Autonome dynamische Systeme in der Ebene

$x(t), y(t)$ zwei unbekannte Funktionen von t

Autonome: Zeit kommt nicht explizit vor

dynamische Systeme: Modell eines zeitabhängigen Prozesses

kontinuierliche Systeme:

(Mathematik III)

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}}$$

diskrete Systeme:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t),y(t)) \\ y(t+1) = g(x(t),y(t)) \end{cases}$$

f und g sind vorgegebene Funktionen

Bahnkurven

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}} \quad *$$

Eine Bahnkurve des Systems ist eine Kurve $(x(t), y(t))$ wobei $(x(t), y(t))$ eine Lösung von $*$ in einem Intervall $t \in (a,b)$ ist.

Eine Bahnkurve $(x(t), y(t))$ heisst geschlossen, falls $(x(t), y(t))$ periodisch ist.

Die Steigung einer Bahnkurve ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} .$$

Gleichgewichtspunkte

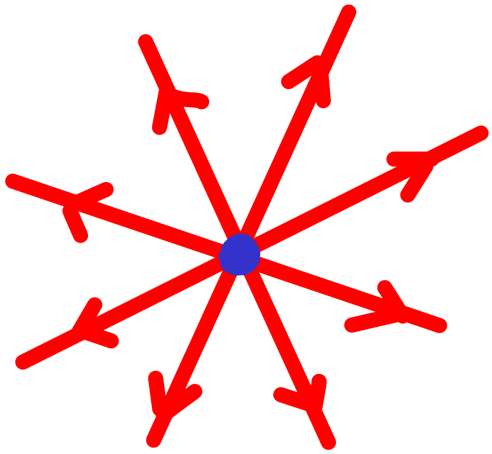
Ein Gleichgewichtspunkt oder Fixpunkt ist ein Punkt (x_0, y_0) wo $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

Ein Fixpunkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ heisst stabil, wenn alle Lösungen $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ des Systems zu Anfangswerten $\underbrace{\text{in der Nähe von } \vec{x}_0}_{|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta}$ in der Zukunft auch $\underbrace{\text{in der Nähe von } \vec{x}_0}_{|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| < \varepsilon \text{ für alle } t > 0}$ bleiben.

Ein stabiler Fixpunkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ heisst asymptotisch stabil, wenn für alle Lösungen $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ des Systems zu Anfangswerten in der Nähe von $\vec{x}_0$

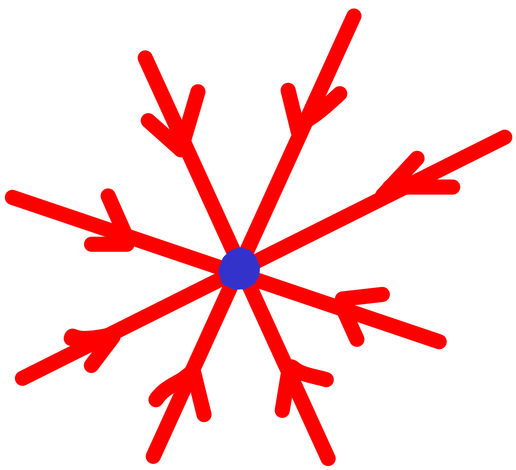
$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_0 \; .$$

Ein nicht stabiler Fixpunkt heisst instabil.



