtungen** *von S in p.*

Beispiel 1.12.2 *i) Sei S das Hyperbolid aus Beispiel 1.12.1.ii), $p = (0,0,1) \in S$. Bezüglich der Basis e_1, e_2 für T_pS hat L_p die Darstellung*

$$L_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind e_1, e_2 die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt p und $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ die zugehörigen Hauptkrümmungen.

ii) Sei Z der Zylinder aus Beispiel 1.12.1.iii), $p = (1,0,0)$. Bezüglich der Basis e_2, e_3 für T_pZ hat L_p die Darstellung

$$L_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind e_2, e_3 die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt p mit zugehörigen Hauptkrümmungen $k_1 = 1$, $k_2 = 0$.

Die Eigenwerte k_i lassen sich charakterisieren mit Hilfe der zu L_p assoziierten quadratischen Form.

Definition 1.12.3 *Die* **2. Fundamentalform** *in $p \in S$ ist gegeben durch*

$$II_p(v) = L_p v \cdot v, \ v \in T_pS.$$

Die **1. Fundamentalform** *ist die vom Skalarprodukt des umgebenden euklidischen Raumes induzierte Form*

$$I_p(v) = v \cdot v, \ v \in T_pS.$$

Bemerkung 1.12.1 *Aus der Symmetrie von L_p folgt*

$$L_p v \cdot w = \frac{1}{2}(II_p(v+w) - II_p(v) - II_p(w));$$

das heisst, man kann L_p aus II_p zurückgewinnen.

Satz 1.12.2 *(Mini-Max-Prinzip) Es seien $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$ die Eigenwerte von L_p. Dann gilt*

$$k_i = \min_{V \subset T_p S, \dim V = i} \quad \max_{0 \neq v \in V} \frac{II_p(v)}{I_p(v)};$$

insbesondere gilt

$$k_1 = \min_{0 \neq v \in T_p S} \frac{II_p(v)}{I_p(v)}, \ k_n = \max_{0 \neq v \in T_p S} \frac{II_p(v)}{I_p(v)}.$$

Beweis. Für $v = (v_1, \ldots, v_i, 0, \ldots, 0) \in V_i = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_i\}$ gilt

$$II_p(v) = \sum_{j=1}^{i} k_j v_j^2 \leq k_i \sum_j v_j^2 = k_i I_p(v).$$

Es folgt

$$\min_{V \subset T_p S, \dim V = i} \quad \max_{0 \neq v \in V} \frac{II_p(v)}{I_p(v)} \leq \max_{0 \neq v \in V_i} \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = II_p(e_i) = k_i.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $V \subset T_p S$ mit $\dim V = i$. Es gibt $v \in V \setminus \{0\}$ mit $v \perp V_{i-1}$. (Sonst wäre die Orthogonalprojektion von V auf V_{i-1} injektiv und daher $dim\, V < i$ im Widerspruch zur Wahl von V.) Dieser Vektor v hat die Darstellung $v = (0, \ldots, 0, v_i, \ldots, v_n)$. Es folgt

$$II_p(v) = \sum_{j=i}^{n} k_j v_j^2 \geq k_i \sum_j v_j^2 = k_i I_p(v).$$

$\square$

Bemerkung 1.12.2 *i) Die elementar-symmetrischen Funktionen der Eigenwerte k_i von L_p, insbesondere die Grössen*

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{n} tr(A) = \frac{1}{n} tr(L_p)$$

sowie

$$K = \Pi_{i=1}^{n} k_i = \det(A) = \det(L_p)$$

sind unabhängig von der Wahl einer Orthonormal-Basis (e_i) für $T_p S$ zur Berechnung der Matrix-Darstellung A von L_p.

ii) Falls $\dim S = n = 2l$, *so ist K unabhängig von der Wahl der Orientierung, insbesondere im Fall $n = 2$.*

Definition 1.12.4 *Die Grösse H heisst die* **mittlere Krümmung**, *K die* **Gauss-Kroneckersche Krümmung** *von S im Punkt p bezüglich N.*

Die Hauptkrümmungen beschreiben die Gestalt von S lokal, wie folgt.

Definition 1.12.5 *Ein Punkt $p \in S$ heisst* **elliptisch**, *falls die 2. Fundamentalform II_p positiv oder negativ definit ist. Dabei heisst II_p positiv definit ($II_p > 0$), falls gilt*

$$II_p(v) > 0, \forall v \neq 0;$$

analog heisst II_p negativ definit ($II_p < 0$), falls gilt

$$II_p(v) < 0, \forall v \neq 0.$$

Bemerkung 1.12.3 *Ein Punkt p ist genau dann elliptisch, wenn alle Hauptkrümmungen dasselbe Vorzeichen haben, und dies ist genau dann der Fall, wenn S lokal ganz auf einer Seite von T_pS liegt.*

Satz 1.12.3 *Jede kompakte reguläre Hyperfläche $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthält einen elliptischen Punkt.*

Beweis. Da S kompakt ist, gibt es $R > 0$ mit $S \subset B_R(0)$. Sei $0 < r < R$ minimal mit $S \subset \overline{B_r(0)}$, und sei $p \in S \cap \partial B_r(0)$.

Setze $S' = \partial B_r(0)$. Beachte, dass $T_pS = T_pS'$. OBdA sei $N(p) = N'(p)$, wobei wir für $N'(p)$ die Orientierung $N'(p) = -p/r$ wählen können. Es seien $L_p, L'_p \colon T_pS \to T_pS$ die Weingarten-Abbildungen von S, bzw. S' an der Stelle p, $k(v)$ und $k'(v)$ die entsprechenden Normalkrümmungen in Richtung $v \in T_pS$.

Nach einer Drehung der Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $N'(p) = (0, \ldots, 0, 1)$, $T_pS = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Sei $p = (x_0, y_0)$. In einer geeigneten Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von p gilt dann $S \cap W = graph(h)$, $S' \cap W = graph(h')$ mit Funktionen $h \geq h' \in C^\infty(U)$, wobei $h(x_0) = h'(x_0) = y_0$, $dh(x_0) = dh'(x_0) = 0$.

Zu $v \in T_pS$ mit $|v| = 1$ betrachte die Kurven

$$\alpha(t) = (x_0 + tv, h(x_0 + tv)) \colon I \to S$$
$$\alpha'(t) = (x_0 + tv, h'(x_0 + tv)) \colon I \to S'$$

durch p mit $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}'(0) = v$. Mit Satz 1.8.1 erhalten wir

$$k(v) = N(p) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\alpha(0) = \frac{d^2}{dt^2}h(x_0 + tv)|_{t=0},$$
$$k'(v) = \frac{1}{r} = N(p) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\alpha'(0) = \frac{d^2}{dt^2}h'(x_0 + tv)|_{t=0}.$$

Andererseits liefert Taylor-Entwicklung um $t = 0$ die Abschätzung

$$0 \leq h(x_0 + tv) - h'(x_0 + tv) = \frac{1}{2}t^2 \frac{d^2}{dt^2}(h(x_0 + tv) - h'(x_0 + tv))|_{t=0} + o(t^2),$$

wobei $o(t^2)/t^2 \to 0$ für $t \to 0$, und wir erhalten $k(v) \geq k'(v) = \frac{1}{r} > 0$. Da $v \in T_pS$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.12.4 *Sei S zusammenhängend kompakte reguläre Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Orientierung N und Gauss-Krümmung K. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) $K(p) \neq 0, \forall p \in S$;

ii) Jeder Punkt $p \in S$ ist elliptisch.

Beweis. Die Abbildung $S \ni p \to k_1(p)$ ist aufgrund der Charakterisierung von k_1 nach Satz 1.12.2 stetig.

Nach Satz 1.12.3 besitzt S einen elliptischen Punkt p_0. OBdA sei $II_{p_0} > 0$ und damit auch $k_1(p_0) > 0$.

i) $\Rightarrow$ ii) Falls $K(p) \neq 0$ für alle p, so folgt auch $k_1(p) \neq 0$ für alle p. Da $k_1(p_0) > 0$, und da S zusammenhängend, folgt $k_1 > 0$ auf S, also auch $k_i > 0$, $1 \leq i \leq n$; das heisst, jeder Punkt p ist elliptisch.

ii) $\Rightarrow$ i) Falls jeder Punkt p elliptisch ist, kann k_1 in keinem Punkt $p \in S$ verschwinden. Da S zusammenhängend, $k_1(p_0) > 0$, folgt $k_1 > 0$ auf S, also auch $k_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, und somit $K > 0$. □

Definition 1.12.6 *S heisst* **(strikt) konvex** *im Punkt $p \in S$, falls S ganz auf einer Seite von T_pS liegt (und $S \cap T_pS = \{p\}$).*

Satz 1.12.4 hat die folgende globale Aussage zur Folge:

Satz 1.12.5 *Sei S kompakte, zusammenhängende, reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Orientierung N, und sei $K(p) \neq 0$, $\forall p \in S$. Dann gilt:*

i) $N \colon S \to S^n$ ist bijektiv;

ii) S ist in allen Punkten strikt konvex.

Den Beweis kann man zum Beispiel mit Morse-Theorie erbringen. (Siehe Thorpe, Kapitel 13.)

Definition 1.12.7 *$p \in S$ heisst* **Nabelpunkt**, *falls $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$.*

Beispiel 1.12.3 *Die Ebene $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und jede Sphäre $S^n_r = \partial B_r(0)$ bestehen aus lauter Nabelpunkten.*

Satz 1.12.6 *(Nabelpunktsatz) Sei $n \geq 2$, und sei S zusammenhängende reguläre Hyperfläche, orientiert durch N, bestehend aus lauter Nabelpunkten. Dann ist S Teil einer Ebene oder einer Sphäre.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für $p \in S$

$$-dN(p)v = L_p v = k(p)v, \; \forall v \in T_pS, \tag{1.12.1}$$

wobei $k = k_1 \colon S \to \mathbb{R}$ stetig ist aufgrund der Charakterisierung von k_1 nach Satz 1.12.2.

Sei $p_0 = (x_0, y_0) \in S$, und sei $\Phi = \Phi(x) \colon U \to S$ lokale Parameterdarstellung von S um $p_0 = \Phi(x_0)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$. Mit (1.12.1) erhalten wir

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(N \circ \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}((k \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}) = \frac{\partial (k \circ \Phi)}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + (k \circ \Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.12.2)$$

für alle $1 \le i \le j \le n$, woraus insbesondere auch die Differenzierbarkeit von k ersichtlich wird. Mit der Symmetrie der 2. Ableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial (k \circ \Phi)}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial (k \circ \Phi)}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},\ 1 \le i \le j \le n.$$

Falls $n \ge 2$, können wir zu jedem i einen Index $j \ne i$ finden. Da die Vektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ linear unabhängig sind, folgt

$$\frac{\partial (k \circ \Phi)}{\partial x_i} = 0,\ 1 \le i \le n;$$

das heisst, k ist lokal konstant. Die Hyperfläche S ist jedoch zusammenhängend; also gilt $k \equiv k_0$ für ein $k_0 \in \mathbb{R}$, und $L_p = -dN(p) = k_0\, id$ auf S.

Falls $k_0 = 0$, so folgt $dN \equiv 0$, also $N \equiv N_0$, und S ist Teil einer Ebene.

Falls $k_0 \ne 0$, betrachte die Abbidung

$$Z(p) = p + k_0^{-1} N(p),\ p \in S.$$

Mit (1.12.1) folgt

$$d(Z \circ \Phi) = (id + k_0^{-1} dN \circ \Phi) d\Phi = 0;$$

also $Z \equiv Z_0$, $S \subset \partial B_r(Z_0)$, wobei $r = 1/|k_0|$. □

1.13 Parametrische n-Flächen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $m > n$, $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^m)$, mit Differential

$$d\Phi(x) \colon T_x U \cong \mathbb{R}^n \to T_{\Phi(x)} \mathbb{R}^m$$

im Punkt $x \in U$.

Definition 1.13.1 *Φ heisst* **Immersion**, *falls $d\Phi(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ maximalen Rang hat; das heisst, falls*

$$\mathrm{Rang}(d\Phi(x)) = n, \forall x \in U.$$

In diesem Fall definiert Φ eine **parametrische n-Fläche** *$S = \Phi(U)$ im $\mathbb{R}^m$. S heisst auch* **immersierte n-Fläche**.

Beispiel 1.13.1 *i) Sei $h \in C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist*

$$\Phi(x) = (x, h(x)) \in C^\infty(U; \mathbb{R}^{n+1})$$

reguläre Immersion, $S = \Phi(U) = \mathcal{G}(h)$ *reguläre parametrische* n*-Fläche in* $\mathbb{R}^{n+1}$.

ii) Sei $\alpha \in C^\infty(I;\mathbb{R}^m)$, $\dot\alpha(t) \neq 0$. *Dann ist* α *reguläre Immersion,* $C = \alpha(I)$ *reguläre parametrische* 1*-Fläche (immersierte Kurve) in* $\mathbb{R}^m$.

iii) Stereographische Koordinaten auf S^2. *Die Abbildung* $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$\Phi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}(2z, 1-|z|^2),\ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ist reguläre, injektive Immersion mit

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}.$$

iv) Sphärische Winkelkoordinaten auf S^2. *Die Abbildung* $\Phi\colon U = \mathbb{R}\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$, *mit*

$$\Phi(\phi,\theta) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, sin\theta)$$

ist reguläre Immersion mit

$$\Phi(U) = S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}.$$

Offenbar lassen sich gewisse Hyperflächen (zum Beispiel S^2*) nicht "global" parametrisieren.*

v) Drehflächen. Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ *mit* $\dot\alpha(t) \neq 0, y(t) > 0, t \in I$. *Dann ist die Abbildung* $\Phi\colon U = I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$\Phi(u,v) = (x(u), y(u)\cos v, y(u)\sin v)$$

eine Immersion.

vi) Parametrischer Torus. Sei insbesondere α *der Kreis*

$$\alpha(t) = (b\cos t, a + b\sin t), 0 < b < a.$$

Dann ist die von α *erzeugte Drehfläche*

$$\Phi(u,v) = (b\cos u, (a+b\sin u)\cos v, (a+b\sin u)\sin v) \in \mathbb{R}^3$$

ein Torus.

vii) Sei $\Phi\colon U =]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *gegeben durch*

$$\Phi(u,v) = \left(\left(1 + u\cos\frac{v}{2}\right)\cos v, \left(1+u\cos\frac{v}{2}\right)\sin v, u\sin\frac{v}{2}\right).$$

Dann ist Φ *eine reguläre, injektive Immersion, die durch* Φ *parametrisierte Fläche* $S = \Phi(U)$ *ein Möbiusband. Die Klasse der parametrischen* n*-Flächen umfasst also auch nicht orientierbare Hyperflächen.*

"Lokal" lassen sich immersierte Flächen stets als Niveauflächen schreiben. Den folgenden Satz beweist man in der Analysis II.

Satz 1.13.1 *(Immersionssatz). Sei* $\Phi \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$ *reguläre Immersion mit* $k \geq 1$, $m = n + l$, *wobei* $l \geq 1$, *und seien* $x_0 \in U$, $z_0 = \Phi(x_0)$. *OBdA gelte* $x_0 = 0, z_0 = 0, d\Phi(0) = (*, 0)$, *wobei* $*$ *eine invertierbare* $n\times n$*-Matrix ist. Dann* *gibt es eine Umgebung V von 0, sowie einen Diffeomorphismus $\Psi \in C^k(V,\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^k(V;\mathbb{R}^l)$ mit*

$$\Phi \circ \Psi(x) = (x, h(x)).$$

Das heisst, nach Parameterwechsel mit Ψ ist das durch Φ lokal parametrisierte Flächenstück $S_0 = \Phi(U_0)$, wobei $U_0 = \Psi(V)$, ein Graph; der Tangentialraum von S_0 ist an jeder Stelle $p = \Phi(\Psi(x)) = \Phi(y)$ gegeben durch

$$T_pS_0 = \{\zeta = (\xi, dh(x)\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n\} = d(\Phi \circ \Psi)(x)(\mathbb{R}^n) = \mathrm{im}\ d\Phi(y).$$

Bemerkung 1.13.1 *Φ muss nicht injektiv sein. Falls $p = \Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, so ist im allgemeinen*

$$\mathrm{im}\ d\Phi(x_1) \neq \mathrm{im}\ d\Phi(x_2).$$

Das heisst, die Fläche $S = \Phi(U)$ besitzt am Punkt $p \in S$ **keinen** *Tangentialraum, wohl aber die Flächenstücke $S_i = \Phi(U_i)$ mit geeigneten, genügend kleinen Umgebungen U_i von x_i, $i = 1, 2$. Die Darstellung von S nach Satz 1.13.1 ist lokal im Parameterraum U,* **nicht** *jedoch im umgebenden Raum $\mathbb{R}^m$.*

Definition 1.13.2 *Sei Φ reguläre Immersion und injektiv. Falls die Umkehrabbildung*

$$\Phi^{-1} \colon S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

(bezüglich der von $\mathbb{R}^m$ induzierten Relativtopologie) stetig ist, so heisst Φ eine **Einbettung***, S eine* **eingebettete n-Fläche** *in $\mathbb{R}^m$.*

Beispiel 1.13.2 *Sei $h \in C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist für jede relativ kompakte, offene Teilmenge $V \subset U$ die Abbildung*

$$\Phi(x) = (x, h(x)) \in C^\infty(V; \mathbb{R}^{n+1})$$

eine Einbettung.

