Trennung der Variablen

Schritt 1

Berücksichtige nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

(ähnlich für weitere Variablen).

Eine homogene lineare PDE zerfällt dann in ein System von ODEs für die Funktionen $X(x)$ und $T(t)$.

Schritt 2

Bestimme alle Lösungen $X(x)$ und $T(t)$ der früheren ODEs, deren Produkt $X(x)T(t)$ die homogenen Nebenbedingungen erfüllt – die sogenannten

Basislösungen

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Schritt 3

Durch geeignete Superposition der Basislösungen versuche die inhomogenen Nebenbedingungen zu erfüllen. $\rightarrow$ Fourier-Reihen

Lösung des 1. Beispiels

Schritt 1

Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

erfüllen die Wärmeleitungsgl. genau wenn

$$\boxed{X'' - kX = 0}$$

und

$$\boxed{T' - kc^2T = 0}$$

wobei k eine beliebige reelle Konstante ist.

Schritt 2

Die Basislösungen der 1-dim Wärmeleitungsgleichung und der Randbedingungen (BC) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t sind

$$\boxed{u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)}$$

wobei

$$\boxed{\begin{array}{c} X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi x}{L} \\ \text{und} \\ T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \end{array}}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nach dem Superpositionsprinz ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, u\,(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgl. und der BC sofern sie konvergiert.

Schritt 3

Wähle die Koeffizienten B_n so, dass die Reihe auch die Anfangsbedingung erfüllt.

$\longrightarrow$ Fourier-Reihen

Wir möchten willkürliche Funktionen in Form von trigonometrische Funktionen darstellen / approximieren.