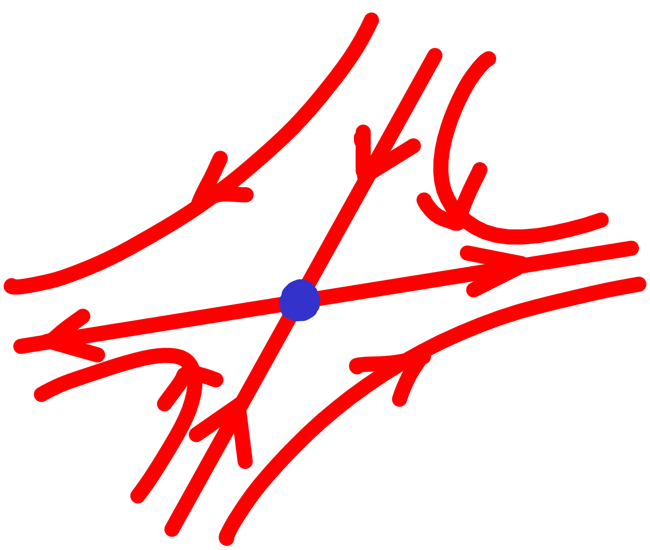
Quelle

ist instabil



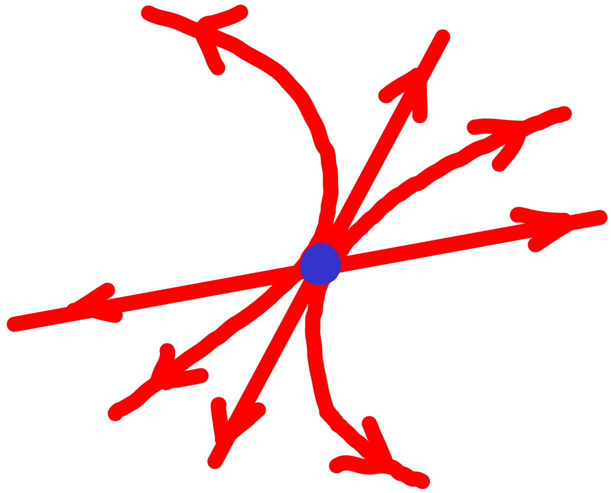
Senke

ist stabil

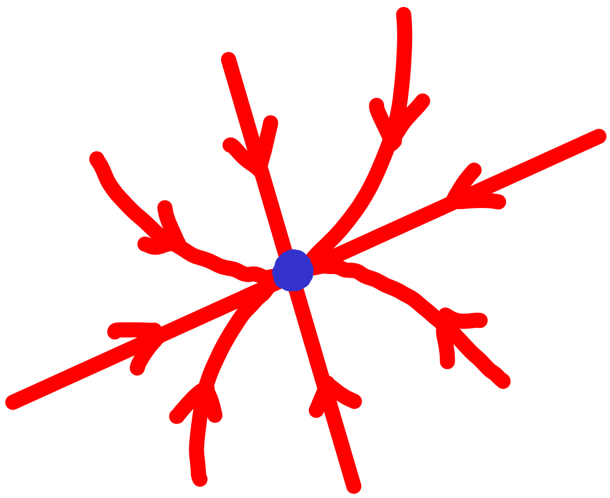


Sattel

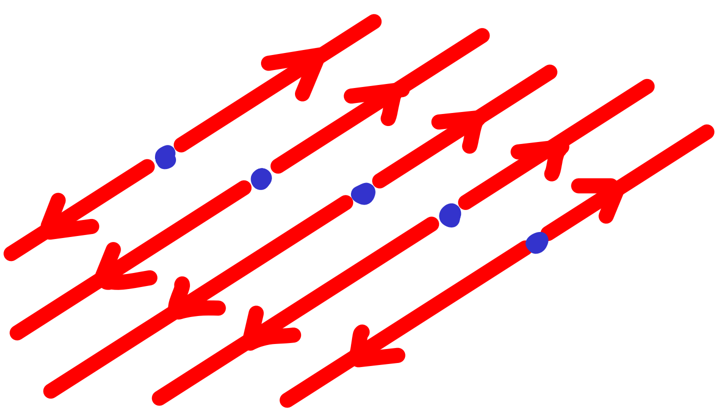
ist instabil



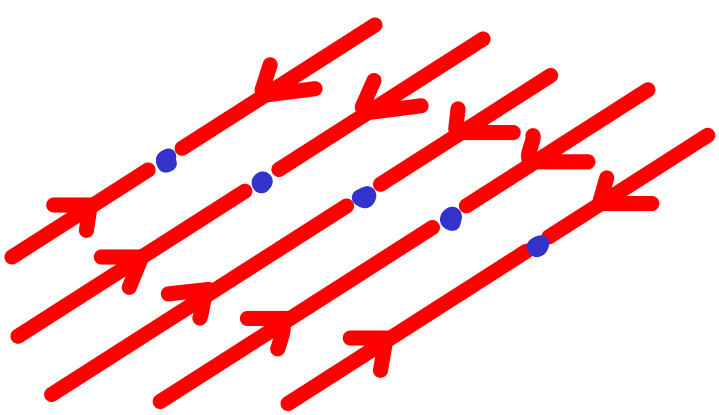
instabiler Knoten



stabiler Knoten
ist sogar
asymptotisch stabil

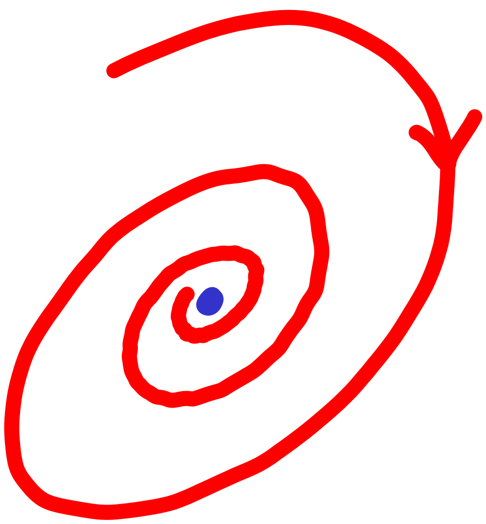


Linienquellen
sind instabil



Liniensenken
sind stabil aber
nicht asymp. stabil

instabiler
Strudel



stabiler
Strudel

ist sogar
asymptotisch stabil

Wirbel

ist stabil aber
nicht asymptotisch stabil

Linearisierung

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}} \quad *$$

Sei $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ ein Fixpunkt des Systems $*$.

Die Linearisierungs-Matrix in $\vec{x}_0$ ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Die Linearisierung des Systems * um den Fixpunkt $\vec{x}_0$ ist das lineare System