Bemerkung 1.13.2 *i) Gemäss Satz 1.13.1 und Beispiel 1.13.2 ist eine immersierte Fläche Vereinigung von eingebetteten Flächenstücken $S = \cup_{x \in U} \Phi(U_x)$, wobei wir für jedes x eine Umgebung U_x wählen, so dass $\Phi|_{U_x}$ ein Graph über $d\Phi(x)(\mathbb{R}^n)$ ist. ii) Nicht jede injektive Immersion ist auch (global) eine Einbettung; vgl. dazu das folgende Beispiel.*

Beispiel 1.13.3 *i) Sei $\alpha \colon \mathbb{R} \ni t \mapsto (1+e^t)e^{it} \in \mathbb{C}$. Jeder Punkt $p = \alpha(t)$ besitzt eine Umgebung W, so dass $\alpha^{-1}(W) = U$ ein Intervall um t und $\alpha(U)$ ein Graph ist; somit ist α eine Einbettung.*

ii) Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wo man insbesondere alle einander gegenüberliegenden Punkte x und $x + (1, 0)$, bzw. x und $x + (0, 1)$ auf dem Rand des Einheitsquadrats $Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ identifiziert, ergibt ein "flaches" Modell für den Torus T, und man kann die Geradenabbildung $t \mapsto \alpha(t) = \omega t \in \mathbb{R}^2$ als eine Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R} \to T$ auffassen. Für eine irrationale Rotationszahl ω ist diese Abbildung injektiv, jedoch ist die Bildmenge

$$C = \{\alpha(t) \ mod\ \mathbb{Z}^2;\ t \in \mathbb{R}\}$$

dicht auf T. Insbesondere ist jeder Punkt der Kurve C auch Häufungspunkt von C, und α ist keine Einbettung.

Kann man reguläre, n-dimensionale Hyperflächen global parametrisieren? - Falls $n \geq 2$, so ist dies aus "topologischen" Gründen im allgemeinen nicht möglich, wie das Beispiel der Sphäre S^2 zeigt. Jedoch gilt für ein reguläre Kurven ($n = 1$) der folgende Satz.

Satz 1.13.2 *Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, und sei C zusammenhängend. Dann gilt es eine bis auf Anfangspunkt und Orientierung eindeutige Parametrisierung $\alpha \in C^\infty(I; \mathbb{R}^2)$ mit $|\dot{\alpha}(t)| = 1$, so dass $\alpha(I) = C$. Falls C kompakt, so ist C geschlossen, $I = \mathbb{R}$, und α ist periodisch mit der Periode $L = L(C)$, $\alpha \colon \mathbb{R}/\{0, L\} \to C$ eine Einbettung; andernfalls ist α injektiv, $\alpha \colon I \to C$ eine Einbettung.*

Beweis. Offenbar muss C zusammenhängend sein, damit man C global über einem Intervall parametrisieren kann.

Stelle C lokal dar als Graph über einem Intervall und führe in der so erhaltenen lokale Parameterdarstellung Bogenlängenparameter ein. Je zwei derartige Parametrisierungen α_1, α_2, deren Bilder sich überlappen, können wir allenfalls nach Ersetzen von α_2 durch $\tilde{\alpha}_2(t) = \alpha_2(t - t_0)$ oder $\tilde{\alpha}_2(t) = \alpha_2(t_0 - t)$ für ein geeignetes t_0 aneinanderhängen. Durch Inklusion der Bilder wird die Menge derartiger lokaler Darstellungen partiell geordnet, und jede total geordnete Teilmenge besitzt ein maximales Element. Mit dem Zornschen Lemma erhalten wir eine maximale Parameterdarstellung $\alpha \colon I \to C$ nach Bogenlänge, und $\alpha(I)$ ist relativ offen in C.

Behauptung 1: $\alpha(I) = C$.

Beweis. Sei widerspruchsweise $q \in C \setminus \alpha(I)$, $\beta \colon J \to C$ lokale Parameterdarstellung von C um q nach Bogenlänge, $W = W(q) = \beta(J)$. Wegen der Maximalität von α gilt $W \cap \alpha(I) = \emptyset$. Sei

$$U = \bigcup W(q); q \in C \setminus \alpha(I)$$

die Vereinigung aller derartigen Umgebungen. Dann ist U offen, $C = \alpha(I) \cup U$, und $C \cap \alpha(I) \neq \emptyset \neq C \cap U$, im Widerspruch zur Annahme, dass C zusammenhängend.

Behauptung 2: α ist entweder injektiv oder periodisch.

Beweis. Sei $\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = p$ für $t_0 < t_1 \in I$. Dann folgt $\alpha(t_0 + t) = \alpha(t_1 + t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t_0 + t$ **oder** $t_1 + t \in I$; insbesondere folgt $I = \mathbb{R}$, und $\alpha(t + (t_1 - t_0)) = \alpha(t)$.

Behauptung 3: α ist periodisch genau dann, wenn C kompakt ist.

Beweis. Falls α periodisch ist mit Periode L, so ist $C = \alpha([0, L])$ offenbar kompakt.

Sei umgekehrt C kompakt, $C \subset \cup_{k=1}^K W_k$, wobei $C \cap W_k = \alpha(I_k)$, $I_k \subset I$ offen, $k = 1, \ldots, K$. OBdA sei $|I_k| = L(\alpha(I_k)) < 1$.

Setze $J = \cup_{k=1}^K I_k$ mit $|J| < K < \infty$ und $\alpha(J) = \cup_{k=1}^K \alpha(I_k) = C$. Da $|\dot{\alpha}| = 1$, ist α stetig zu einer Abbildung $\alpha \colon \overline{J} \to \mathbb{R}^2$ fortsetzbar. Da weiter C kompakt, folgt $\alpha(\overline{J}) \subset C$, also auch $\overline{J} \subset I$, und somit $\alpha(\overline{J}) \subset C = \alpha(J)$.

Jedoch ist J beschränkt, also $J \neq \overline{J}$. Daher kann $\alpha|_{\overline{J}}$ nicht injektiv sein. $\square$

Mit Satz 1.13.2 erhalten wir die folgende Charakterisierung regulärer, zusammenhängender Kurven.

Korollar 1.13.1 *Zusammenhängende Kurven haben "topologisch" entweder die Struktur des Kreises S^1 oder der Geraden $\mathbb{R}$.*

1.14 Die Krümmung parametrischer n-Flächen

Wir beschränken uns nun wieder auf Hyperflächen, das heisst, auf parametrische n-Flächen $S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Kann man mittels Φ (lokal) eine Orientierung N auf S definieren und die Weingarten-Abbildung sowie die Hauptkrümmungen von S bestimmen?

Sei $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^{n+1})$ eine reguläre Immersion, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Allenfalls nach Einschränkung auf einen kleineren Definitionsbereich dürfen wir annehmen, dass $S = \Phi(U)$ eingebettet ist. Sei $x_0 \in U$, $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis für $T_{x_0}U \cong \mathbb{R}^n$, und setze

$$E_i = d\Phi(x_0)e_i, 1 \leq i \leq n.$$

Da $d\Phi(x_0)$ den Rang n hat, ist $E_1, \ldots, E_n$ eine Basis für T_pS, wobei $p = \Phi(x_0)$.

Wir orientieren S bezüglich Φ auf kanonische Weise, indem wir die Vektoren $E_1, \ldots, E_n$ zu einer positiv orientierten Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$ ergänzen.

Definition 1.14.1 *Der kanonische Normalenvektor an S in p bzgl. Φ ist der eindeutig bestimmte Einheitsvektor $N = N(p) \perp T_pS$mit*

$$\det(E_1, \ldots, E_n, N) > 0.$$

Beispiel 1.14.1 *i) Sei $n = 2$, $\Phi = \Phi(u, v)$. Dann ist der kanonische Normalenvektor gegeben durch*

$$N = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_n \times \Phi_v|},$$

wobei $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, etc. Die Weingartenabbildung $L(p)$ und die Hauptkrümmungen kann man nun bestimmen.

ii) Wir bestimmen die Hauptkrümmungen auf dem parametrischen Torus aus Beispiel 1.13.1.vi)) mit der Parametrisierung

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v),\ \ (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $0 < b < a$. Berechne

$$\begin{aligned} \Phi_u &= (a + b\cos v)(-\sin u, \cos u, 0) \\ \Phi_v &= b(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\Phi_u \times \Phi_v = (a + b\cos v)b(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v);$$

das heisst,

$$N(\Phi(u,v)) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

und wir erhalten

$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \Phi) = -L_p \Phi_u = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) = \frac{\cos v}{a + b\cos v}\Phi_u$$

sowie

$$N_v = \frac{\partial}{\partial v} N \circ \Phi = -L_p \Phi_v = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v) = \frac{1}{b}\Phi_v.$$

Also sind $\frac{\Phi_u}{|\Phi_u|}$ *und* $\frac{\Phi_v}{|\Phi_v|}$ *die Hauptkrümmungsrichtungen,*

$$k_1 = -\frac{\cos v}{a + b\cos v},\ k_2 = -\frac{1}{b}$$

die zugehörigen Hauptkrümmungen, und

$$K = \frac{\cos v}{b(a + b\cos v)}$$

die Gausskrümmung. Beachte, dass $K > 0$ *auf der Aussenseite des Torus und* $K < 0$ *auf der Innenseite.*

Allgemein sei $(a_i^j)_{1\le i,j\le n}$ definiert durch

$$L_p E_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}(N \circ \Phi)(x) = \sum_j a_i^j E_j, 1 \le i \le n.$$

Dann ist $(a_i^j)_{1\le i,j\le n}$ die Matrixdarstellung von L_p bezüglich der Basis $(E_i)_{1\le i\le n}$. Nun ist $(E_i)_{1\le i\le n}$ im allgemeinen keine Orthonormalbasis. Wie kann man aus der Matrix $(a_i^j)_{1\le i\le n}$ die Hauptkrümmungen bestimmen? - Satz 1.12.2 legt es nahe, die Fundamentalformen I_p und II_p zu betrachten mit Koeffizienten

$$g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},\ 1 \le i,j \le n,$$

bzw.

$$h_{ik} = \langle L_p E_i, E_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_j \langle a_i^j E_j, E_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_j a_i^j g_{jk} = h_{ki},\ 1 \le i,k \le n.$$

Sei weiter $g^{-1} = (g^{ij})_{1\le i,j\le n}$ die zu $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ inverse Matrix. Es folgt

$$a_i^l = \sum_k h_{ik} g^{kl}, \tag{1.14.1}$$

und wir erhalten die Darstellungen

$$H = \frac{1}{n} tr(a_i^j) = \frac{1}{n}\sum_i a_i^i = \frac{1}{n}\sum_{i,j} h_{ij} g^{ji}, \tag{1.14.2}$$

sowie

$$K = \det(a_i^j) = \det(h_{ij}) \cdot \det(g^{kl}) = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}. \tag{1.14.3}$$

der mittleren und der Gaussschen Krümmung.

Definition 1.14.2 *Die Matrix $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ist die Darstellung der* **Metrik** *auf S bezüglich Φ, kurz: der* **metrische Tensor***; die Matrix $h = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ist die kanonische Darstellung der 2. Fundamentalform bezüglich Φ.*

Bemerkung 1.14.1 *i) Für den Fall $n = 2$ findet man in vielen Büchern die "klassische" Notation $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, etc. Diese Notation werden wir* **nicht** *verwenden.*

ii) Sehr praktisch hingegen ist der Gebrauch der **Einsteinschen Summenkonvention***, gemäss derer über doppelt auftretende, einmal oben und einmal unten stehende Indices stillschweigend summiert wird. Die Gleichung* (1.14.2) *lässt sich damit vereinfacht in der Form $H = \frac{1}{n} h_{ik} g^{ki}$ schreiben, wobei*

$$h_{ik} g^{kl} := \sum_{1\le k\le n} h_{ik} g^{kl}, \text{ etc..}$$

iii) Eine weitere praktische Notation ist das **Heben und Senken von Indices** *mit der Metrik, bzw. der Inversen. So liefert z. B. der Ausdruck*

$$h_i^j := h_{ik} g^{kj}$$

gemäss (1.14.1) *eine handliche Notation für die Matrix-Darstellung a_i^j der Abbildung $L_p S$ bezüglich der Basis $(E_i)_{1\le i\le n}$. Konsequenterweise werden wir später auch $x = x^i e_i$ schreiben, sobald die Unterscheidung zwischen Vektoren, deren Komponenten oben indiziert werden, und Kovektoren mit tiefstehenden Indices relevant wird. Einstweilen benutzen wir jedoch weiter die vertraute Notation.*

Im folgenden benutzen wir zur Abkürzung die Notation

$$\Phi_{x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},\ \Phi_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j},\ 1 \le i,j \le n,$$

etc., so dass $E_i = \Phi_{x_i}$, $1 \le i \le n$, und

$$g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n} = d\Phi^t d\Phi = (\langle \Phi_{x_i}, \Phi_{x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}})_{1\le i,j\le n},$$

sowie

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle \frac{\partial (N\circ\Phi)}{\partial x_i}, \Phi_{x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle (N\circ\Phi), \Phi_{x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle (N\circ\Phi), \Phi_{x_i x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \langle N\circ\Phi, \Phi_{x_i x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},\ 1 \le i,j \le n. \end{aligned}$$

Beispiel 1.14.2 *i) Drehflächen. Sei $\alpha(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve mit $\psi(t) > 0$, parametrisiert nach Bogenlänge mit ${\varphi'}^2(t) + {\psi'}^2(t) = 1$, und sei*

$$\Phi(u,v) = (\varphi(u), \cos v\, \psi(u), \sin v\, \psi(u))$$

die Darstellung der von α erzeugten Drehfläche.

Es gilt

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) = (\varphi'(u), \cos v\, \psi'(u), \sin v\, \psi'(u)) \\ E_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) = (0, -\sin v\, \psi(u), \cos v\, \psi(u)), \end{aligned}$$

so dass

$$g_{11} = {\varphi'}^2 + {\psi'}^2 = 1,\ g_{12} = 0 = g_{21},\ g_{22} = \psi^2.$$

Weiter erhalten wir

$$N = \frac{E_1 \times E_2}{|E_1 \times E_2|} = (\psi'(u), -\cos v\, \varphi'(u), -\sin v\, \varphi'(u))$$

und somit

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\frac{\partial(N \circ \Phi)}{\partial u} \cdot E_1 = -(\psi''\varphi' - \varphi''\psi'), \\ h_{12} &= -\frac{\partial(N \circ \Phi)}{\partial u} \cdot E_2 = 0 = h_{21}, \\ h_{22} &= -\frac{\partial(N \circ \Phi)}{\partial v} \cdot E_2 = \varphi'\psi. \end{aligned}$$

Mit der Identität

$$2\varphi''\varphi' = ({\varphi'}^2)' = -({\psi'}^2)' = -2\psi''\psi'$$

folgt die Gleichung für die Gausssche Krümmung

$$\begin{aligned} K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} &= \frac{-\psi\varphi'(\psi''\varphi' - \varphi''\psi')}{\psi^2} = \frac{-\psi''{\varphi'}^2 + \varphi''\varphi'\psi'}{\psi} \\ &= -\frac{\psi''}{\psi}({\varphi'}^2 + {\psi'}^2) = -\frac{\psi''}{\psi} \end{aligned}$$

sowie, mit

$$g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi^{-2} \end{pmatrix},$$

die Gleichung für die mittlere Krümmung

$$H = \frac{1}{2} h_{ij} g^{ji} = \frac{1}{2}(h_{11} + \psi^{-2} h_{22}) = -\frac{1}{2} \frac{(\psi''\varphi' - \varphi''\psi')\psi - \varphi'}{\psi}\ .$$

ii) Graphen. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(U)$,

$$S = \mathcal{G}(f) = \{(u, v, f(u,v)); (u,v) \in U\}$$

mit Parameterdarstellung

$$\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

Es gilt

$$E_1 = \Phi_u(u,v) = (1,0,f_u),$$
$$E_2 = \Phi_v(u,v) = (0,1,f_v),$$

damit

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix},$$

und weiter

$$N = \frac{E_1 \times E_2}{|E_1 \times E_2|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} = \frac{(-f_u,-f_v,1)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

also auch

$$h = (h_{ij}) = \left(N \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}.$$

Setze zur Abkürzung

$$W = \sqrt{1+|\nabla f|^2}.$$

Mit

$$\det g = (1+f_u^2)(1+f_v^2) - f_u^2 f_v^2 = W^2,$$

bzw.

