Die Idee der Fourier-Transformation

Jeder T-periodischen Funktion f(x) oder jeder Funktion f(x), die nur auf einem Intervall der Länge T betrachtet wird, gehört eine

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)}$$

Komplexe Schreibweise

$$f(x) \sim \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{\frac{2n\pi i x}{T}}}$$

So kann jede solche Funktion als Superposition von Funktionen der Form

$$\boxed{e^{i\lambda x}}$$

dargestellt werden, wobei

$$\lambda = \ldots -\underbrace{\frac{2\pi}{T}, 0}, \underbrace{0, \frac{2\pi}{T}}, \underbrace{\frac{2\pi}{T}, \frac{4\pi}{T}}, \ldots$$

Der Abstand zwischen zwei benachbarten Werten von λ ist $\frac{2\pi}{T}$.

Die Koeffizienten der (komplexen) Fourier-Reihe sind

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{-\frac{2n\pi i y}{T}}\, dy}$$

Schreibe

$$c_n = \frac{2\pi}{T}\hat{f}_T\left(\frac{2n\pi}{T}\right)$$

Jetzt betrachte Funktionen auf der ganzen reellen Achse als "T-periodische Funktionen mit unendlich grossem T". Deshalb strebt der Abstand $\frac{2\pi}{T}$ gegen 0 und wird die Summe der Fourier-Reihe zu einem Integral

$$\boxed{f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda}$$

wobei

$$\boxed{\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy.}$$

Fourier-Transformation

Sei $f(x)$ eine stückweise glatte integrierbare Funktion.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

Def Die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x)$ ist die Funktion

$$\boxed{\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy.}$$

Die Fourier-Transformierte einer solche Funktion f(x) ist wohldefiniert, und in allen Stetigkeitspunkten von f gilt

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda .}$$

In allen Unstetigkeitspunkten von f gilt

$$\boxed{\underbrace{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}}_{\text{aritmetische Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte}} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda .}$$

Rechenregeln für die Fourier-Transformation

- **Linearität:**

$$\widehat{(af+bg)}(\lambda) = a\hat{f}(\lambda) + b\hat{g}(\lambda)$$

wobei a und b Zahlen sind.

- **Differentiationsregel:**

$$\boxed{\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\,\hat{f}(\lambda)}$$

(folgt aus der partiellen Integration)

- Ist $F(x)=f(a(x-d))$,
  so gilt
  $$\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{a} e^{-i\lambda d} \hat{f}(\lambda).$$

- Ist $F(x)= e^{ixd} f(x)$,
  so gilt
  $$\hat{F}(\lambda) = \hat{f}(\lambda - d).$$

- $$\boxed{\hat{\hat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)}$$

- Ist $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$

stückweise glatt und integrierbar, so gilt

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\,\hat{f}(\lambda).$$

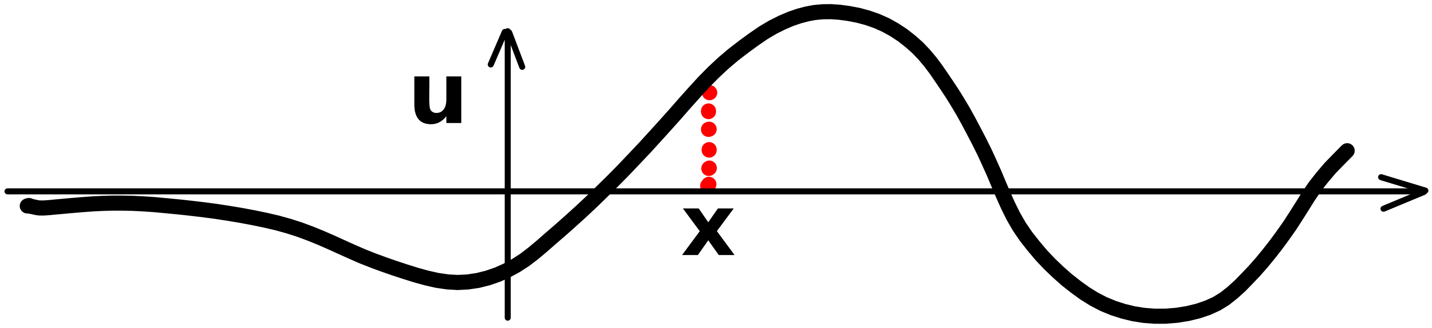
- Ist $F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy}_{(f*g)(x)}$

die sogenannte Faltung der Funktionen f und g

so gilt $\hat{F}(\lambda) = 2\pi\,\hat{f}(\lambda)\,\hat{g}(\lambda)$.