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}.} \qquad **$$

Falls die Eigenwerte der Linearisierungs-Matrix A nicht verschwinden, kann die Stabilitätanalyse von * auf die Stabilitätanalyse des linearisierten Systems ** geschlossen werden.

Zur Erinnerung (Mathematik I):

2x2 Systeme linearer homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$** \quad \boxed{\begin{cases} \dot{x} = a\,x + b\,y \\ \dot{y} = c\,x + d\,y \end{cases}}$$

a,b,c,d sind reelle Konstanten

Matrix-Shreibweise: $\boxed{\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}} \quad **$

wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Es gibt drei Fälle für die Matrix A:

1 diagonalisierbar mit reellen Eigenwerte;

2 diagonalisierbar mit konjugiert komplexen Eigenwerte;

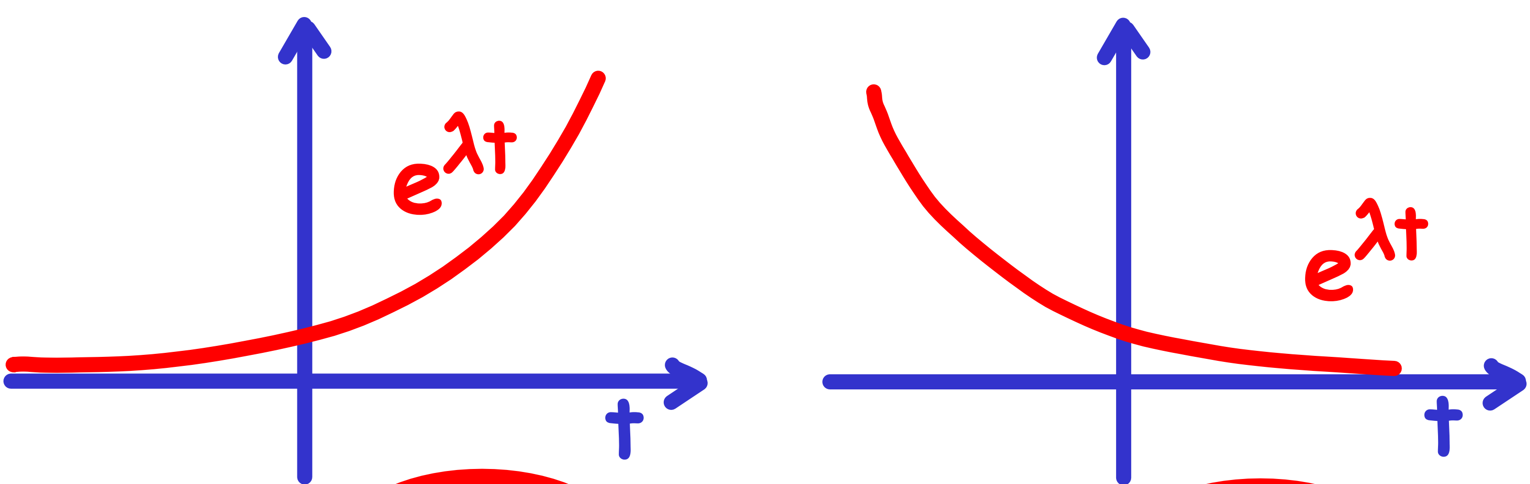
3 nicht diagonalisierbar.

