Fourier-Reihen

1768-1830

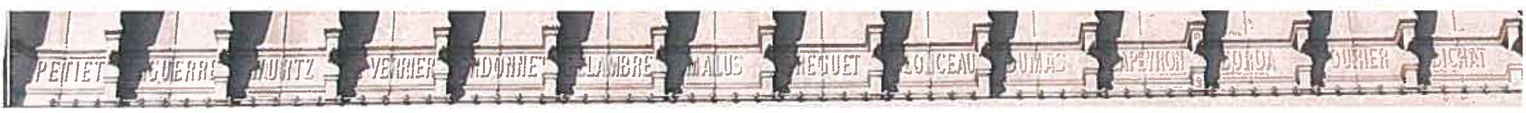
Jean Baptiste Joseph **Fourier**

französischer Mathematiker und Physiker, war der Sohn eines Schneiders und wurde im Alter von 10 Jahren zum Vollwaisen

1822 behauptete Fourier in seinem Werk Théorie Analytique de la Chaleur, dass es für alle Funktionen eine "Fourier-Reihen-Entwicklung" gäbe.

nicht wirklich

Fourier ist namentlich auf dem Eiffelturm verewigt.

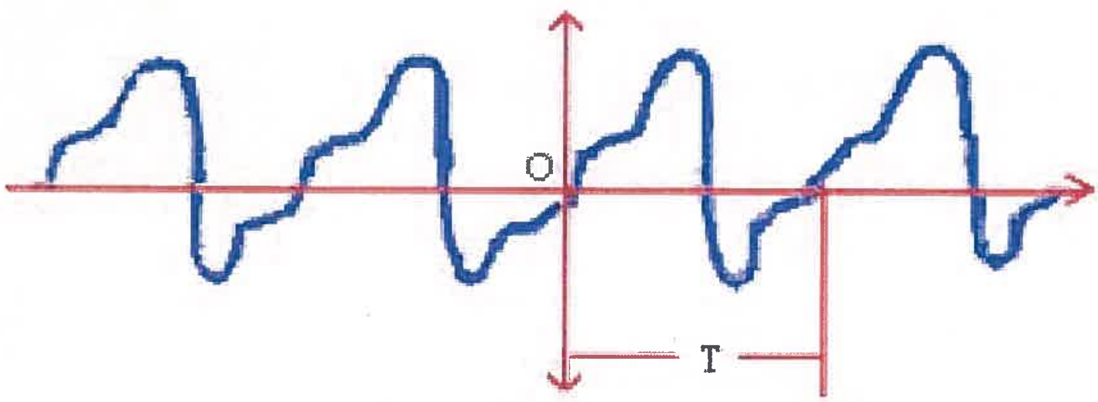


Sei $f(x)$ entweder eine periodische Funktion

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{für alle } x \text{ reell}$$

T ist eine feste positive Zahl
und heisst die Periode von f

oder eine Funktion die nur auf einem begrenzten Intervall $[a,b]$ betrachtet wird und ausserhalb von $[a,b]$ als periodische Funktion (mit der Periode $T=b-a$) erweitert wird.



Eine periodische Funktion f(x) mit der Periode T besitzt die Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)}$$

wobei

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} \, dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} \, dx \end{aligned}}$$

Man kann auch eine komplexe Fourier-Reihe mittels der Eulerschen Formel schreiben - siehe Serie 3.

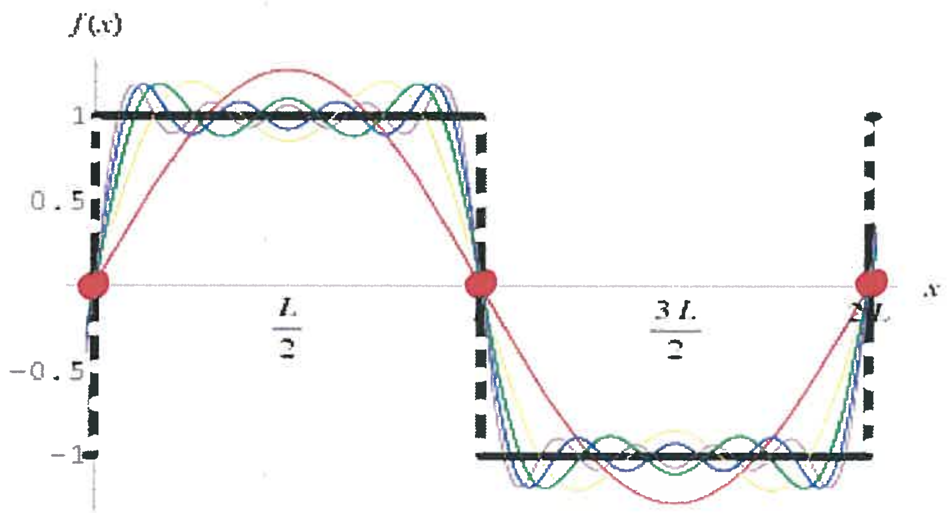
$$\boxed{e^{iu} = \cos u + i \sin u}$$

Satz

Die Fourier-Reihe einer periodischen stückweise stetig differenzierbare Funktion f konvergiert

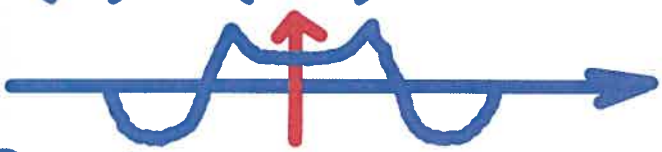
- in allen Stetigkeitspunkten x gegen f(x) und
- in den Sprungstellen x gegen das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte:

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$$



Gerade und ungerade Funktionen

$f(x)=f(-x)$



Prototyp:

$f(x) = \cos x$

$f(x)=-f(-x)$

Prototyp:

$f(x) = \sin x$

Produkte zweier Funktionen:

(gerade Fkt)(gerade Fkt) ist gerade

(ungerade)(ungerade) ist gerade

(gerade)(ungerade) ist ungerade

Integration (un)gerader Fkt:

$$\int_{-L}^{L} (\text{gerade Fkt})\, dx = 2 \int_{0}^{L} (\text{gerade Fkt})\, dx$$

$$\int_{-L}^{L} (\text{ungerade Fkt})\, dx = 0$$

Sei f(x) für x in [-L,L] definiert.

Ist f gerade, so sind alle $b_n=0$.

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion ist

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{T}}$$

eine Cosinus-Reihe

wobei $$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx$$

Ist f ungerade, so sind alle $a_n=0$.

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Fkt ist

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{T}}$$

eine Sinus-Reihe

wobei $$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx$$