- Ist $F(x) = f(x)g(x)$, so gilt $\hat{F}(\lambda) = (\hat{f} * \hat{g})(\lambda)$.

Bsp 2'' Unendliche Wellen



u(x,t) = Auslenkung des Saitepunktes mit Koordinate x und zur Zeit t

$$\boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}}$$

PDE

Diese partielle Differentialgleichung ist die 1-dimensionale Wellengleichung.

Keine Randbedingungen!

$$u(x,0)=u_0(x)$$
$$u_t(x,0)=v_0(x)$$

IC

Diese Anfangsbedingungen zeigen die Anfangsform und -geschwindigkeit.

Wir lösen dieses System mit Hilfe der Fourier-Transformation

Schritt 1: Separationsansatz

Berücksichtige nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t).}$$

Die PDE wird dann

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k$$

und zerfällt in ein System von ODEs für $X(x)$ und $T(t)$:

$$X''-kX=0 \quad \text{und} \quad T''-kc^2T=0$$

Schritt 2: Basislösungen

Um beschränkte Lösungen zu bekommen, muss k negativ sein. Schreibe $-k = \lambda^2$.

Die (komplexe) Lösungen der Gleichung $X'' + \lambda^2 X = 0$ sind lineare Kombinationen von

$$e^{i\lambda x} \text{ und } e^{-i\lambda x}.$$

Die (komplexe) Lösungen der Gleichung $T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$ sind lineare Kombinationen von

$$e^{i\lambda ct} \text{ und } e^{-i\lambda ct}.$$

Als <u>Basislösungen</u> wähle

$$u_\lambda(x,t) = C_\lambda e^{i\lambda(x-ct)} + D_\lambda e^{i\lambda(x+ct)}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

(die andere zwei Produkten $e^{-i\lambda(x-ct)}$ und $e^{-i\lambda(x+ct)}$ gehen durch Spiegelung $\lambda \mapsto -\lambda$ aus die öbigen).

Eine beliebige <u>Superposition</u> der u_λ ist jetzt keine unendliche Reihe, sondern ein Integral:

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{C(\lambda) e^{i\lambda(x-ct)} + D(\lambda) e^{i\lambda(x+ct)}}_{} \Big) d\lambda}$$

Schritt 3: Bestimme die Koeffizienten $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ so, dass $u(x,t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt.

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{C(\lambda) + D(\lambda)}\right) e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= u_0(x)$$

$$u_t(x,0) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\;\dots\;}\right)\Big|_{t=0} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{i\lambda c\left(-C(\lambda) + D(\lambda)\right)} e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= v_0(x)$$

Vergleiche mit den Formeln für die Fourier-Transformierten $\hat{u}_0(\lambda)$ und $\hat{v}_0(\lambda)$ der Funktionen $u_0(x)$ und $v_0(x)$. Es folgt, dass

$$\begin{cases} \underbrace{C(\lambda) + D(\lambda)} = \hat{u}_0(\lambda) \\ \underbrace{i\lambda c\big(-C(\lambda) + D(\lambda)\big)} = \hat{v}_0(\lambda) \end{cases}$$

Die Lösung dieses linearen Systems ist

$$\begin{cases} C(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\lambda) - \frac{1}{i\lambda c}\hat{v}_0(\lambda)\right) \\ D(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\lambda) + \frac{1}{i\lambda c}\hat{v}_0(\lambda)\right) \end{cases}$$

Siehe Hüngerbühlers Seite 66 für eine netter Formel der Problemslösung $u(x,t)$.