$$\det h = (f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2)/W^2;$$

folgt aus (1.14.3) *die Darstellung*

$$K = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{W^4} = \frac{\det(Hess(f))}{(1+|\nabla f|^2)^2},$$

eine Gleichung vom Typ der **Monge-Ampère-Gleichung**.
Weiter gilt

$$g^{-1} = (g^{ij}) = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1+f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1+f_u^2 \end{pmatrix};$$

also erhalten wir für die mittlere Krümmung die Gleichung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} h_{ij} g^{ji} = \frac{1}{2W^3}(f_{uu}(1+f_v^2) - 2 f_{uv} f_u f_v + f_{vv}(1+f_v^2)) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right). \end{aligned}$$

iii) Für n-Graphen in $\mathbb{R}^{n+1}$ *können wir* K *und* H *analog berechnen. Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(U)$, *und sei* S *der Graph*

$$S = \mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)); x = (x_1, \ldots, x_n) \in U\}$$

mit Parameterdarstellung

$$\Phi(x) = (x, f(x)),\ x \in U.$$

Es gilt

$$E_i = \Phi_{x_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, f_{x_i}),\ 1 \le i \le n,$$

und somit

$$g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (\delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Weiter folgt

$$N = \frac{(-f_{x_1}, -f_{x_2}, \ldots, -f_{x_n}, 1)}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2}} = \frac{(-\nabla f, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}},$$

und wir erhalten

$$h = (h_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (N \cdot \Phi_{x_i x_j})_{1 \le i,j \le n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (f_{x_i x_j})_{1 \le i,j \le n}.$$

Die Bestimmung von K und H gemäss (1.14.2) *und* (1.14.3) *scheint zunächst recht aufwendig. Man kann die Rechnung jedoch durch Ausnutzen von Symmetrien stark vereinfachen. Es sei zunächst $x_0 \in U$ ein Punkt mit*

$$df(x_0) = (f_{x_1}, 0, \ldots, 0).$$

Mit der Notation $1_n = \mathrm{diag}(1, ..., 1)$ folgt

$$g = \begin{pmatrix} 1 + |\nabla f|^2 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix},$$

also erhalten wir die Gleichungen

$$K = \frac{\det(Hess(f))}{(1 + |\nabla f|^2)^{1 + \frac{n}{2}}} \tag{1.14.4}$$

sowie

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{div}_y \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right), \tag{1.14.5}$$

wie im Fall $n = 2$. Der allgemeinen Fall folgt nun aus der Invarianz dieser Ausdrücke unter Translationen und Drehungen im Parameterbereich. Seien dazu $x_0 \in U$, $R \in SO(n)$. Ersetze Φ durch die Parametrisierung

$$\tilde{\Phi}(y) = \Phi(x_0 + Ry),\ y \in \tilde{U} = \{y; x_0 + Ry \in U\},$$

mit Metrik

$$\tilde{g} = d\tilde{\Phi}^t d\tilde{\Phi} = R^t (d\Phi^t d\Phi) R = R^t g R$$

und 2. Fundamentalform

$$\tilde{h} = \left(N \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{1 \le i,j \le n} = R^t h R.$$

Es folgt

$$\det \tilde{g} = \det g \cdot \det R^t \cdot \det R = \det g$$

und analog

$$\det \tilde{h} = \det h,$$

also auch

$$\tilde{K} = \frac{\det \tilde{h}}{\det \tilde{g}} = \frac{\det h}{\det g} = K.$$

Wegen Invarianz der Spur eines Produktes von Matrizen unter zyklischer Vertauschung erhalten wir die Gleichung

$$\tilde{H} = \frac{1}{n} tr(\tilde{h}\tilde{g}^{-1}) = \frac{1}{n} tr(R^t h g^{-1} R) = \frac{1}{n} tr(h g^{-1}) = H.$$

Schliesslich gilt auch $|\nabla \tilde{f}| = |\nabla f|$, $Hess(\tilde{f}) = R^t Hess(f) R$ *und daher*

$$\mathrm{div}_y(\nabla \tilde{f}) = tr(Hess(\tilde{f})) = tr(Hess(f)) = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Indem wir zu vorgegebenem $x_0 \in U$ *ein* $R \in SO(n)$ *so wählen, dass für* $\tilde{f}(y) = f(x_0 + Ry)$ *gilt*

$$d\tilde{f}(0) = df(x_0)R = (\tilde{f}_{y_1}, 0, \ldots, 0),$$

erkennen wir die allgemeine Gültigkeit der Darstellungen (1.14.4), *bzw.* (1.14.5) *für* K *und* H.

1.15 Bernstein-Theorem

Einer der berühmtesten Sätze der klassischen geometrischen Analysis ist das folgende Theorem von S. Bernstein.

Satz 1.15.1 *(Bernstein, 1916) Sei* $S = \mathcal{G}(f)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *ein Graph über der Ebene (ein "vollständiger Graph") mit mittlerer Krümmung*

$$H = \frac{1}{2} \mathrm{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0. \tag{1.15.1}$$

Dann ist f *eine affin lineare Funktion,* S *eine Ebene.*

Der Beweis benutzt entscheidend die Voraussetzung, dass der Grundraum 2-dimensional ist; vergleiche jedoch die Bemerkung am Schluss des Abschnitts bezüglich der Verallgemeinerung von Satz 1.15.1 auf höhere Dimensionen.

Beachte, dass (1.15.1) nach Ausdifferenzieren äquivalent ist zur Gleichung

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2 f_{uv} f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0. \tag{1.15.2}$$

Lemma 1.15.1 *Es existiert $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit*

$$\begin{aligned} F_{uu} &= \frac{1+f_u^2}{W},\ F_{uv} = \frac{f_u f_v}{W} \\ F_{vv} &= \frac{1+f_v^2}{W},\ F_{vu} = \frac{f_u f_v}{W}, \end{aligned} \tag{1.15.3}$$

wobei $W = \sqrt{1+|\nabla f|^2}$.

Beweis. Aus (1.15.1), bzw. (1.15.2) erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_u f_v}{W}\right)_u - \left(\frac{1+f_u^2}{W}\right)_v &= \frac{(f_{uu}f_v + f_u f_{uv} - 2f_u f_{uv})(1+f_u^2+f_v^2)}{W^3} \\ &\quad - \frac{f_u f_v(f_u f_{uu} + f_v f_{uv})}{W^3} + \frac{(1+f_u^2)(f_u f_{uv} + f_v f_{vv})}{W^3} \\ &= \frac{f_v}{W^3}(f_{uu}(1+f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1+f_u^2)) = 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$g_u = \frac{1+f_u^2}{W},\ g_v = \frac{f_u f_v}{W}. \tag{1.15.4}$$

Analog existiert $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$h_u = \frac{f_u f_v}{W},\ h_v = \frac{1+f_v^2}{W}. \tag{1.15.5}$$

Da mit (1.15.4), (1.15.5) offenbar auch gilt $h_u - g_v = 0$, existiert $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$F_u = g,\ F_v = h,$$

und (1.15.4), (1.15.5) sind äquivalent zu (1.15.3). □

Die Funktion F aus Lemma 1.15.1 erfüllt offenbar die Gleichung

$$F_{uu}F_{vv} - (F_{uv})^2 = \frac{1+f_u^2+f_v^2}{W^2} = 1. \tag{1.15.6}$$

Lemma 1.15.2 *Falls $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Gleichung* (1.15.6) *löst, so ist F ein Polynom höchsten 2. Grades.*

Beweis (nach J.CC. Nitsche, Annals of Math. 66 (1957), 543–544). Gleichung (1.15.6) ist äquivalent zu der Bedingung

$$\det(Hess(F)) = 1;$$

die Funktion F ist also entweder konkav oder konvex. Im folgenden führen wir den Beweis im Falle, dass F konvex ist;

Behauptung 1: Die Abbildung

$$\Phi\colon w = (u,v) \mapsto z = (x,y) = w + \nabla F(w)$$

ist ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf sich.

Beweis: Schätze ab

$$\begin{aligned}\langle \Phi(w) - \Phi(w'), w - w' \rangle &= |w - w'|^2 + \langle \nabla F(w) - \nabla F(w'), w - w' \rangle \\ &= |w - w'|^2 + \int_0^1 \langle w - w', \nabla dF(w' + \vartheta(w - w'))(w - w') \rangle \, d\vartheta \\ &\geq |w - w'|^2;\end{aligned}$$

also ist Φ **expandierend** im Sinne, dass gilt

$$|\Phi(w) - \Phi(w')| \geq |w - w'|. \tag{1.15.7}$$

Insbesondere ist Φ injektiv und $\Phi^{-1}\colon U \to \mathbb{R}^2$ stetig, wobei $U := \Phi(\mathbb{R}^2)$. Letzteres sieht man schnell ein mit dem Folgenkriterium, welches auch die Abgeschlossenheit von U liefert. Sei dazu (z_k) eine Cauchy-Folge in U mit $z_k = \Phi(w_k) \to z$ $(k \to \infty)$. Mit (1.15.7) folgt dann Konvergenz $|w_k - w_l| \leq |z_k - z_l| \to 0$ $(k, l \to \infty)$, also $w_k \to w$, und die Stetigkeit von Φ ergibt $\Phi(w) = z \in U$. Da Φ offenbar auch ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist U zudem offen, also $U = \mathbb{R}^2$. $\square$

Identifiziere $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u + iv \in \mathbb{C}$, etc. Betrachte die Abbildung $\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\Psi(w) = u - F_u(w) - i(v - F_v(w))$$

und setze $\zeta = \Psi \circ \Phi^{-1}$.

In reeller Notation erhalten wir

$$d\Phi(w) = \begin{pmatrix} 1 + F_{uu} & F_{uv} \\ F_{uv} & 1 + F_{vv} \end{pmatrix},$$

also

$$(d\Phi(w))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + F_{vv} & -F_{uv} \\ -F_{uv} & 1 + F_{uu} \end{pmatrix} \Big/ D,$$

wobei (1.15.6) für D den Ausdruck liefert

$$D = \det(d\Phi(w)) = (1 + F_{uu})(1 + F_{vv}) - F_{uv}^2 = 2 + F_{uu} + F_{vv}.$$

Weiter gilt

$$d\Psi(w) = \begin{pmatrix} 1 - F_{uu} & -F_{uv} \\ +F_{uv} & -1 + F_{vv} \end{pmatrix},$$

also, wiederum unter Benutzung von (1.15.6),

$$d\zeta(z) = d\Psi(w)(d\Phi(w))^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_{vv} - F_{uu} & -2F_{uv} \\ 2F_{uv} & F_{vv} - F_{uu} \end{pmatrix}, w = \Phi^{-1}(z).$$

Beachte, $d\zeta$ ist $\mathbb{C}$-linear mit

$$d\zeta(z) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{D}((F_{vv} - F_{uu}) + 2iF_{uv})(a + ib);$$

die Abbildung $z \mapsto \zeta(z)$ ist also holomorph.

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
|d\zeta(z)|^2 &= \frac{1}{D^2}|F_{vv} - F_{uu} + 2iF_{uv}|^2 \\
&= \frac{(F_{uu}+F_{vv})^2 - 4F_{uu}F_{vv} + 4F_{uv}^2}{D^2} = \frac{(F_{uu}+F_{vv})^2 - 4}{(2+F_{uu}+F_{vv})^2} < 1.
\end{aligned}
\tag{1.15.8}
$$

Nach dem Satz von Liouville ist $d\zeta$ also konstant. Die Aussage des Lemmas folgt nun aus der

Behauptung 2: $F_{uuu} = F_{uuv} = F_{uvv} = F_{vvv} = 0$.

Beweis: Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten mit

$$
\frac{F_{vv} - F_{uu}}{2 + F_{uu} + F_{vv}} = c_1, \ \frac{F_{uv}}{2 + F_{uu} + F_{vv}} = c_2, \tag{1.15.9}
$$

wobei mit (1.15.8) folgt

$$
c_1^2 + 4c_2^2 = |d\zeta(z)|^2 < 1. \tag{1.15.10}
$$

Auflösen von (1.15.9) ergibt

$$
(1 - c_1)F_{vv} - (1 + c_1)F_{uu} = 2c_1, \ F_{uv} = c_2(2 + F_{uu} + F_{vv}),
$$

und nach Differenzieren folgt

$$
(1 - c_1)F_{uvv} = (1 + c_1)F_{uuu}, \ (1 - c_1)F_{vvv} = (1 + c_1)F_{uuv}, \tag{1.15.11}
$$

bzw.

$$
F_{uuv} = c_2(F_{uuu} + F_{uvv}), \ F_{uvv} = c_2(F_{uuv} + F_{vvv}). \tag{1.15.12}
$$

Setzen wir (1.15.11) in Gleichung (1.15.12) ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2c_2}{1+c_1} \\ -\frac{2c_2}{1-c_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{uuv} \\ F_{uvv} \end{pmatrix} = 0
$$

für F_{uuv} und F_{uvv}, welches wegen (1.15.10) als Lösung nur $F_{uuv} = F_{uvv} = 0$ zulässt. Der noch fehlende Teil der Behauptung folgt nun aus (1.15.11). □

Der Fall einer konkaven Funktion F lässt sich vollkommen analog mit Hilfe der Abbildung

$$
\tilde{\Phi}\colon w = (u, v) \mapsto z = (x, y) = w - \nabla F(w)
$$

behandeln. □

Beweis von Satz 1.15.1. Gemäss Lemma 1.15.1 und 1.15.2 gibt es Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$
\frac{1 + f_u^2}{W} = c_1, \frac{f_u f_v}{W} = c_2, \frac{1 + f_v^2}{W} = c_3.
$$

Insbesondere folgt die quadratische Gleichung

$$
1 + W^2 = (1 + f_u^2) + (1 + f_v^2) = (c_1 + c_3)W
$$

für W; da $W \in C^\infty$, folgt $W \equiv \text{const.}$ und damit $f_u \equiv \text{const.}$, $f_v \equiv \text{const.}$ □

Bemerkung 1.15.1 *Der Bernsteinische Satz bleibt richtig für Dimensionen $n \leq 7$; das heisst, es gilt*

Satz 1.15.2 *(De Giorgi ($n = 3$), Almgren ($n = 4$), Simons ($n = 5, 6, 7$)). Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Gleichung*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{1.15.13}$$

und sei $n \leq 7$. Dann ist f affin linear.

Für $n \geq 8$ ist Satz 1.15.2 nicht mehr richtig; siehe Bombieri-De Giorgi-Giusti, Inv. Math. 7 (1969), 243–269. Dies hat interessante Konsequenzen für die Regularitätstheorie "schwacher" Lösungen der "Minimalflächengleichung" (1.15.1)*; vergleiche zum Beispiel J.C.C. Nitsche: Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, Grundlehren 199, Abschnitt 130, S.117-119.*

1.16 Der Satz von Alexandrov-Hopf

Ein weiteres berühmtes Ergebnis der klassischen Differentialgeometrie ist die Charakterisierung kompakter Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung.

Satz 1.16.1 *(H. Hopf (1950/51), Alexandrov (1956–59)). Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zusammenhängende, kompakte, reguläre Hyperfläche (mit Orientierung N), und sei $H \equiv const$. Dann ist S eine Sphäre.*

Bemerkung 1.16.1 *Überraschenderweise ist Satz 1.16.1 falsch für immersierte Flächen. H. Wente (Pac. J. Math. 121 (1986)) hat eine Fläche vom Typ des Torus gefunden mit konstanter mittlerer Krümmung (Wente-Torus).*

Der Beweis von Satz 1.16.1 beruht auf dem dem **Maximumprinzip** für elliptische partielle Differentialgleichungen. Leider können wir dieses analytischen Hilfsmittel hier nur zitieren. Eine gut lesbare Einführung in den Themenkreis der partiellen Differentialgleichungen findet man zum Beispiel in Gilbarg-Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Grundlehren 224.

Weiter verwenden wir das **Alexandrov-Spiegelungsprinzip**. Zu vorgegebenem $\xi \in S^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei dazu $H_{\lambda,\xi}$ die Hyperebene

$$H_{\lambda,\xi} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x \cdot \xi = \lambda\}.$$

Für $\lambda < \max_{x \in S} \xi \cdot x = \lambda_0$ nahe bei λ_0 zerlegt $H_{\lambda,\xi}$ die Hyperfläche S in zwei (nicht notwendig zusammenhängende) Teile, von denen einer als Graph

$$S_\lambda = \mathcal{G}(f)$$

über einem Teil von $H_{\lambda,\xi}$ dargestellt werden kann.

Nach Spiegelung der Fläche S_λ an $H_{\lambda,\xi}$ erhalten wir die Fläche

$$\tilde{S}_\lambda = \mathcal{G}(-f).$$

Diese hat bezüglich der gespiegelten Normalen $\tilde{N}$ dieselbe konstante mittlere Krümmung $\tilde{H} = H$ wie S.

Lemma 1.16.1 *Für alle $\xi \in S^n$ gibt es genau ein $\lambda = \lambda(\xi)$, so dass S symmetrisch ist bezüglich Spiegelung an $H_{\lambda(\xi),\xi}$.*

Beweis. i) Verkleinere λ solange, bis für $\lambda = \lambda_1$ die gespiegelte Fläche $\tilde{S}_{\lambda_1}$ die ursprüngliche Fläche S in einem Punkt p berührt. Dieser "erste" Berührpunkt kann entweder im Innern oder auf dem Rand von $\tilde{S}_{\lambda_1}$ liegen.