1 Falls A zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ zu reellen Eigenwerte λ_1, λ_2 besitzt, dann ist die allgemeine Lösung von ★

$$\vec{x} = c_1 \, e^{\lambda_1 t} \, \vec{v}_1 + c_2 \, e^{\lambda_2 t} \, \vec{v}_2$$

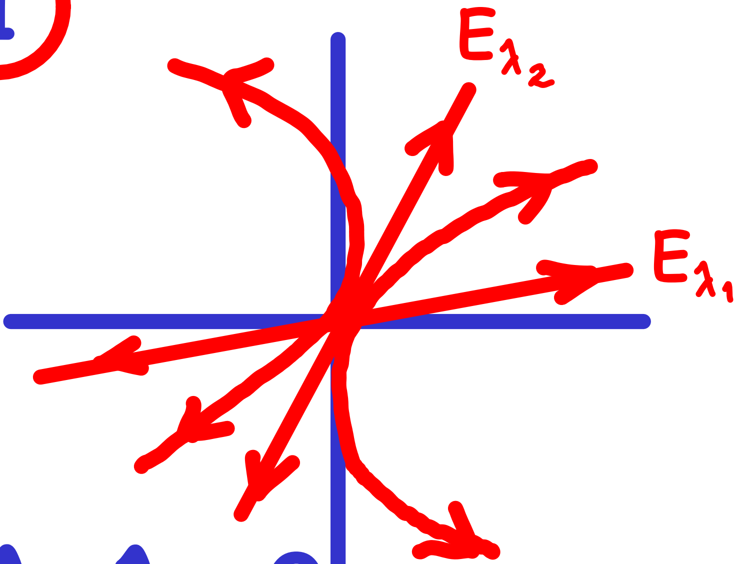
wobei c_1 und c_2 beliebige reelle Konstanten sind.

Zur Erinnerung:

