Unsere Hauptbeispiele

Wellengleichung

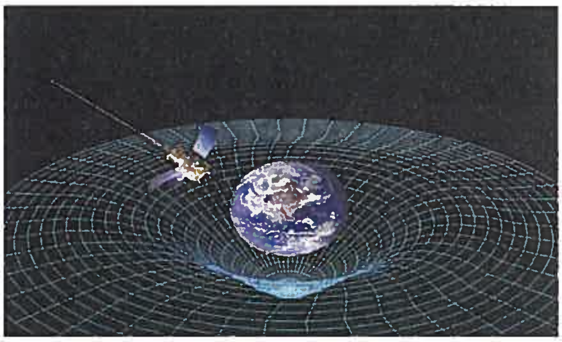
$$\boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}}$$

Wärmeleitungsgl.

$$\boxed{u_t = c^2\, u_{xx}}$$

Potentialgleich.

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$



sind homogene lineare PDEs zweiter Ordnung

Andere Beispiele von PDEs

Korteweg-de-Vries-Gleichung

für Wellen in Kanälen

$$\boxed{u_t + 6\,u\,u_x + u_{xxx} = 0}$$

Schrödinger-Gleichung

für den quantenmechanischen Zustand eines Systems

$$\boxed{ih\,u_t = -h^2/2m\;u_{xx} + V\,u}$$

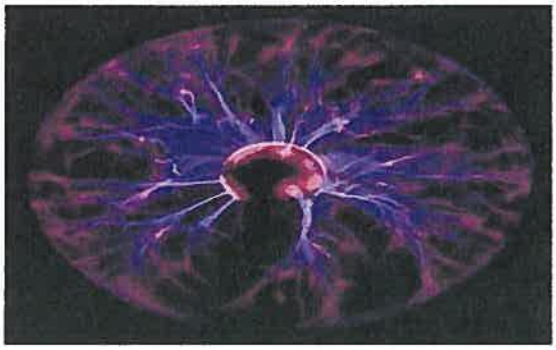
hier u(x,t) ist eine komplexe Funktion

Maxwell-Gleichungen

für Phänomene des Elektromagnetismus

Navier-Stokes-Gleichungen

für die Strömung von Flüssigkeiten



Bsp 1 Wärmeleitung in einem Stab

$u(x,t)$ = Temperatur des Stabpunktes mit Koordinate x und zur Zeit t

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

PDE

Diese partielle Differentialgleichung ist die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.

$$u(0,t)=u(L,t)=0$$

für alle t

BC

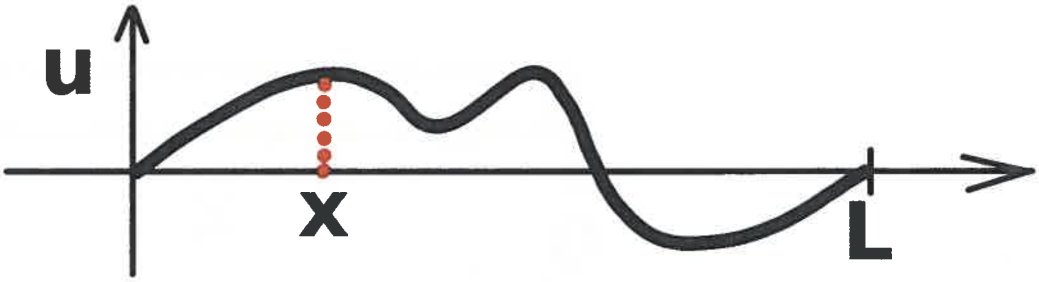
Diese Randbedingungen bedeuten, dass die Temperatur an den zwei Enden konstant (gleich Null) bleibt.

$$u(x,0)=f(x)$$

IC

Die Anfangsbedingung zeigt die Anfangstemperaturverteilung.

Bsp 2 Schwingungen einer Saite



u(x,t) = Auslenkung des Saitepunktes mit Koordinate x und zur Zeit t

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

PDE

Diese partielle Differentialgleichung ist die 1-dimensionale Wellengleichung.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

für alle t

BC

Diese Randbedingungen bedeuten, dass die zwei Enden festgemacht sind.

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = v_0(x)$$

IC

Diese Anfangsbedingungen zeigen die Anfangsform und -geschwindigkeit.

Lineare homogene PDEs 2. Ordnung mit 2 Variablen (x,t)

$$\boxed{A u_{xx} + 2B u_{xt} + C u_{tt} + D u_x + E u_t + F u = 0} \quad *$$

wobei A, B, C, D, E, F Funktionen von x und t sind

* heisst elliptisch, falls $AC-B^2>0$

* heisst hyperbolisch, falls $AC-B^2<0$

* heisst parabolisch, falls $AC-B^2=0$

Unsere Hauptbeispiele stellen die 3 Typen von homogenen linearen PDEs zweiter Ordnung dar.

Die Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

ist eine hyperbolische PDE.

Die Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

ist eine parabolische PDE.

Die Potentialgleichung

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

ist eine elliptische PDE.

Das Superpositionsprinzip

Seien u_0 , u_1 , u_2 , ...
gegebene Lösungen einer
homogenen linearen PDE
und deren
homogenen linearen
Nebenbedingungen.

Dann ist die Reihe

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \, u_i \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

auch eine Lösung
sofern sie konvergiert.

Hauptlösungsstrategie

1. **Finde einen grossen Vorrat an Lösungen des homogenen Teils der Aufgabe: die sogenannten BASISLÖSUNGEN.**

2. **Durch geeignete Superposition der Basislösungen versuche noch die inhomogenen Nebenbedingungen zu erfüllen.**

Hauptstrategie, um Basislösungen zu bestimmen:

TRENNUNG DER VARIABLEN

Zur Erinnerung: Mathematik I

$$\boxed{X'' - k\,X = 0}$$

Lösungen einer linearen ODE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Falls $\underline{k = w^2 > 0}$:

$$X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$$

Falls $\underline{k = 0}$:

$$X(x) = Ax + B$$

Falls $\underline{k = -p^2 < 0}$:

$$X(x) = A\cos px + B\sin px$$

Das Problem

$$\boxed{\begin{aligned} X'' - k\,X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(L) &= 0 \end{aligned}}$$

hat die folgenden Lösungen

Falls $\underline{k = w^2 > 0}$: $X(x) = 0$

Falls $\underline{k = 0}$: $X(x) = 0$

Falls $\underline{k = -p^2 < 0}$:

<u>interessant</u> wenn $pL = n\pi$ $(n=1,2,\ldots)$

$$k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$X(x) = B \sin\frac{n\pi x}{L}$$

(B beliebig reell und n = 1,2,3,...)