In einer Umgebung W eines inneren Berührpunktes p kann man S und $\tilde{S}_{\lambda_1}$ als Graphen $S \cap W = \mathcal{G}(h)$, $\tilde{S}_{\lambda_1} \cap W = \mathcal{G}(\tilde{h})$ über einem Teil des gemeinsamen Tangentialraums $T_pS = T_p\tilde{S}$ schreiben, wobei $h \geq \tilde{h}, h(p) = \tilde{h}(p)$; für einen Berührpunkt am Rande erhalten wir eine analoge Darstellung über einem in T_p enthaltenen Halbraum.

Zudem stimmen die Normalen $N(p)$ und $\tilde{N}(p)$ überein. Um dies einzusehen, dürfen wir annehmen, dass N nach "Aussen", das heisst, in die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S$ zeigt, also weg von der für $\lambda > \lambda_1$ im "Innern" von S liegenden Fläche $\tilde{S}_\lambda$. Für $\lambda \downarrow \lambda_1$ bewegen sich die Flächen $\tilde{S}_\lambda$ in der Nähe von p daher einerseits annäherungsweise in Richtung $N(p)$, andererseits aber nach Konstruktion auch in Richtung $\tilde{N}(p)$. Ein Berührpunkt am Rande kann zudem nur auf der Spiegelungsebene $H_{\lambda,\xi}$ liegen, und in diesem Fall muss zusätzlich gelten $N(p) \cdot \xi = 0$.

Allenfalls nach einer Drehung des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $N(p) = \tilde{N}(p) = e_{n+1}$. Gemäss Beispiel 1.14.2 erfüllen dann h und $\tilde{h}$ die Gleichung (1.14.5) auf einer genügend kleinen Kugel oder Halbkugel

$$B = B_R(0), \text{ bzw. } B_- = \{x \in B_R(0); x \cdot \xi < 0\} \subset T_pS. \tag{1.16.1}$$

Schreibe Gleichung (1.14.5) in der Form

$$\begin{aligned} nH &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{f_{x_i}f_{x_j}}{1+|\nabla f|^2}\right) f_{x_ix_j} \\ &= A_{ij}(\nabla f) f_{x_ix_j}, \end{aligned}$$

wobei

$$A_{ij}(p)\xi^i\xi^j = \frac{|\xi|^2 - \frac{|p\cdot\xi|^2}{1+|p|^2}}{\sqrt{1+|p|^2}} \geq \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|p|^2}^3} \tag{1.16.2}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$. Die glatte Funktion $g = h - \tilde{h}$ genügt dann der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1+|\nabla h|^2}}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \tilde{h}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{h}|^2}}\right) \\ &= A_{ij}(\nabla h) g_{x_ix_j} + (A_{ij}(\nabla h) - A_{ij}(\nabla \tilde{h}))\tilde{h}_{x_ix_j} \\ &=: a_{ij}(x) g_{x_ix_j} + a_i(x) g_{x_i} \text{ in } B, \text{ bzw. in } B_- \end{aligned} \tag{1.16.3}$$

mit glatten Koeffizientenfunktionen

$$a_{ij}(x) := A_{ij}(\nabla h(x)),\ 1 \leq i,j \leq n,$$

und

$$a_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_k} A_{ij}(\nabla \tilde{h}(x) + \vartheta(\nabla h(x) - \nabla \tilde{h}(x)))\tilde{h}_{x_i x_j}(x)\, d\vartheta,\ 1 \le k \le n.$$

Gemäss (1.16.2) ist die Gleichung (1.16.3) **gleichmässig elliptisch**. Weiter gelten die Bedingungen

$$g(x) \ge 0 = g(0), \tag{1.16.4}$$

und insbesondere

$$\nabla g(0) = 0. \tag{1.16.5}$$

Das **Hopfschen Randpunktlemma** und das **starke Maximumprinzip**, die wir nachfolgend als Satz 1.16.2, bzw. Satz 1.16.3 zitieren, liefern sodann die Identität $h \equiv \tilde{h}$; die gespiegelte Fläche und die ursprüngliche Fläche stimmen also in einer relativ offenen Menge von Punkten überein. Andererseits ist diese Menge aus Stetigkeitsgründen auch abgeschlossen. Da S nach Voraussetzung zusammenhängend ist, erhalten wir die behauptete Spiegelsymmetrie von S.

ii) Offenbar ist $\lambda = \lambda(\xi)$ eindeutig bestimmt. Wäre nämlich S symmetrisch sowohl bezüglich Spiegelung an $H_{\lambda_1,\xi}$ als auch bezüglich Spiegelung an $H_{\lambda_2,\xi}$ für $\lambda_2 > \lambda_1$, so wäre S periodisch mit Periode $2(\lambda_2 - \lambda_1)$. Die Fläche S ist jedoch nach Annahme kompakt. $\square$

Satz 1.16.2 *(Hopf-Randpunktlemma; vgl. Gilbarg-Trudinger, Lemma 3.4, S. 34): Es sei $g \in C^\infty(\overline{B_-})$ Lösung der gleichmässig elliptischen Gleichung* (1.16.3), *wobei B_- die in* (1.16.1) *definierte Halbkugel ist, und sei die Voraussetzung* (1.16.4) *erfüllt. Dann gilt $\xi \cdot \nabla g(0) < 0$, oder $g \equiv 0$.*

Satz 1.16.3 *(Starkes Maximumprinzip; vgl. Gilbarg-Trudinger, Theorem 3.5, S. 35)): Sei $g \in C^\infty(B)$ Lösung der gleichmässig elliptischen Differentialgleichung* (1.16.3)*. Falls g im Innern von B ein lokales Maximum annimmt, so ist $g \equiv const.$*

Beweis von Satz 1.16.1. Allenfalls nach Verschiebung des Koordinatenursprungs können wir annehmen, dass

$$\lambda(e_i) = 0,\ 1 \le i \le n+1.$$

Betrachte sonst $\tilde{x}_i = x_i - \lambda(e_i)$.

Behauptung 1: $\lambda(\xi) = 0$ für alle ξ.

Beweis. Die Spiegelebene $H_{\lambda(\xi),\xi}$ ist auch Spiegelebene für die an den Hyperebenen $H_i = H_{0,e_i}$ gespiegelte Hyperfläche $\tilde{S}_i = S$. Also ist auch die an H_i gespiegelte Hyperebene $H_{\lambda(\xi),\xi}$ Symmetrieebene von S.

Durch sukzessive Spiegelung von $H_{\lambda(\xi),\xi}$ an allen H_i geht $H_{\lambda,\xi}$ über in $H_{\lambda,-\xi} = H_{-\lambda,\xi}$; also ist S symmetrisch zu $H_{-\lambda(\xi),\xi}$. Eindeutigkeit von $\lambda = \lambda(\xi)$ liefert $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi)$; das heisst, $\lambda(\xi) = 0$. $\square$

Behauptung 2: Sei $0 \ne x \in S$. Dann gilt $Rx \in S$ für alle $R \in SO(n+1)$; das heisst, $\partial B_r(0) \subset S$ für $r = |x| > 0$.

Beweis. Die Drehung des Punktes x in den Punkt $y = Rx$ kann auch durch Spiegelung von x an der Hyperebene $H_{0,\xi}$ dargestellt werden, wobei $\xi = \frac{y-x}{|y-x|}$.

□

Da S regulär und nach Annahme zusammenhängend ist, folgt mit Behauptung 2, dass $S = \partial B_r(0)$ für ein geeignetes $r > 0$. □

1.17 Weierstrass-Darstellung von Minimalflächen

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$ reguläre Immersion. OBdA sei $S = \Phi(U)$ eingebettet.

Definition 1.17.1 *Die Parametrisierung* Φ *heisst* **konform**, *falls*

$$g = d\Phi^t d\Phi = \lambda \cdot id$$

mit $0 < \lambda = \lambda(u,v) \in C^\infty(U)$; *das heisst, falls gilt*

$$g_{11} = |\Phi_u|^2 = |\Phi_v|^2 = g_{22} = \lambda, \tag{1.17.1}$$

$$g_{12} = g_{21} = \Phi_u \cdot \Phi_v = 0. \tag{1.17.2}$$

In diesem Fall heissen $(u,v) = w$ **isotherme** *Koordinaten auf* S.

Bemerkung 1.17.1 Φ *ist konform genau dann, wenn* $d\Phi$ *winkeltreu ist.*

Beweis. Φ ist konform genau dann, wenn für alle $V, W \in T_w\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ gilt

$$d\Phi(w)V \cdot d\Phi(w)W = V^t g W = \lambda V \cdot W,$$

also genau dann, wenn gilt

$$\frac{V \cdot W}{|V||W|} = \frac{d\Phi(w)V \cdot d\Phi(w)W}{|d\Phi(w)V||d\Phi(w)(W)|}.$$

□

Die folgende Darstellung der mittleren Krümmung in konformen Parametern ist sehr nützlich.

Satz 1.17.1 *Bezüglich isothermer Parameter* $w = (u,v)$ *gilt*

$$\Delta\Phi = \Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 2H\Phi_u \times \Phi_v.$$

Beweis. Sei $p = \Phi(w)$ beliebig. Aus (1.17.1) und (1.17.2) folgt

$$\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle = \frac{1}{2}|\Phi_u|_u^2 = \frac{1}{2}|\Phi_v|_u^2 = \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle = \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle_v - \langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle = -\langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle,$$

also

$$\langle \Delta\Phi, \Phi_u \rangle = \langle \Phi_{uu} + \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle = 0.$$

Analog erhalten wir

$$\langle \Delta\Phi, \Phi_v \rangle = 0;$$

das heisst,

$$\Delta\Phi \perp T_pS = \text{span}\{\Phi_u, \Phi_v\}.$$

Somit ist $\Delta\Phi$ proportional zu $N(p) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$. Es folgt

$$\Delta\Phi = a\Phi_u \times \Phi_v,$$

wobei

$$a = \langle \Delta\Phi, \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|^2} \rangle = \frac{\langle \Delta\Phi, N \rangle}{|\Phi_u \times \Phi_v|} = \frac{tr\, h}{\lambda} = tr(hg^{-1}) = 2H.$$

□

Beispiel 1.17.1 *i) Das Katenoid (Kettenfläche) hat die Darstellung*

$$\Phi(u, v) = (u, -\sin v \cosh u, \cos v \cosh u), \;\; u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Mit

$$\Phi_u(u, v) = (1, -\sin v \sinh u, \cos v \sinh u)$$
$$\Phi_v(u, v) = (0, -\cos v \cosh u, -\sin v \cosh u)$$

erhalten wir

$$|\Phi_u|^2 = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u = |\Phi_v|^2, \; \Phi_u \cdot \Phi_v = 0.$$

Weiter gilt

$$\Delta\Phi = (0, 0, 0);$$

also $H \equiv 0$ gemäss Satz 1.17.1.

ii) Das Helikoid (Wendelfläche) mit Darstellung

$$\Phi(u, v) = (v, \cos v \sinh u, \sin v \sinh u), \;\; u, v \in \mathbb{R}^2,$$

erfüllt ebenfalls die Gleichungen

$$|\Phi_u|^2 = \cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u = |\Phi_v|^2, \; \Phi_u \cdot \Phi_v = 0$$

sowie

$$\Delta\Phi = 0,$$

besitzt also ebenfalls mittlere Krümmung $H = 0$.

Definition 1.17.2 *Eine immersierte Fläche $S = \Phi(U)$ mit verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ heisst* **Minimalfläche**.

Mit Hilfe der komplexen Analysis kann man Integralformeln zur Darstellung von Minimalflächen gewinnen, die **Weierstrass-Darstellung**.

Sei dazu $w = (u, v) \cong u+iv \in U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = \Phi+i\Psi \colon U \to \mathbb{C}^3$ analytisch. Mit den komplexen Differentialen

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$
$$\partial = \frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

können wir den Laplace-Operator in der Form

$$\Delta = 4\partial\overline{\partial} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \tag{1.17.3}$$

darstellen.

Analytizität von Z ist äquivalent zur Cauchy-Riemann Gleichung

$$\overline{\partial}Z = \frac{1}{2}((\Phi_u - \Psi_v) + i(\Phi_v + \Psi_u)) = 0 \tag{1.17.4}$$

Mit (1.17.3) folgt

$$\Delta Z = \Delta\Phi + i\Delta\Psi = 4\partial\overline{\partial}Z = 0.$$

Weiter erhalten wir aus (1.17.3) die Gleichung

$$\begin{aligned}(\partial Z)^2 = \partial Z \cdot \partial Z := \sum_1^3 (\partial Z^i)^2 &= \frac{1}{4}((\Phi_u + \Psi_v) + i(\Psi_u - \Phi_v))^2 \\ = (\Phi_u - i\Phi_v)^2 = (\Psi_v + i\Psi_u)^2 &= (|\Phi_u|^2 - |\Phi_v|^2) - 2i\Phi_u \cdot \Phi_v,\end{aligned} \tag{1.17.5}$$

und analog für Ψ, wobei wir komponentenweise komplexe Multiplikation verwenden.

Satz 1.17.2 *Sei $Z = \Phi + i\Psi : U \to \mathbb{C}^3$ analytisch auf $U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit $\partial Z(w) \neq 0$ für alle $w \in U$, und sei $\partial Z \cdot \partial Z = 0$. Dann sind $\Phi = Re(Z)$ und $\Psi = Im(Z)$ isotherme Darstellungen von isometrischen Minimalflächen (mit $g^\Phi = g^\Psi$).*

Beispiel 1.17.2 *Betrachte die analytische Funktion*

$$Z(w) = (w, \sin(iw), \cos(iw)), \; w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Mit

$$\partial Z(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) Z(w) = (1, i\cos(iw), -i\sin(iw))$$

erhalten wir

$$\partial Z \cdot \partial Z = 1 - \cos^2(iw) - \sin^2(iw) = 0.$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\begin{aligned}\sin(iw) &= \sin(iu - v) = \cos(v)\sin(iu) - \sin(v)\cos(iu) \\ &= i\cos(v)\sinh(u) - \sin(v)\cosh(u) \\ \cos(iw) &= \cos(iu - v) = \cos(v)\cos(iu) + \sin v \sin(iu) \\ &= \cos(v)\cosh(u) + i\sin v \sinh u\end{aligned}$$

können wir Z zerlegen

$$Z = \Phi + i\Psi,$$

wobei

$$\Phi(u, v) = (u, -\sin(v)\cosh(u), \cos(v)\cosh(u))$$

das Katenoid aus Beispiel 1.17.1.i) darstellt und

$$\Psi(u,v) = (v, \cos(v)\sinh(u), \sin(v)\sinh(u))$$

das Helikoid aus Beispiel 1.17.1.ii).

Diese Flächen lassen sich daher durch Drehung

$$Z \mapsto Z_\alpha(w) = e^{i\alpha} Z(w),\ \alpha \in \mathbb{R},$$

isometrisch ineinander überführen, wobei

$$\Phi = Re(Z_0)$$

die Darstellung des Katenoids ergibt und

$$\Psi = Re(Z_{-\frac{\pi}{2}})$$

diejenige des Helikoids.

Satz 1.17.3 *(Weierstrass-Formel). Sei $U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f\colon U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph (analytisch). Dann sind Real- und Imaginarteil der durch die Wegintegrale der Vektorkomponenten definierten analytischen Funktion*

$$Z(w) = \int_0^w \begin{pmatrix} (1-\zeta^2)f(\zeta) \\ -i(1+\zeta^2)f(\zeta) \\ 2\zeta f(\zeta) \end{pmatrix} d\zeta$$

isometrische Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Offenbar ist Z analytisch, und

$$\partial Z(w) = ((1-w^2)f(w), -i(1+w^2)f(w), 2wf(w))$$

erfüllt

$$(\partial Z(w))^2 = ((1-w^2)^2 - (1+w^2)^2 + 4w^2)f^2(w) = 0.$$

□

Bemerkung 1.17.2 *Man kann $g(\zeta) = \zeta$ durch eine beliebige holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ ersetzen.*

Beispiel 1.17.3 *Für $f \equiv 1$ liefert Satz 1.17.3 die Darstellung*

$$Z(w) = \int_0^w \begin{pmatrix} (1-\zeta^2) \\ -i(1+\zeta^2) \\ 2\zeta \end{pmatrix} d\zeta = \begin{pmatrix} w - \frac{w^3}{3} \\ -i(w + \frac{w^3}{3}) \\ w^2 \end{pmatrix} = \Phi(w) + i\Psi(w),$$

wobei

$$\Phi(w) = \begin{pmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v + vu^2 - \frac{v^3}{3} \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

die Ennepersche Minimalfläche darstellt und

$$\Psi(w) = \begin{pmatrix} v + \frac{v^3}{3} - u^2 v \\ -u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ 2uv \end{pmatrix}$$

die dazu "konjugierte" Minimalfläche.

1.18 Geometrische Bedeutung der Gaussschen Krümmung

Sei $S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete, reguläre Hyperfläche mit Metrik $g = d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x))$, wobei $\Phi \in C^\infty(\overline{U}; \mathbb{R}^{n+1}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend.