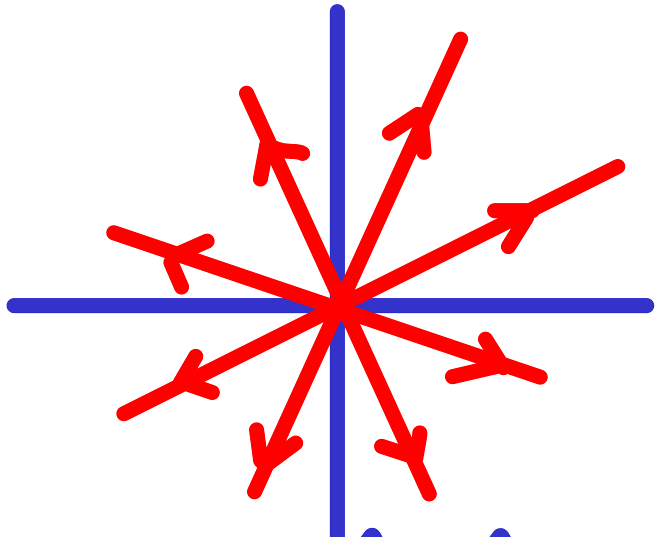


$\lambda > 0$ $\lambda < 0$

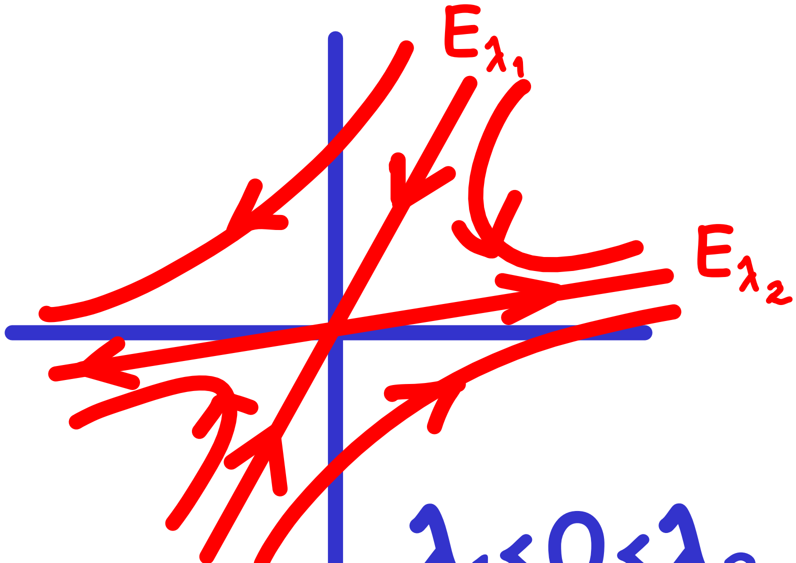
1



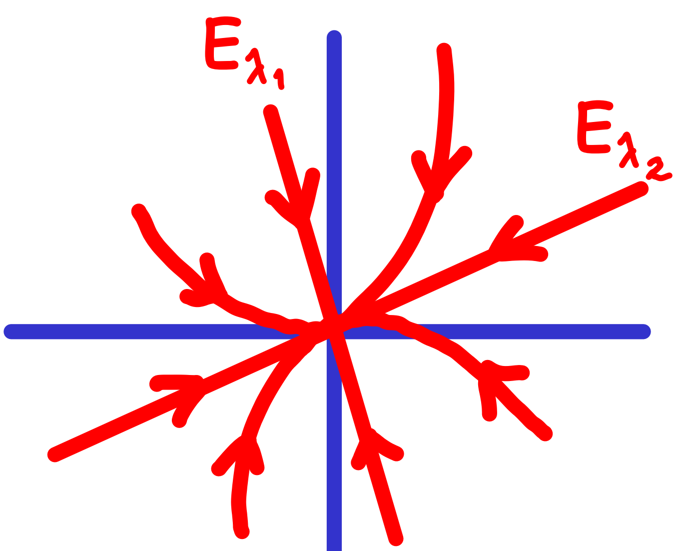
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



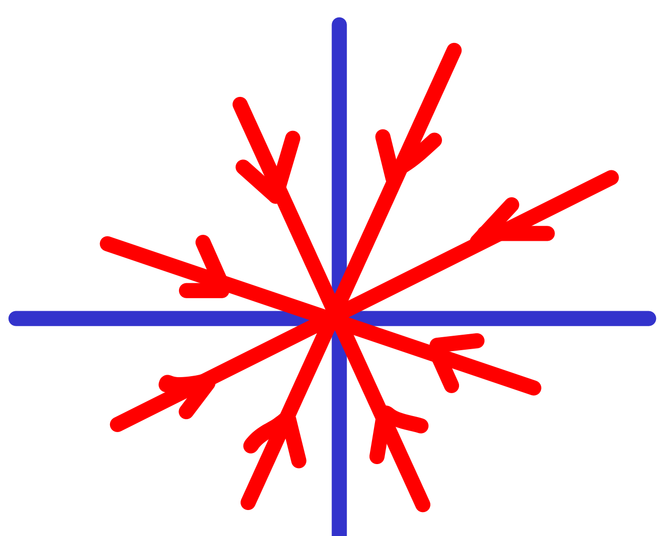
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

2 Falls A ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte besitzt,

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta,$$

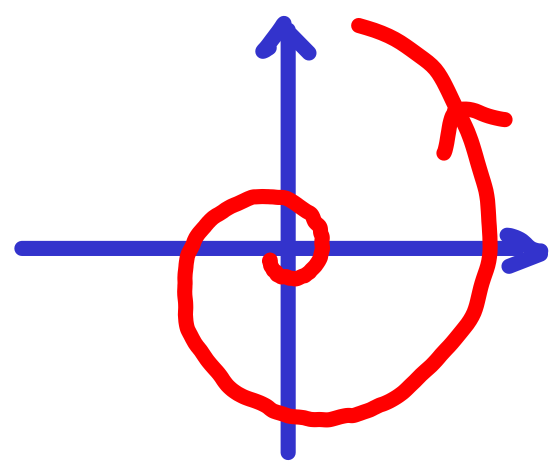
seien $\vec{v} + i\vec{w}$ und $\vec{v} - i\vec{w}$ zugehörige konjugiert komplexe Eigenvektoren. Dann ist die allgemeine reelle Lösung von $\star$

$$\vec{x} = c_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\vec{v} - \sin(\beta t)\vec{w}) + c_2 e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\vec{v} + \cos(\beta t)\vec{w})$$

wobei c_1 und c_2 beliebige reelle Konstanten sind.

