Trennung der Variablen

Schritt 1

Berücksichtige nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

(ähnlich für weitere Variablen).

Eine homogene lineare PDE zerfällt dann in ein System von <u>ODEs</u> für die Funktionen $X(x)$ und $T(t)$.

Schritt 2

Bestimme alle Lösungen X(x) und T(t) der früheren ODEs, deren Produkt X(x)T(t) die homogenen Nebenbedingungen erfüllt - die sogenannten

Basislösungen

$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t),\ n=1,2,3,\ldots$

Schritt 3

Durch geeignete Superposition der Basislösungen versuche die inhomogenen Nebenbedingungen zu erfüllen. → Fourier-Reihen

Lösung des 1. Beispiels

Schritt 1

Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

erfüllen die Wärmeleitungsgl. genau wenn

$$\boxed{X'' - kX = 0}$$

und

$$\boxed{T' - kc^2T = 0}$$

wobei k eine beliebige reelle Konstante ist.

Schritt 2

Die Basislösungen der 1-dim Wärmeleitungsgleichung und der Randbedingungen (BC)

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t

sind

$$\boxed{u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)}$$

wobei

$$\boxed{\begin{gathered} X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \\ \text{und} \\ T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \end{gathered}}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nach dem Superpositionsprinz ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, u\,(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgl. und der BC sofern sie konvergiert.

Schritt 3

Wähle die Koeffizienten B_n so, dass die Reihe auch die Anfangsbedingung erfüllt.

$\longrightarrow$ Fourier-Reihen

Wir möchten willkürliche Funktionen in Form von trigonometrische Funktionen darstellen / approximieren.