Definition 1.18.1 *i) Das n-dimensionale Volumenelement auf S bezüglich der Parametrisierung Φ ist*

$$dvol = \sqrt{\det g}\, dx,$$

wobei dx das Volumenelement auf $U \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik ist, das heisst, das Lebesgue-Mass.
ii) Für $f \in C^\infty(\overline{S})$ ist dann

$$\int_S f\, dvol = \int_U f(\Phi(x)) \sqrt{\det g(x)}\, dx.$$

iii) Insbesondere definiert der Ausdruck

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_U \sqrt{\det g}\, dx$$

das n-dimensionale Volumen von S.

Beispiel 1.18.1 *i) Sei S die obere Halbsphäre*

$$S = S^n_+ = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x| = 1, z > 0\}$$

mit Parametrisierung

$$\Phi(y) = (y, \sqrt{1 - |y|^2}),\ y \in B_1(0; \mathbb{R}^n) = B.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie ist es nicht schwer, die Gleichung

$$\det(g(y)) = 1 + \frac{|y|^2}{z^2} = \frac{1}{1 - |y|^2}$$

zu verifizieren, und man erhält mit

$$\omega_n = \mathrm{Vol}(S^n) = 2 \int_B \frac{dy}{\sqrt{1 - |y|^2}} = 2\omega_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-1} dr}{\sqrt{1 - r^2}}$$

eine Rekursionsformel zur Bestimmung des Volumens ω_n der n-dimensionalen Standardsphäre. Die Beziehung $\omega_0 = 2$ führt so rasch zu den Formeln $\omega_1 = 4\pi/2 = 2\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 = 4\pi$, etc.

Sei $N \colon S \to S^n$ die Gauss-Abbildung auf S, und betrachte $\tilde{\Phi} = N \circ \Phi$. Falls $N \circ \Phi$ eine Immersion ist, so definiert $\tilde{\Phi}$ lokal eine Fläche $\tilde{S} = \tilde{\Phi}(U) = N(S)$ mit Metrik

$$\tilde{g}_{ik} = (N \circ \Phi)_{x_i} \cdot (N \circ \Phi)_{x_k} = a_i^j g_{jl} a_k^l,$$

wobei (a_i^j) die Darstellung der Weingarten-Abbildung $L_p = -dN(p)$ ist bezüglich Φ mit

$$(N \circ \Phi)_{x_i} = dN \cdot \Phi_{x_i} = -a_i^j \Phi_{x_j};$$

das heisst,

$$\det \tilde{g} = (\det(a_i^j))^2 \det g = K^2 \det g,$$

und wir erhalten

Satz 1.18.1 *Sei $N \circ \Phi$ reguläre Einbettung. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}(N(S)) = \int_U |K| \sqrt{\det g}\, dx = \int_S |K|\, dvol.$$

Insbesondere folgt

Satz 1.18.2 *Für $p = \Phi(x_0) \in S$ sei $B_r(p; S) = \Phi(B_r(x_0)), r > 0$. Falls $K(p) > 0$, so gilt*

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(N(B_r(p; S)))}{\mathrm{Vol}(B_r(p; S))}.$$

Beweis. Falls $K(p) \neq 0$, so ist L_p invertierbar und $dN(p)$ hat maximalen Rang. Gemäss dem Immersionssatz ist dann

$$N \circ \Phi \colon B_r(x_0) \to S^n$$

für genügend kleine $r > 0$ eine reguläre Einbettung. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.18.1.

□

1.19 Die geometrische Bedeutung der mittleren Krümmung

Sei $S = \Phi(U)$ eingebettete, reguläre Hyperfläche mit Orientierung N, wobei $\Phi \in C^\infty(\overline{U}; \mathbb{R}^{n+1})$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $\overline{U}$ kompakt, und sei $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Für $|\varepsilon| << 1$ definiere $\Phi_\varepsilon \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{n+1})$ durch

$$\Phi_\varepsilon(x) := \Phi(x) + \varepsilon\varphi(x) N(\Phi(x)),\ x \in U.$$

Beachte, dass Φ_ε für genügend kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}$ injektiv ist; weiter hat die Projektion

$$(id + \varepsilon\varphi(x) dN(\Phi(x)) d\Phi(x)) \colon T_pS \to T_pS$$

des Differentials $d\Phi_\varepsilon(x)$ in den Tangentialraum T_pS in allen Punkten $x \in U$ maximalen Rang , wobei $p = \Phi_\varepsilon(x)$, $x \in U$. Die Abbildung Φ_ε ist also ebenfalls eine C^∞-Einbettung mit $\Phi_\varepsilon(U) = S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definition 1.19.1 *Die Schar (S_ε) heisst* **normale Variation** *von S.*

Wir berechnen den Flächeninhalt der "Vergleichsflächen" S_ε für $|\varepsilon| << 1$. Mit

$$g_\varepsilon = d\Phi_\varepsilon^t d\Phi_\varepsilon = (d\Phi + \varepsilon\varphi d(N \circ \Phi))^t (d\Phi + \varepsilon\varphi d(N \circ \Phi))$$

folgt

$$(g_\varepsilon)_{ik} = g_{ik} - \varepsilon\varphi(h_{ik} + h_{ki}) + O(\varepsilon^2) = g_{il}(\delta_k^l - 2\varepsilon\varphi g^{lm} h_{mk}) + O(\varepsilon^2).$$

Da weiter gilt $g^{lm} h_{mk} = a_k^l$ sowie

$$\det(1 - 2\varepsilon\varphi L_p) = 1 - 2\varepsilon\varphi tr(L_p) + O(\varepsilon^2) = 1 - 2n\varepsilon\varphi H + O(\varepsilon^2),$$

erhalten wir

$$\det g_\varepsilon = \det g \det(1 - 2\varepsilon\varphi L_p) + O(\varepsilon^2) = \det g(1 - 2n\varepsilon\varphi H) + O(\varepsilon^2);$$

also

$$\sqrt{\det g_\varepsilon} = \sqrt{\det g}(1 - n\varepsilon\varphi H) + O(\varepsilon^2).$$

Es folgt:

$$\mathrm{Vol}(S_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(S) - \varepsilon n \int_S \varphi H dvol + O(\varepsilon^2).$$

Satz 1.19.1 $\frac{d}{d\varepsilon} \mathrm{Vol}(S_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -n \int_S \varphi H dvol.$

Bemerkung 1.19.1 *Minimalflächen sind also genau die Flächen mit stationärem Volumen bezüglich normaler Variationen.*

1.20 Fokalpunkte

Sei $S = \Phi(U)$ eingebettete, reguläre Hyperfläche mit Orientierung N, wobei $\Phi \in C^\infty(\overline{U}; \mathbb{R}^{n+1})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{U}$ kompakt.

Setze Φ fort auf $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\tilde{\Phi}(x, t) := \Phi(x) + tN(\Phi(x)).$$

Beachte, dass für $x \in U$, $t = 0$ die Matrix

$$d\tilde{\Phi}(z) = (d\Phi(x), N(\Phi(x)))$$

den Rang $n + 1$ hat; $\tilde{\Phi}$ ist also ein C^∞-Diffeomorphismus auf einer Umgebung W von $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. OBdA sei $W = U \times] - \delta, \delta[$. Schränke Φ allenfalls ein auf einen relativ kompakten Teil $V \subset\subset U$.

Definition 1.20.1 *Die Punktmenge*

$$\tilde{\Phi}(U \times] - \delta, \delta[) = U_\delta(S)$$

heisst **Tubenumgebung** *von S vom Radius $\delta > 0$, die Fläche $S_\varepsilon = \tilde{\Phi}(U, \varepsilon)$ heisst* **Parallelfläche** *zu S im Abstand ε.*

Definition 1.20.2 *Punkte $q = p + t \cdot N(p)$, $p = \Phi(x)$, wo $d\tilde{\Phi}(x,t)$ singulär wird, heissen* **Fokalpunkte** *von S.*

OBdA sei $T_pS = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $N = e_{n+1}$. Dann gilt

$$d\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} d\Phi_t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$d\Phi_t = (id - tL_p) \cdot d\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

singulär ist genau dann, wenn $(id - tL_p)$ singulär ist, das heisst, wenn $tk_i(p) = 1$ für ein i. Es folgt

Satz 1.20.1 *i) Fokalpunkte sind singuläre Punkte der Parallelfläche $S_t = \Phi_t(U)$ und liegen im Abstand $\frac{1}{k_i(p)}$ von S auf der Normalgeraden $t \mapsto p + tN(p)$. (Fokalpunkte sind nicht notwendig Schnittpunkte verschiedener Normalgeraden.)*

ii) Die Fokalfläche $\sum = \{q \in \mathbb{R}^{n+1}; q$ Fokalpunkt $\}$ von S ist der geometrische Ort der Singularitäten aller Parallelflächen von S.

Bemerkung 1.20.1 *Eine von S ausgehende Lichtwelle wird in der Fokalfläche konzentriert.*

Kapitel 2

Die innere Geometrie von Hyperflächen

Die Objekte der "inneren Geometrie" sind Grössen, die sich allein mit Hilfe der 1. Fundamentalform, also der Metrik g, ausdrücken lassen. Gehören hierzu auch die oben eingeführten Krümmungsbegriffe, der Begriff der Geodäten und der Parallelverschiebung? – Für die mittlere Krümmung kann dies nicht gelten, da sie von der Wahl der Orientierung abhängt; jedoch werden wir insbesondere sehen, dass in $n = 2$ Dimensionen die Gausssche Krümmung ein intrinsischer Begriff ist. Dies ist der Ausgangspunkt ist für die Entwicklung der Riemannschen Geometrie.

2.1 Die Ableitungsgleichungen

Sei $S = \Phi(U)$, wobei $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^{n+1})$, eine eingebettete, reguläre Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Orientierung N, und seien

$$g_{ij} = \langle \Phi_{x_i}, \Phi_{x_j} \rangle, \; h_{ij} = \langle N \circ \Phi, \Phi_{x_i x_j} \rangle$$

die Koeffizienten der 1. und 2. Fundamentalform.

Da in jedem Punkt $p = \Phi(x) \in S$ die $n+1$ Vektoren N und $\Phi_{x_i}, 1 \leq i \leq n$, eine Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden, gibt es Koeffizienten Γ_{ij}^k, B_{ij} mit

$$\Phi_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^l \Phi_{x_l} + B_{ij} N. \tag{2.1.1}$$

Diese Koeffizienten können wir leicht bestimmen. Indem wir (2.1.1) mit N testen, erhalten wir zunächst

$$B_{ij} = \langle N, \Phi_{x_i x_j} \rangle = h_{ij}.$$

Analog folgt nach Testen mit Φ_{x_k} die Gleichung

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \langle \Phi_{x_i x_j}, \Phi_{x_k} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx_i} g_{jk} + \frac{d}{dx_j} g_{ik} - \frac{d}{dx_k} g_{ij} \right);$$

das heisst,

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk}(g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k}), \tag{2.1.2}$$

wobei wir zur Abkürzung schreiben $g_{ij,k} = \frac{d}{dx_k} g_{ij}$, etc.

Definition 2.1.1 *Die Koeffizienten Γ^k_{ij} heissen* **Christoffel-Symbole (2. Art)** *der Metrik g; $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})$ heisst* **Zusammenhang** *auf S.*

Bemerkung 2.1.1 *Offenbar gilt $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.*

Beispiel 2.1.1 *Sei $\alpha = (\varphi, \psi)$ mit $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$, $\psi(u) > 0$. Für die von α erzeugte Drehfläche S, parametrisiert durch*

$$\Phi(u,v) = (\varphi(u), \psi(u)\cos v, \psi(u)\sin v),$$

gilt nach 1.14.2

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} \psi'\varphi'' - \varphi'\psi'' & 0 \\ 0 & \psi\varphi' \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir als Darstellung der Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2}(\psi^2)_u = -\psi\psi', \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{\psi'}{\psi}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.2 *Zusammen mit der Gleichung*

$$-(N \circ \Phi)_{x_i} = L_p \Phi_{x_i} = a^k_i \Phi_{x_k} = h_{ij} g^{jk} \Phi_{x_k} \tag{2.1.3}$$

liefert (2.1.1) *ein System partieller linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung*

$$F_{x_i} = A_i F, 1 \le i \le n$$

für die Basis $F = (\Phi_{x_1}, \ldots, \Phi_{x_n}, N)$. Für die Existenz einer Lösung F müssen offenbar die folgenden **Integrabilitätsbedingungen** *erfüllt sein:*

$$\begin{aligned} F_{x_i x_j} &= A_{i,x_j} F + A_i F_{x_j} = (A_{i,x_j} + A_i A_j) F \\ &= (A_{j,x_i} + A_j A_i) F = F_{x_j x_i}; \end{aligned}$$

das heisst, die Bedingung

$$A_{i,x_j} - A_{j,x_i} + A_i A_j - A_j A_i = 0. \tag{2.1.4}$$

Durch Testen mit den Basis-Vektoren Φ_{x_i}, beziehungsweise N erhalten wir aus (2.1.1) und (2.1.3) die zu (2.1.4) äquivalenten Bedingungen

$$0 = \langle \Phi_{x_i x_j x_k} - \Phi_{x_i x_k x_j}, \Phi_{x_m} \rangle, 1 \le i,j,k,m \le n, \tag{2.1.5}$$

beziehungsweise

$$0 = \langle \Phi_{x_i x_j x_k} - \Phi_{x_i x_k x_j}, N \rangle, 1 \le i, j, k \le n, \qquad (2.1.6)$$

welche Kompatibilitätsbedungungen für (die Ableitungen von)g und h entsprechen. (Die Bedingung $N_{x_i x_j} = N_{x_j x_i}$ ist in (2.1.5), (2.1.6) enthalten.)

Wie können wir diese Bedingungen interpretieren? – Zunächst betrachten wir (2.1.5). Mit (2.1.1) folgt das System der **Gauss-Gleichungen**

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\Gamma^l_{ij}\Phi_{x_l})_{x_k} - (\Gamma^l_{ik}\Phi_{x_l})_{x_j}, \Phi_{x_m} \rangle \\ &\quad + \langle h_{ij}(N \circ \Phi)_{x_k} - h_{ik}(N \circ \Phi)_{x_j}, \Phi_{x_m} \rangle \\ &= (\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j}) g_{lm} + \Gamma^l_{ij} \langle \Phi_{x_k x_l}, \Phi_{x_m} \rangle - \Gamma^l_{ik} \langle \Phi_{x_j x_l}, \Phi_{x_m} \rangle \\ &\quad - (h_{ij} h_{km} - h_{ik} h_{jm}) \end{aligned}$$

Mit

$$\langle \Phi_{x_k x_l}, \Phi_{x_m} \rangle = \Gamma^a_{kl} g_{am}$$

folgt so die Identität

$$[(\Gamma^a_{ij,k} - \Gamma^a_{ik,j}) + (\Gamma^l_{ij}\Gamma^a_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^a_{lj})] g_{am} = h_{ij} h_{km} - h_{ik} h_{jm}.$$

Definition 2.1.2 *Der Ausdruck*

$$R_{imjk} = [(\Gamma^a_{ij,k} - \Gamma^a_{ik,j}) + (\Gamma^l_{ij}\Gamma^a_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^a_{lj})] g_{am}$$

heisst **Riemannscher Krümmungstensor**. *R ist allein durch g bestimmt.*

Die Gleichung (2.1.5) ist somit äquivalent zu

$$R_{imjk} = h_{ij} h_{km} - h_{ik} h_{jm}, \ 1 \le i, j, k, m \le n. \qquad (2.1.7)$$

Insbesondere erhalten wir den folgenden, für die weitere Entwicklung der Differentialgeometrie zentralen Satz.

Satz 2.1.1 *(Gauss: Theorema egregium) Die Gauss-Krümmung auf einer Fläche ($n = 2$) ist allein durch die Metrik g bestimmt, und es gilt*

$$R_{1212} = K \cdot \det g.$$

(Eine analoge Aussage gilt in allen geraden Dimensionen $n = 2d \ge 2$.)

Beweis. Setze $i = j = 1, k = m = 2$ in (2.1.7) und benutze (1.14.3), also die Identität

$$K = \frac{\det(h)}{\det(g)}.$$

□

Beispiel 2.1.2 *Im Falle der Drehfläche aus Beispiel 2.1.1 erhalten wir*

$$R_{1212} = -(\Gamma^2_{12,1} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21})\psi^2 = -\psi\psi'' + (\psi')^2 - (\psi')^2 = -\psi\psi''$$

also

$$K = -\frac{\psi''}{\psi},$$

im Einklang mit Beispiel 1.14.2.

Bemerkung 2.1.3 *Nach Definition und unter Benutzung von* (2.1.7) *hat* $R = (R_{ijkl})$ *die Symmetrien*

$$R_{imjk} = -R_{imkj} = h_{ij}h_{km} - h_{ik}h_{jm} = R_{jkim}.$$

Damit folgt speziell für $n = 2$*:*

$$R_{11jk} = R_{22jk} = R_{im11} = R_{im22} = 0,\ 1 \le i,j,k,m \le 2,$$

und alle übrigen Koeffizienten sind bereits durch Satz 2.1.1 bestimmt

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} = K \det g;$$

das heisst,

$$R_{imjk} = K(g_{ij}g_{km} - g_{ik}g_{jm}).$$

Aus (2.1.6) erhalten wir als weitere Kompatibilitätsbedingung die **Mainardi-Codazzi-Gleichungen**

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma^l_{ij}\langle \Phi_{x_l x_k}, N\rangle - \Gamma^l_{ik}\langle \Phi_{x_l x_j}, N\rangle + h_{ij,k} - h_{ik,j} \\ &= \Gamma^l_{ij}h_{lk} - \Gamma^l_{ik}h_{lj} + h_{ij,k} - h_{ik,j}, 1 \le i,j,k \le n. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Speziell im Falle $\mathbf{n = 2}$ lässt sich dieser Satz von Gleichungen auf ein Paar von Gleichungen reduzieren. Da (2.1.8) für $j = k$ trivial ist, dürfen wir oBdA $j = 1, k = 2$ setzen. Für $i = 1, 2$ erhalten wir dann die beiden Gleichungen

$$\Gamma^l_{11}h_{l2} - \Gamma^l_{12}h_{l1} + h_{11,2} - h_{12,1} = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\Gamma^l_{21}h_{l2} - \Gamma^l_{22}h_{l1} + h_{12,2} - h_{22,1} = 0., \tag{2.1.10}$$

Beispiel 2.1.3 *i) Für die Drehflächen aus Beispiel 2.1.1verschwinden alle Terme der Gleichung* (2.1.9)*. Aus* (2.1.10) *erhalten wir*

$$\Gamma^2_{12}h_{22} - \Gamma^1_{22}h_{11} = \psi'\varphi' + \psi\psi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'') = h_{22,1} = \psi'\varphi' + \psi\varphi''.$$

ii) Flächen in isothermen Parametern. Sei $S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ *immersierte Fläche mit*

$$g = d\Phi^t \cdot d\Phi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei $0 < E = E(u,v) \in C^\infty(U)$*.*

Für

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) = E\,\Gamma^k_{ij}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Gamma_{111} = \frac{1}{2}E_u,\ \Gamma_{112} = -\frac{1}{2}E_v, \\ &\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = \frac{1}{2}E_v,\ \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}E_u, \\ &\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}E_u,\ \Gamma_{222} = \frac{1}{2}E_v. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E} = \frac{1}{2}(\log E)_u = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22},$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E} = \frac{1}{2}(\log E)_v = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11}$$

und damit

$$\begin{aligned} R_{1212} &= E\,[(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1}) + (\Gamma^m_{11}\Gamma^2_{m2} - \Gamma^m_{12}\Gamma^2_{m1})] \\ &= -\frac{E}{2}\Delta(\log E) = KE^2, \end{aligned}$$

da $\Gamma^m_{11}\Gamma^2_{m2} - \Gamma^m_{12}\Gamma^2_{m1} = 0$. *Die Gauss-Gleichung lässt sich also in der Form*

$$-\Delta(\log E) = 2KE$$

schreiben. Setzen wir $E = e^{2\rho}$, *so erhalten wir daraus*

$$-\Delta\rho = Ke^{2\rho}.$$

Speziell für $K \equiv 1$ *ist dies die* **Liouville-Gleichung**.

iii) Unter Benutzung von Werkzeugen der komplexen Analysis kann man für eingebettete Flächen vom Typ des Torus mit $H \equiv 1$ *aus der Mainardi-Codazzi-Gleichung die* **sinh-Gordon-Gleichung**

$$-\Delta u + 2\lambda sinh\, u = 0$$

gewinnen.

Bemerkung 2.1.4 *Komplementär zu Bemerkung 2.1.2 ist das System der Gauss-Gleichungen* (2.1.7) *und der Mainardi-Codazzi-Gleichungen* (2.1.8) *nicht nur notwendig sondern auch hinreichend für die Existenz einer Hyperfläche* S *mit vorgegebenen* $(g_{ik}), (h_{ik})$, *wobei* S *bis auf Bewegungen im* $\mathbb{R}^{n+1}$ *eindeutig bestimmt ist (Satz von Bonnet).*

2.2 Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung

Können wir auch die kovariante Ableitung aus Abschnitt 1.7 intrinsisch definieren? – Sei dazu $S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete Hyperfläche mit Orientierung N, $\alpha = \Phi \circ \gamma \in C^\infty(I;S)$ eine Kurve auf S, wobei $\gamma \in C^\infty(I;U)$, und sei $X \in C^\infty(I;\mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld längs α, das heisst,

$$X(t) \in T_{\alpha(t)}S, \ \forall t \in I.$$

Schreibe

$$X(t) = v^i(t)\Phi_{x_i}(\gamma(t)) = d\Phi(\gamma(t)) \cdot v(t),$$

mit $v \in C^\infty(I;\mathbb{R}^n)$.

Nach Definition 1.7.1 ist die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}X(t)$ gegeben durch die tangentiale Komponente von

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = \dot{v}^i \Phi_{x_i} + v^i \Phi_{x_i x_j} \dot{\gamma}^j,$$

wobei $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, etc. Mit

$$\Phi_{x_i x_j} = \Gamma^k_{ij} \Phi_{x_k} + h_{ij} N$$

folgt

$$\frac{DX}{dt} = \dot{v}^i \Phi_{x_i} + v^i \dot{\gamma}^j \Gamma^k_{ij} \Phi_{x_k} = (\dot{v}^k + v^i \dot{\gamma}^j \Gamma^k_{ij}) \Phi_{x_k}. \tag{2.2.1}$$

Satz 2.2.1 *i) Das Vektorfeld $X(t) = d\Phi(\gamma(t)) \cdot v(t)$ ist parallel längs $\alpha = \Phi \circ \gamma$ genau dann, wenn gilt*

$$\dot{v}^k + v^i \dot{\gamma}^j (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) = 0, \ 1 \le k \le n.$$

ii) $\alpha = \Phi \circ \gamma$ ist Geodätische auf S genau dann, wenn

$$\ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) = 0, \ 1 \le k \le n.$$

Bemerkung 2.2.1 *Das heisst, parallele Vektorfelder und Geodäten sind Objekte der inneren Geometrie.*

Sei nun X ein Vektorfeld auf S, und seien $p_0 \in S$, $Y \in T_{p_0}S$. Sei weiter $\alpha \in C^\infty(I;S)$ eine Kurve durch $p_0 = \alpha(0)$ mit $\dot{\alpha}(0) = Y$, und betrachte das Vektorfeld $X \circ \alpha$ längs α. Mit (2.2.1) ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.2.1 $\nabla_Y X(p_0) := \frac{D}{dt}(X \circ \alpha)(0)$ *heisst die* **kovariante Ableitung** *von X in Richtung Y (an der Stelle p_0).*

Bemerkung 2.2.2 *Die kovariante Ableitung ist wohldefiniert und intrinsisch. Sei dazu für $p = \Phi(x)$ in einer Koordinatenumgebung $V = \Phi(U)$ das Vektorfeld X durch $X(\Phi(x)) = d\Phi(x) \cdot v(x)$ mit $v \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ gegeben, und seien*

$$Y = d\Phi(x_0) \cdot w, \ w \in \mathbb{R}^n,$$

bzw.

$$\alpha = \Phi \circ \gamma, \ \gamma \in C^\infty(I;U),$$

die Darstellungen von Y, bzw. α bezüglich Φ mit $\gamma(0) = x_0, \dot{\gamma}(0) = w$. Dann gilt $(X \circ \alpha)(t) = d\Phi(\gamma(t)) \cdot v(\gamma(t))$ und mit (2.2.1) folgt

$$\begin{aligned}\nabla_Y X(p_0) &= \frac{D}{dt}(X \circ \alpha)(0) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(v \circ \gamma)^k(0) + v^i(x_0)\dot{\gamma}^j(0)\Gamma^k_{ij}(x_0) \right) \Phi_{x_k} \qquad (2.2.2) \\ &= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x_j}(x_0) \cdot w^j + v^i(x_0) w^j \Gamma^k_{ij}(x_0) \right) \Phi_{x_k},\end{aligned}$$

unabhängig von der speziellen Wahl von α.

Satz 2.2.2 *Die kovariante Ableitung hat die folgenden Eigenschaften*

i) $\nabla_Y(X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$,

ii) $\nabla_Y(fX) = (df \cdot Y)X + f\nabla_Y X$,

iii) $\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X$

für alle C^∞*-Vektorfelder* X, X_1, X_2, Y *auf* S *und alle* $f \in C^\infty(S)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus (2.2.2). □

2.3 Die Exponentialabbildung

Sei $S = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete Hyperfläche. Zu $p \in S$, $v \in T_pS$ sei $\alpha = \alpha(t; v) \in C^\infty(I; S)$ die eindeutige maximale Geodäte durch $\alpha(0) = p$ mit $\dot\alpha(0) = v$ nach Satz 1.6.2.

Definition 2.3.1 *Die Abbildung* $\exp_p \colon \mathcal{D} \subset T_pS \to S$ *mit*

$$v \mapsto \alpha(1; v)$$

heisst **Exponentialabbildung** *auf* S *in* p.

Bemerkung 2.3.1 *i) Falls* S *vollständig ist, so ist* $\exp_p$ *nach Satz 1.6.3 für jedes* $p \in S$ *auf* $\mathcal{D} = T_pS$ *definiert.*

ii) Allgemein gilt

$$\alpha(t; \lambda v) = \alpha(\lambda t, v), \ \forall \lambda \geq 0, t \in \mathbb{R}; \tag{2.3.1}$$

also ist $\mathcal{D}$ *stets eine sternförmige Umgebung von* $0 \in T_pS$.

iii) Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gilt $\exp_p \in C^\infty(\mathcal{D}; S)$, *und* $\exp_p$ *hängt glatt vom Basispunkt* p *ab.*

Satz 2.3.1 *Zu* $p \in S$ *gibt es* $r > 0$, *so dass* $B_r(0) = \{v \in T_pS; |v| < r\} \subset \mathcal{D}$ *und so dass* $\exp_{p|B_r(0)}$ *ein Diffeomorphismus ist von* $B_r(0)$ *auf eine Umgebung* V *von* p *in* S.

Beweis. Sei $v \in T_pS$. Es gilt

$$d\exp_p(0)\, v = \lim_{h \to 0} \frac{\exp_p(hv) - \exp_p(0)}{h}.$$

Mit (2.3.1) folgt

$$\exp_p(hv) = \alpha(1; hv) = \alpha(h; v) = p + h\dot\alpha(0; v) + O(h^2),$$

und mit $\dot\alpha(0; v) = v$ erhalten wir

$$d(\exp_p(0))v = v;$$

das heisst,

$$d\exp_p(0) = id \colon T_pS \to T_pS. \tag{2.3.2}$$

Aus dem Immersionssatz folgt nun die Behauptung. □

Definition 2.3.2 *Das Bild $V = \exp_p(U)$ einer Umgebung U von 0 in $T_pS \cong \mathbb{R}^n$ heisst eine* **Normalumgebung** *von p in S, falls $\exp_p : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Bemerkung 2.3.2 *Mittels $\exp_p$ erhalten wir offenbar spezielle Koordinaten für eine Normalumgebung, und zwar*

i) geodätische **Normalkoordinaten**, *falls wir rechtwinklige Koordinaten für $T_pS \cong \mathbb{R}^n$ wählen, beziehungsweise*

ii) geodätische **Polarkoordinaten**, *falls wir Polarkoordinaten auf T_pS wählen.*

Der Parameterwechsel von Φ zu $\exp_p$ ändert zwar nicht die Geometrie, wohl aber die Darstellungen der Metrik und des Zusammenhangs $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})$.

Satz 2.3.2 *In Normalkoordinaten um p gilt*

$$g(0) = 1,\ \Gamma^k_{ij}(0) = 0.$$

Beweis. Nach (2.3.2) gilt

$$g(0) = d\exp_p(0)^t d\exp_p(0) = 1.$$

Nach Definition von $\exp_p$ gilt weiter, $\alpha(t) = \exp_p(\gamma(t))$ ist Geodäte durch $\alpha(0) = p$ genau dann, wenn $\gamma(t) = tv$, für ein $v \in T_pS$. Satz 2.2.1.ii) liefert nun

$$\ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = v^iv^j\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0.$$

Setzen wir insbesondere $t = 0$, so erhalten wir

$$v^iv^j\Gamma^k_{ij}(0) = 0,\ 1 \le k \le n,$$

für beliebiges $v \in T_pS$. Da $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, folgt

$$\Gamma^k_{ij}(0) = 0, 1 \le i, j, k \le n.$$

$\square$

Satz 2.3.3 *In geodätischen Polarkoordinaten*

$$]0,\infty[\times S^{n-1} \ni (r,\xi) \mapsto \exp_p(r\xi) \in S$$

um p auf S gilt

$$g_{11} = 1,\ \Gamma^k_{11} \equiv 0,\ 1 \le k \le n,$$

sowie

$$g_{1k} = g_{k1} = 0,\ g_{ik}(r\xi) = r^2(\delta_{ik} + O(r)),\ 2 \le i, k \le n.$$

Beweis. Der Geodäten

$$\alpha(t; r\xi) = \exp_p(tr\xi) = \alpha(tr; \xi)$$

durch $\alpha(0) = p$ mit $\dot\alpha(0) = r\xi, |\xi| = 1$, entspricht in Polardoordinaten die Kurve

$$t \mapsto \gamma(t) = (tr, \xi) \in]0, \infty[\times S^{n-1}.$$

Da $|\dot\alpha(t;\xi)| \equiv |\dot\alpha(0;\xi)| = |\xi| = 1$, folgt

$$g_{11} = |\frac{\partial}{\partial r} \exp_p(r\xi)|^2 = |\dot\alpha(t;\xi)_{|t=r}|^2 = 1.$$

Weiter gilt aufgrund von Satz 2.2.1

$$\ddot\gamma^k + \dot\gamma^i \dot\gamma^j \Gamma^k_{ij} = 0,\ 1 \le k \le n,$$

und mit $\dot\gamma \equiv (r, 0)$ folgt

$$\Gamma^k_{11} \equiv 0,\ 1 \le k \le n.$$

Behauptung 1: $g_{1k} = g_{k1} \equiv 0,\ 2 \le k \le n.$

Beweis. Da $\exp_p(0 \cdot \xi) = p$ für alle ξ, folgt

$$\frac{\partial \exp_p(0 \cdot \xi)}{\partial \xi_k} = 0;$$

also $g_{1k} = g_{k1} = 0$ für $r = 0$ und alle $k \ge 2$. Die Gleichung

$$0 = \Gamma^l_{11} = \frac{1}{2} g^{lk}(g_{1k,1} + g_{k1,1} - g_{11,k}) = g^{lk} g_{1k,1}$$

liefert zudem für alle k die Bedingung

$$g_{1k,1} \equiv 0$$

und damit die Behauptung. □

Nach Substitution $x = r\xi$ erhalten wir schliesslich mit (2.3.2) und der Kettenregel

$$\begin{aligned} g_{ij}(r,\xi) &= \langle \frac{\partial}{\partial \xi_i} \exp_p(r\xi), \frac{\partial}{\partial \xi_j} \exp_p(r\xi) \rangle \\ &= r^2 \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \exp_p(x), \frac{\partial}{\partial x_j} \exp_p(x) \rangle_{|x=r\xi} \\ &= r^2(\delta_{ij} + O(r)). \end{aligned}$$

□

Geodätische Polarkoordinaten sind für uns vor allem in $n = 2$ Dimensionen von Interesse.

Satz 2.3.4 *Sei $n = 2$. In geodätischen Polarkoordinaten $(r, \theta) \mapsto \exp_p(re^{i\theta})$ um p auf S gilt in einer Umgebung von $r = 0$ die Darstellung*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},\ \lambda(r) = r - \frac{1}{6} r^3 K(p) + O(r^4),$$

und λ löst die Differentialgleichung $\lambda_{rr} + K\lambda = 0$.

Folgerung 2.3.1 *Sei $L(r)$ die Länge des "Kreises" $S_r(p) = \exp_p(\partial B_r(0)$. Aus Satz 2.3.4 folgt*

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(r,\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \lambda\, d\theta = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{3} K(p) + O(r^4);$$

insbesondere erhalten wir die Beziehung

$$K(p) = -\lim_{r\to 0} \frac{3(L(r) - 2\pi r)}{\pi r^3}$$

zwischen der Gausskrümmung und der Länge geodätischer Kreise.

Beispiel 2.3.1 *Sei $S = S^2$, und sei p der Nordpol. Es gilt $L(r) = 2\pi \sin r$ und $K(p) = 1$.*

Beweis von Satz 2.3.4. Satz 2.3.3 liefert die Darstellung

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},\ \lambda = \lambda(r,\theta) = r + O(r^2)$$

und die Identität

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Satz 2.1.1 ergibt

$$\begin{aligned} K\lambda^2 &= K \det g = R_{1212} \\ &= [(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2) + (\Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2)]\lambda^2 = -(\Gamma_{12,1}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2)\lambda^2. \end{aligned}$$

Mit

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22}(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}\lambda^{-2}(\lambda^2)_r = \frac{\lambda_r}{\lambda} \tag{2.3.3}$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$K = -\left(\frac{\lambda_r}{\lambda}\right)_r - \left(\frac{\lambda_r}{\lambda}\right)^2 = -\frac{\lambda_{rr}}{\lambda}.$$

Die Näherung $\lambda(r,\theta) = r + O(r^2)$ liefert die Anfangsbedingungen $\lambda(0) = 0$, sowie $\lambda_r(0) = 1$. Also folgt auch

$$\lambda_{rr}(0) = 0,\ \lambda_{rrr}(0) = -K(p)$$

und damit

$$\lambda(r) = r - \frac{1}{6} r^3 K(p) + O(r^4),$$

wie gewünscht. □

Folgerung 2.3.2 *Geodäten sind lokal kürzeste Verbindungen.*

Beweis: Sei $p \in S$, $V_0 = \exp_p(B_{r_0}(0))$ eine Normalumgebung, $v = s\xi \in T_pS$ ein Vektor mit $|v| = s < r_0$, $q = \exp_p(v)$. Betrachte die Geodäte

$$\alpha(t) = \exp_p(tv),\ 0 \le t \le 1,$$

von p nach q. Es gilt $\alpha = \exp_p \circ \gamma$, wobei γ in geodätischen Polarkoordinaten die Darstellung hat

$$\gamma(t) = (ts, \xi),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Mit Satz 2.3.3 erhalten wir $|\dot{\alpha}|^2 = s^2 g_{11} = s^2$; es folgt

$$L(\alpha) = \int_0^1 |\dot{\alpha}(t)|\, dt = s = |v|.$$

Sei $\beta \in C^\infty([0,1]; S)$ eine weitere Kurve von $\beta(0) = p$ nach $\beta(1) = q$. Wir unterscheiden zwei Fälle

i) Sei $\beta([0,1]) \subset V_0$. Dann hat β eine Darstellung

$$\beta = \exp_p \circ \delta,\ \delta(t) = (r(t), \xi(t)),$$

und Satz 2.3.3 ergibt

$$|\dot{\beta}(t)|^2 = g(\delta(t))(\dot{\delta}(t), \dot{\delta}(t)) = (\dot{r}^2 + \sum_{2 \leq i,j \leq n} g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j)|_t \geq \dot{r}^2(t).$$

Es folgt:

$$L(\beta) \geq \int_0^1 \dot{r}(t)\, dt = r(1) = s = |v| = L(\alpha).$$

ii) Falls $\beta([0,1]) \not\subset V_0$, betrachte $\beta|_{[0,t_0]}$, wobei $t_0 = \inf\{t; \beta(t) \notin V_0\}$, mit

$$L(\beta) \geq L(\beta|_{[0,t_0]}) \geq r(t_0) = r_0 > L(\alpha).$$

Da $L(\beta) \geq L(\beta|_{[0,t_0]})$ folgt die Behauptung.

2.4 Isometrien

Seien $S = \Phi(U)$, $\overline{S} = \overline{\Phi}(\overline{U}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete Hyperflächen.

Definition 2.4.1 *i) Eine Abbildung $f\colon S \to \overline{S}$ heisst differenzierbar (glatt), wenn die Abbildung $f \circ \Phi$ differenzierbar (glatt) ist.*

ii) Eine C^∞-Abbildung $f\colon S \to \overline{S}$ heisst **Isometrie**, *falls die Metriken g und $\tilde{g}$ auf S, bzw. $\tilde{S} = f(S) \subset \overline{S}$ bezüglich der Parametrisierungen Φ, bzw. $\tilde{\Phi} = f \circ \Phi$ übereinstimmen*

iii) Falls f bijektiv ist, so heissen S und $\overline{S}$ **isometrisch**.

Beispiel 2.4.1 *Das Katenoid und das Helikoid aus Abschnitt 1.18 sind isometrische Minimalflächen.*

Bemerkung 2.4.1 *i) Falls $f: S \to \overline{S}$ Isometrie, so gilt für $p = \Phi(x_0) \in S$ und beliebige Vektoren*

$$V = d\Phi(x_0)v,\ W = d\Phi(x_0)w \in T_pS,$$

bzw.

$$\tilde{V} = d\tilde{\Phi}(x_0) \cdot v,\ \tilde{W} = d\tilde{\Phi}(x_0) \cdot w$$

die Identität

$$\langle V, W\rangle = g_{ij}v^iw^j = \tilde{g}_{ij}v^iw^j = \langle \tilde{V}, \tilde{W}\rangle.$$

Schreiben wir

$$\tilde{V} = d(f \circ \Phi)(x_0)v =: df(p) \cdot V,\ \tilde{W} = d(f \circ \Phi)(x_0)w =: df(p) \cdot W,$$

so ist f Isometrie genau dann, wenn gilt

$$\langle df(p)V, df(p)W\rangle = \langle V, W\rangle,\ \forall V, W \in T_pS.$$

Für $n = 2$ erhalten wir aus Satz 2.3.4 eine hinreichende Bedingung für die (lokale) Isometrie von Flächen.

Satz 2.4.1 *(Minding) Zwei Flächen S und $\overline{S}$ mit derselben konstanten Gauss-Krümmung K sind lokal isometrisch.*

Beweis. In geodätischen Polarkoordinaten um beliebige Punkte $p \in S$, $\overline{p} \in \overline{S}$ gilt nach Satz 2.3.4

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},\ \overline{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^2 \end{pmatrix},$$

wobei λ, beziehungsweise $\overline{\lambda}$ Lösungen sind der Gleichung

$$\lambda_{rr} + K\lambda = 0 = \overline{\lambda}_{rr} + K\overline{\lambda} \tag{2.4.1}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\lambda(0) = \overline{\lambda}(0) = 0,\ \lambda_r(0) = \overline{\lambda}_r(0) = 1.$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems für Gleichung (2.4.1) folgt $\lambda = \overline{\lambda}$; das heisst, $g = \overline{g}$, und die Abbildung $\overline{exp}_{\overline{p}} \circ exp_p^{-1}$ ist die gesuchte Isometrie einer Normalumgeung von $p \in S$, parametrisiert durch $\Phi = exp_p$, auf eine Normalumgebung von $\overline{p} \in \overline{S}$. □

Beispiel 2.4.2 *i) Der Zylinder*

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

besitzt nach Beispiel 1.13.3 die Gausskrümmung $K = 0$, ist also nach Satz 2.4.1 lokal isometrisch zur Ebene $\mathbb{R}^2$.

ii) Der Kegel

$$\Gamma_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z > 0,\ x^2 + y^2 = \alpha \cdot z^2\},$$

wobei $\alpha > 0$, hat die Gausskrümmung $K = 0$, ist also lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$.

Eine weitere nützliche Eigenschaft von Isometrien liefert der nächste Satz.

Satz 2.4.2 *Eine Isometrie f bildet Geodäten $\alpha \in C^\infty(I;S)$ ab auf Geodäten $\tilde{\alpha} = f \circ \alpha \in C^\infty(I;\overline{S})$.*

Beweis. Bezüglich Φ und $\tilde{\Phi} = f \circ \Phi$ gilt $\Gamma = \tilde{\Gamma}$; zudem haben $\alpha = \Phi \circ \gamma$ und $\tilde{\alpha} = \tilde{\Phi} \circ \gamma$ dieselbe Darstellung γ. □

Als Anwendung von Satz 2.4.2 beweisen wir die folgende "point-frame formula".

Satz 2.4.3 *Seien $f_{1,2}\colon S \to \overline{S}$ Isometrien, wobei S zusammenhängend. Für einen Punkt $p \in S$ gelte*

$$f_1(p) = f_2(p),\ df_1(p) = df_2(p).$$

Dann ist $f_1 \equiv f_2$.

Beweis. i) Sei $\alpha \in C^\infty(I;S)$ Geodäte durch $\alpha(0) = p$ mit $\dot{\alpha}(0) = v \in T_pS$. Gemäss Satz 2.4.2 sind dann $\alpha_1 = f_1 \circ \alpha$ und $\alpha_2 = f_2 \circ \alpha$ Geodäten durch $\overline{p} = \alpha_1(0) = f_1(p) = f_2(p) = \alpha_2(0)$ mit $\dot{\alpha}_1(0) = df_1(p)v = df_2(p)v = \dot{\alpha}_2(0)$. Mit der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems für Geodäten folgt $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Da v beliebig gewählt war, schliessen wir, dass $f_1 \equiv f_2$ auf einer Normalumgebung von $p \in S$.

ii) Sei

$$A = \{q \in S; f_1(q) = f_2(q), df_1(q) = df_2(q)\}.$$

Offenbar gilt $p \in A$, also $A \neq \emptyset$. Weiter ist A offenbar abgeschlossen. Teil i) zeigt nun, dass A mit q auch stets eine Normalumgebung von q enthält; also ist A auch offen. Da S nach Annahme zusammenhängend ist, folgt $A = S$ und damit die Behauptung. □

2.5 Geodätische Krümmung, der Satz von Gauss-Bonnet

Sei $S = \Phi(U)$ eingebettete Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Orientierung $N, \alpha \in C^\infty(I;S)$ eine Kurve mit $|\dot{\alpha}| = 1$. Betrachte die Orthonormal-Basis für $T_{\alpha(t)}S$

$$e_1(t) = \dot{\alpha}(t),\ e_2(t) = N \times e_1(t), t \in I.$$

Definition 2.5.1 $\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle =: k_g(t)$ *heisst* **geodätische Krümmung** *von α.*

Beispiel 2.5.1 *i) Für ebene Kurven $\alpha \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ stimmt k_g mit der in Abschnitt 1.9 definierten Krümmung bezüglich der Kurvennormalen e_2 überein.*

ii) Der nach Bogenlänge parametrisierte Breitenkreis α zum Breitenwinkel θ auf der durch die äussere Normale orientierten Standardsphäre S^2, gegeben durch

$$\alpha(t) = (\cos\theta\, \cos(\frac{t}{\cos\theta}), \cos\theta\, \sin(\frac{t}{\cos\theta}), \sin\theta),$$

erfüllt

$$k_g = \langle \frac{D\dot{\alpha}}{dt}, e_2 \rangle = \tan\theta.$$

Beachte, dass

$$e_2(t) = \alpha(t) \times \dot{\alpha}(t) = (-\sin\theta\,\cos(\frac{t}{\cos\theta}), -\sin\theta\,\sin(\frac{t}{\cos\theta}), \cos\theta)$$

sowie

$$\ddot{\alpha}(t) = \cos\theta^{-1}(-\cos(\frac{t}{\cos\theta}), -\sin(\frac{t}{\cos\theta}), 0).$$

Bemerkung 2.5.1 *α ist Geodäte genau dann, wenn $k_g = 0$.*

Beweis. *Mit der Identität $\langle \frac{D\dot{\alpha}}{dt}, \dot{\alpha} \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}|^2 = 0$ folgt*

$$\frac{D\dot{\alpha}}{dt} = \langle \frac{D\dot{\alpha}}{dt}, e_1 \rangle e_1 + \langle \frac{D\dot{\alpha}}{dt}, e_2 \rangle e_2 = k_g e_2.$$

□

Sei $V_0 = \exp_p(B_{r_0}(0))$ Normalumgebung eines Punktes $p \in S$, $A \subset V_0 \setminus \{p\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand ∂A, parametrisiert durch $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; S)$ mit $|\dot{\alpha}| = 1$, wobei α periodisch mit Periode $L = L(\partial A)$.

Seien (r, ϕ) geodätische Polarkoordinaten auf V_0, $0 < r < r_0$, und sei g die Metrik

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Definiere die Orthonormal-Basis

$$E_1(q) = \frac{\partial}{\partial r}\exp_p(re^{i\phi}),\ E_2(q) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}\exp_p(re^{i\phi})$$

für $q = \exp_p(re^{i\phi}) \in V_0 \setminus \{p\}$, und setze

$$N = E_1 \times E_2.$$

Sei $\alpha(t) = \exp_p(\gamma(t))$, wobei γ in Polarkoordinaten durch $\gamma(t) = (r(t), \phi(t))$ gegeben ist, und sei

$$e_1(t) = \dot{\alpha}(t),\ e_2(t) = N(\alpha(t)) \times e_1(t)$$

das begleitende 2-Bein sowie

$$k_g(t) = \langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle(t)$$

die geodätische Krümmung. Schliesslich wähle $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$e_1(t) = \cos\vartheta(t)E_1(\alpha(t)) + \sin\vartheta(t)E_2(\alpha(t)).$$

Durch $\vartheta(0)$ ist ϑ eindeutig bestimmt. Weiter erhalten wir

$$e_2(t) = \cos\vartheta(t)E_2(\alpha(t)) - \sin\vartheta(t)E_1(\alpha(t)).$$

Lemma 2.5.1 *Es gilt* $k_g(t) = \dot{\vartheta}(t) + \lambda_r(t)\dot{\phi}(t)$, *wobei* $\lambda_r(t) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\lambda\right)(\gamma(t))$.

Beweis. Mit den Identitäten

$$\langle \frac{DE_1}{dt}, E_1 \rangle = \langle \frac{DE_2}{dt}, E_2 \rangle = 0$$

und

$$\langle \frac{DE_2}{dt}, E_1 \rangle = -\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2 \rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} k_g &= \langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle = \dot{\vartheta} \langle -\sin\vartheta E_1 + \cos\vartheta E_2, e_2 \rangle \\ &\quad + \cos\vartheta \langle \frac{DE_1}{dt}, e_2 \rangle + \sin\vartheta \langle \frac{DE_2}{dt}, e_2 \rangle \\ &= \dot{\vartheta} + \cos^2\vartheta \langle \frac{DE_1}{dt}, E_2 \rangle - \sin^2\vartheta \langle \frac{DE_2}{dt}, E_1 \rangle \\ &= \dot{\vartheta} + \langle \frac{DE_1}{dt}, E_2 \rangle. \end{aligned}$$

Sei $\Psi = \exp_p \colon B_{r_0}(0) \subset T_pS \to S$. In geodätischen Polarkoordinaten erhalten wir

$$E_1(\alpha(t)) = d\Psi(\gamma(t))(1,0)$$

und damit $E_1 = \Psi_{x_1}$, $\lambda E_2 = \Psi_{x_2}$. Mit (2.2.1) folgt

$$\frac{DE_1(\alpha(t))}{dt} = \dot{\gamma}^j \Gamma^1_{1j} E_1 + \dot{\gamma}^j \Gamma^2_{1j} \cdot \lambda E_2;$$

das heisst,

$$\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2 \rangle = \lambda \dot{\gamma}^j \Gamma^2_{1j}.$$

Da weiter gemäss Satz 2.3.3 und (2.3.3) gilt $\Gamma^2_{11} = 0$, $\Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_r}{\lambda}$, folgt schliesslich

$$\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2 \rangle = \lambda_r \dot{\gamma}^2 = \lambda_r \dot{\phi}$$

und damit die Behauptung. □

Satz 2.5.1 *(Gauss-Bonnet; lokale Version) Sei* $A \subset V_0 \setminus \{p\}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit* C^∞*-Rand* ∂A*, parametrisiert nach Bogenlänge durch* $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; S)$ *und so orientiert, dass* $e_2(t)$ *in jedem Punkt* $\alpha(t)$ *nach* A *hinein weist. Dann gilt*

$$\int_A K\, dvol + \int_0^L k_g(t)\, dt = 2\pi,$$

wobei L *die Länge und* k_g *die geodätische Krümmung von* ∂A *bezeichnen.*

Bemerkung 2.5.2 *Für einfach geschlossene ebene Kurven* $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ *liefert Satz 2.5.1 erneut den Umlaufsatz 1.10.1. (Beachte, dass wir die Orientierung von* α *und damit das Vorzeichen der Umlaufzahl vorgeben.)*

Beweis von Satz 2.5.1. Nach Satz 2.3.4 gilt in geodätischen Polarkoordinaten auf V_0:

$$K = -\frac{\lambda_{rr}}{\lambda}, \ \sqrt{\det g} = \lambda.$$

Sei $A = \Psi(D)$, wobei $D \subset]0, r_0[\times S^1$. Mit Lemma 2.5.1 folgt

$$\begin{aligned}\int_A K\,dvol &= \int_D K\sqrt{\det g}\,dr\,d\phi = -\int_D \lambda_{rr}\,dr\,d\phi \\ &= -\int_{\partial D} \lambda_r\,d\phi = -\int_0^L \lambda_r\dot{\phi}\,dt = -\int_0^L k_g\,dt + \int_0^L \dot{\vartheta}\,dt.\end{aligned}$$

Mit dem Umlaufsatz analog Satz 1.10.1 erhalten wir andererseits

$$\int_0^L \dot{\vartheta}\,dt = \vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi$$

und damit die Behauptung. □

Unser Ziel im folgenden ist es, Satz 2.5.1 auf beliebige Gebiete $A \subset S$ zu verallgemeinern. Dazu zerlegen wir das Gebiet mittels einer geeigneten **Triangulierung** in einfach zusammenhängende Teilgebiete, welche durch geodätische Polarkoordinaten von einem Punkt aus überdeckt werden. Auf diese Weise werden wir jedoch gezwungen, auch Gebiete zu betrachten mit nur stückweise glattem Rand.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eingebettete Hyperfläche, orientiert durch N, $A \subset V_0 \setminus \{p\}$ ein einfach zusammenhängedes Gebiet auf S, enthalten in einer Normalumgebung $V_0 = \exp_p(B_{r_0}(0))$ eines Punktes $p \in S$.

Definition 2.5.2 *i) A hat* **stückweise glatten Rand** *∂A, falls ∂A eine stetige Parametrisierung $\alpha\colon \mathbb{R} \to S$ besitzt mit $\alpha(0) = \alpha(L)$ und so, dass für eine geeignete Zerlegung*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = L$$

gilt

$$\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^\infty([t_i, t_{i+1}]; S), \ |\dot{\alpha}_i| = 1,$$

und falls weiter $\alpha|_{[0,L[}$ injektiv.

ii) Die Punkte $\alpha(t_i)$, $0 \le i \le k$, heissen **Ecken**, *die Kurven $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ heissen* **reguläre Bögen** *von ∂A.*

iii) α ist (positiv) **orientiert**, *falls für das begleitende 2-Bein*

$$e_1(t) = \dot{\alpha}(t), e_2(t) = N(\alpha(t)) \times e_1(t)$$

der Vektor e_2 nach A hinein zeigt.

iv) Der (orientierte) **Aussenwinkel** *$\vartheta_i \in [-\pi, \pi]$ in einer Ecke $\alpha(t_i)$ ist der orientierte Winkel zwischen $\dot{\alpha}(t_i-)$ und $\dot{\alpha}(t_i+)$, wobei die Orientierung durch die Bedingung*

$$\langle \dot{\alpha}(t_i+) \times \dot{\alpha}(t_i-), N(\alpha(t_i))\rangle = \sin\vartheta_i$$

bestimmt ist.

Bemerkung 2.5.3 *In* **Spitzen**, *wo $|\vartheta_i| = \pi$, wird die Orientierung durch einen Grenzübergang festgelegt. Der Einfachheit halber sei im folgenden $|\vartheta_i| < \pi$.*

Durch Approximation von A durch glatt berandete Gebiete $A_l \subset A$ und Grenzübergang erhält man aus Satz 2.5.1 den

Satz 2.5.2 *Sei A einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand ∂A mit orientierter, stückweise glatter Parametrisierung α wie oben. Dann gilt*

$$\int_A K\, dvol + \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g\, dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i = 2\pi.$$

Beispiel 2.5.2 *i) Sei $A \subset S$ ein geodätisches Dreieck. Da $k_g = 0$ längs der regulären Bögen α_i, gilt für die* **Innenwinkel** *$\delta_i := \pi - \vartheta_i$ die Formel*

$$\sum_{i=0}^{2} \delta_i = 3\pi - \sum_{i=0}^{2} \vartheta_i = \pi + \int_A K\, dvol.$$

Der "Winkelexzess" im Vergleich zur Winkelsumme in einem ebenen Dreieck wird also durch den Term $\int_A K\, dvol$ gegeben.

2.6 Der Satz von Gauss-Bonnet im Grossen

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Hyperfläche mit Orientierung N, $R \subset S$ abgeschlossen mit stückweise glattem Rand ∂R, wobei ∂R endliche, disjunkte Vereinigung stückweise glatter Jordankurven $C_i = \alpha_i(\mathbb{R})$ ist, $1 \le i \le i_0$.

Definition 2.6.1 *i) Ein* **Dreieck** *ist ein einfach zusammenhängendes, kompaktes Gebiet auf S mit stückweise regulärem, zusammenhängendem Rand, bestehend aus 3 regulären Bögen mit Aussenwinkeln $\neq 0$.*

ii) Eine **Triangulierung** *von R ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Dreiecken $T_l \subset R$, $1 \le l \le L$ mit den Eigenschaften*

a) $\bigcup_{l=1}^{L} T_l = R$;

b) Gilt für ein Paar von Indices $l \neq m$, dass $T_l \cap T_m \neq \emptyset$, so besteht $T_l \cap T_m$ aus einer gemeinsamen Kante oder aus einer gemeinsamen Ecke von T_l und T_m.

iii) Zu einer Triangulierung $\mathcal{T}$ von R seien $F = L$ die Anzahl Flächen, K die Anzahl Kanten und E die Anzahl Ecken. Die Zahl

$$\chi = F - K + E$$

heisst dann **Euler-Poincaré-Charakteristik** *der Triangulierung $\mathcal{T}$.*

In den Vorlesungen über Topologie oder über Riemannsche Flächen werden die folgenden Sätze bewiesen.

Satz 2.6.1 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Hyperfläche, $R \subset S$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand wie oben. Dann gilt:*

i) R besitzt eine Triangulierung von $\mathcal{T}$;

ii) $\chi = \chi(R)$ ist unabhängig von $\mathcal{T}$.

Satz 2.6.2 *Für eine kompakte, zusammenhängende, reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit g "Henkeln" oder "Löchern" gilt*

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Falls für zwei derartige Flächen S_1, S_2 gilt $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, so sind S_1 und S_2 diffeomorph.

Bemerkung 2.6.1 *Kompakte, zusammenhängende, reguläre Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ sind also durch ihre Euler-Poincaré-Charakteristik bis auf Diffeomorphie bestimmt.*

Zur **Motivation** von Satz 2.6.1.ii) betrachte eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von R und ein Teildreieck $T \in \mathcal{T}$. Verfeinere $\mathcal{T}$ zu Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ durch Einfügen einer Ecke $q \in T$. Dann gilt

$$\tilde{F} = F + 2,\ \tilde{K} = K + 3,\ \tilde{E} = E + 1$$

und daher

$$\tilde{\chi} = \tilde{F} - \tilde{K} + \tilde{E} = \chi + (2 - 3 + 1) = \chi.$$

$\square$

Beispiel 2.6.1 *i) Sei $S = \mathbb{R}^2$, $R = B_1(0)$, $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_4\}$ die Zerlegung von R in die Durchschnitte von R mit den Quadranten. Es gilt*

$$F = 4,\ K = 8,\ E = 5;\ \textit{also}\ \chi(B_1(0)) = 1.$$

ii) Sei $S = R = S^2$. Stelle S^2 dar als Vereinigung der nördlichen und der südlichen Hemisphären S^2_+, S^2_- dar. Jede dieser Hemisphären ist offenbar homöomorph zu $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Triangulieren wir wie in Beispiel i), so folgt

$$F = 8,\ K = 12,\ E = 6;\ \textit{also}\ \chi(S^2) = 2.$$

Bemerkung 2.6.2 *Die Euler-Poincaré-Charakteristik ist additiv. Zerlege ein Gebiet $R \subset S$ durch eine geschlossene Kurve C, bestehend aus regulären Bögen einer Triangulierung $\mathcal{T}$ von R, in zwei Teilgebiete R_1 und R_2. Da auf C gleich viele Kanten wie Ecken von $\mathcal{T}$ liegen, erhalten wir $\chi(R_1) + \chi(R_2) = \chi(R)$.*

Beispiel 2.6.2 *i) Sei $S = \mathbb{R}^2$, $R = B_2 \setminus B_1(0)$. Dann gilt nach Beispiel 2.6.1.i) und Bemerkung 2.6.2 die Gleichung $\chi(R) = \chi(B_2(0)) - \chi(B_1(0)) = 0$, was man auch schnell direkt bestätigen kann.*

ii) Schneiden wir den Torus T^2 längs des Innenkreises auf, so erhalten wir eine zum Kreisring $B_2 \setminus B_1(0)$ homöomorphe Fläche, und wie in Bemerkung 2.6.2 folgt $\chi(T^2) = \chi(B_2(0) \setminus B_1(0)) = 0$.

Satz 2.6.3 *(Gauss-Bonnet). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Hyperfläche mit Orientierung N, $R \subset S$ abgeschlossen mit Rand ∂R, bestehend aus stückweise glatten, disjunkten, positiv orientierten Jordankurven $C_i = \alpha_i(\mathbb{R})$, $1 \le i \le i_0$, mit orientierten Aussenwinkeln $\vartheta_j, 1 \le j \le j_0$. Dann gilt*

$$\int_R K\, dvol + \sum_i \int_{C_i} k_g\, ds + \sum_j \vartheta_j = 2\pi\chi(R),$$

wobei s Bogenlänge längs der regulären Bögen von C_i bezeichnet.

Beweis. Sei $\mathcal{T} = \{T_l; 1 \le l \le L\}$ eine Triangulierung von R, wobei wir annehmen dürfen, dass jedes Dreieck T_l in einer Normalumgebung $V_0 \setminus \{p\}$ eines Punktes $p \in S$ enthalten ist und dass ∂T_l positiv orientiert ist. Gemeinsame Kanten von T_l und T_m für $l \neq m$ werden also entgegengesetzt durchlaufen.

Seien ϑ_{lk}, $1 \le k \le 3$, die orientierten Aussenwinkel von T_l. Mit Satz 2.5.2 folgt

$$\int_{T_l} K\, dvol + \int_{\partial T_l} k_g\, ds + \sum_{k=1}^{3} \vartheta_{lk} = 2\pi,\ 1 \le l \le L.$$

Für die Innenwinkel $\delta_{lk} = \pi - \vartheta_{lk}$ von T_l erhalten wir somit für jedes l die Identität

$$\int_{T_l} K\, dvol + \int_{\partial T_l} k_g\, ds = \sum_{k=1}^{3} \delta_{lk} - \pi,$$

und Summieren über l liefert

$$\int_R K\, dvol + \sum_i \int_{C_i} k_g\, ds = \sum_{k,l} \delta_{lk} - \pi F.$$

Seien

$$\begin{aligned} E_a &:= \#\ \text{äussere Ecken} \\ E_i &:= \#\ \text{innere Ecken} \\ K_a &:= \#\ \text{äussere Kanten} \\ K_i &:= \#\ \text{innere Kanten von } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Da jede Randkomponente C_i geschlossen ist, folgt

$$K_a = E_a$$

Da jedes Dreieck von 3 Kanten berandet wird, wobei innere Kanten jeweils zu zwei Dreiecken gehören, gilt weiter

$$3F = 2K_i + K_a.$$

Schliesslich ergibt in einem **inneren** Eckpunkt die Summe der anstossenden Innenwinkel den Wert 2π, in einem **äusseren** Eckpunkt dagegen $\pi - \vartheta_j$; das heisst, wir erhalten

$$\sum_{k,l} \delta_{lk} = 2\pi E_i + \pi E_a - \sum_j \vartheta_j.$$

Nach Definition eines Dreiecks müssen alle Eckpunkte der Randkurven C_i auch Eckpunkte einer Dreiecks $T_l \in \mathcal{T}$ sein. In allen übrigen Eckpunkten auf ∂R ist der Aussenwinkel $\vartheta = 0$.

Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} \delta_{lk} + \sum_j \vartheta_j - \pi F &= 2\pi E - \pi(E_a + F) \\ &= 2\pi(E + F - K) - \pi(E_a + 3F - 2K) \\ &= 2\pi\chi(R) - \pi(E_a - K_a) = 2\pi\chi(R),\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Korollar 2.6.1 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ kompakte, reguläre Hyperfläche. Dann gilt*

$$\int_S K\, dvol = 2\pi\chi(S).$$

Bemerkung 2.6.3 *Analog zum Umlaufsatz 1.11.1 für Kurven erhalten wir somit eine fundamentale Beziehung zwischen der Geometrie und der Topologie von Flächen.*

Satz 2.6.3 eröffnet eine Vielzahl von Anwendungen. Unter Benutzung von Satz 2.6.2 erhalten wir beispielsweise

Satz 2.6.4 *Sei S kompakte, reguläre Hyperfläche mit $K > 0$. Dann ist S diffeomorph zu S^2.*

Beweis. Korollar 2.6.1 und die Annahme $K > 0$ ergeben $\chi(S) > 0$, also ist S diffeomorph zu S^2 gemäss Satz 2.6.2. □

Satz 2.6.5 *(Hadamard) Sei S vollständige, zusammenhängende, einfach zusammenhängende reguläre Hyperfläche mit $K \leq 0$, und sei $p \in S$. Dann ist $\exp_p : T_pS \to S$ ein globaler Diffeomorphismus; insbesondere ist S diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Da S vollständig ist, folgt mit Satz 1.6.3, dass $\exp_p$ auf dem ganzen Raum T_pS definiert ist. Der Satz von Hopf-Rinow ergibt zudem, dass $\exp_p$ surjektiv ist. (Je zwei Punkte $p, q \in S$ lassen sich durch eine (kürzeste) Geodätische verbinden.) Zudem folgt aus der Bedingung $K \leq 0$, dass exp_p ein lokaler Diffeomorphismus ist. Diese Tatsachen beweist man z. B. in der Vorlesung *Differentialgeometrie II.* Uns genügt hier, die folgende Aussage zu beweisen.

Behauptung: $\exp_p$ ist injektiv.

Beweis. Seien α_1, α_2 Geodäten von p nach q. Wir dürfen annehmen, dass $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{p, q\}$); sonst wählen wir die vor dem ersten Schnittpunkt liegenden Teilbögen. Es sei R das von der geschlossenen Kurve $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ auf der einfach zusammenhängenden Fläche S berandete und daher ebenfalls einfach zusammenhängende Gebiet. Satz 2.6.3 liefert

$$\int_R K\, dvol + \int_\alpha k_g\, ds + \sum_{i=1}^2 \theta_i = 2\pi\chi(R) = 2\pi.$$

Da andererseits $K \leq 0$, $k_g = 0$, folgt $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, also $\alpha_1 = \alpha_2$, wie gewünscht.

□

2.7 Parallelverschiebung und Krümmung

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eingebettete, orientierte, reguläre Hyperfläche, $V_0 = \exp_p(B_{r_0}(0))$ Normalumgebung eines Punktes $p \in S$, $A \subset V_0 \setminus \{p\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit orientiertem, stückweise glattem Rand $\partial A = \alpha(\mathbb{R})$, wobei $|\dot{\alpha}| = 1$, $\alpha(t+L) = \alpha(t)$, $L = L(\partial A)$.

Weiter sei X ein stückweise glattes Vektorfeld längs α, und sei X parallel längs der regulären Bögen von α. Wegen Satz 2.2.1 dürfen wir annehmen, dass $|X(t)| \equiv 1$.

Definiere die Orthonormal-Basis

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial r} \exp_p(re^{i\phi}),\ E_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} \exp_p(re^{i\phi})$$

auf A, wobei

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Schreibe

$$X(t) = \cos \vartheta(t) E_1 + \sin \vartheta(t) E_2,\ t \in \mathbb{R},$$

mit einer stetigen, stückweise glatten Funktion $\vartheta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz 2.7.1 *Es gilt*

$$\vartheta(L) = \vartheta(0) + \int_A K\, dvol.$$

Beispiel 2.7.1 *Sei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; S^2)$ ein einfach geschlossener Weg, welcher S^2 in zwei Teile gleichen Volumens zerlegt*

$$S^2 \setminus \alpha(\mathbb{R}) = A \cup B,\ \mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B) = 2\pi.$$

Dann sind parallele Vektorfelder X längs α periodisch mit Periode $L = L(\alpha)$.

Beweis von Satz 2.7.1. Zur Vereinfachung setzen wir α als glatt voraus; damit gilt auch $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es sei

$$e_1(t) = \dot{\alpha}(t),\ e_2(t) = N(\alpha(t)) \times e_1(t)$$

das begleitende 2-Bein analog Abschnitt 2.5. Schreibe

$$X(t) = \cos \mu(t) e_1(t) + \sin \mu(t) e_2(t)$$

mit $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Da X parallel ist, erhalten wir die Gleichungen

$$0 = \langle \frac{DX}{dt}, e_2 \rangle = \cos \mu(t) \left(\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle + \dot{\mu} \right)$$

sowie

$$0 = \langle \frac{DX}{dt}, e_1 \rangle = -\sin \mu(t) \left(\dot{\mu} - \langle \frac{De_2}{dt}, e_1 \rangle \right).$$

Mit der Identität

$$k_g = \langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle = -\langle \frac{De_2}{dt}, e_1 \rangle$$

folgt

$$\dot{\mu} = -k_g,$$

und Satz 2.6.3 ergibt

$$\mu(L) - \mu(0) = -\int_{\partial A} k_g \, ds = \int_A K \, dvol - 2\pi.$$

Andererseits unterscheiden sich $(\vartheta(L) - \vartheta(0))$ und $(\mu(L) - \mu(0))$ um den Drehwinkel des Vektors $e_1(t) = \dot{\alpha}(t)$ bezüglich E_1, E_2. Nach dem Umlaufsatz, Satz 1.10.1, hat dieser den Wert 2π, so dass

$$\mu(L) - \mu(0) = (\vartheta(L) - \vartheta(0)) - 2\pi,$$

Es folgt

$$\vartheta(L) - \vartheta(0) = \int_A K \, dvol,$$

wie gewünscht. □