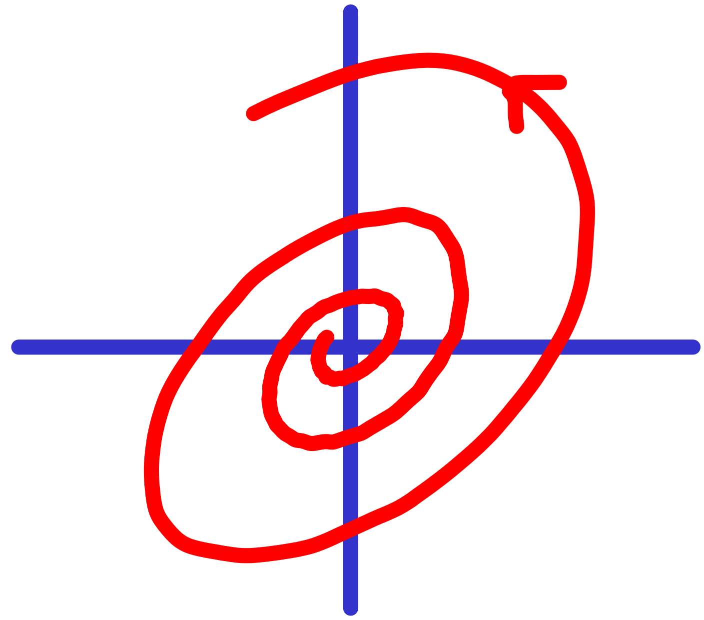
Zur Erinnerung:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

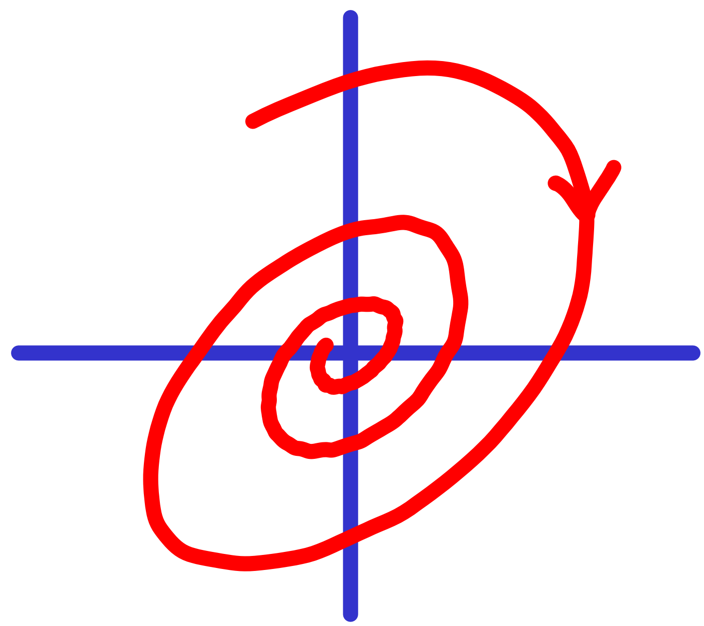


2

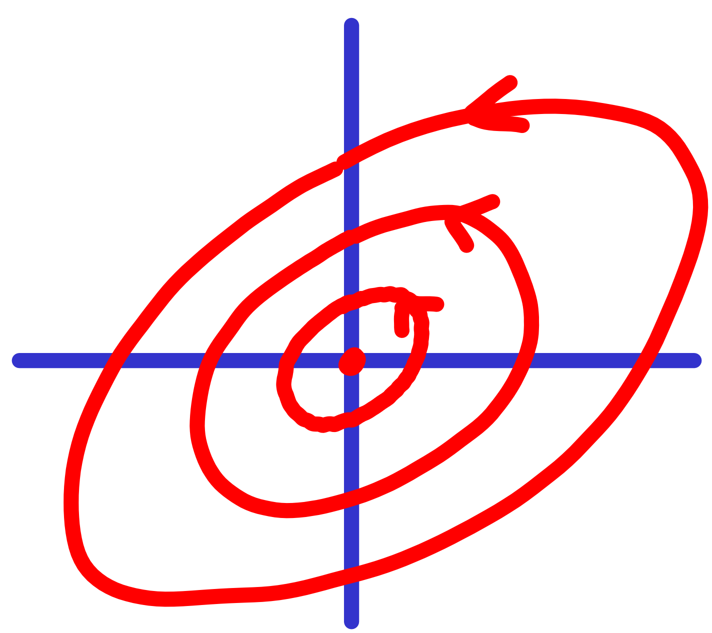
$\lambda = \alpha \pm i\beta$
mit $\alpha > 0$



$\lambda = \alpha \pm i\beta$
mit $\alpha < 0$



$\lambda = \pm i\beta$
also $\alpha = 0$



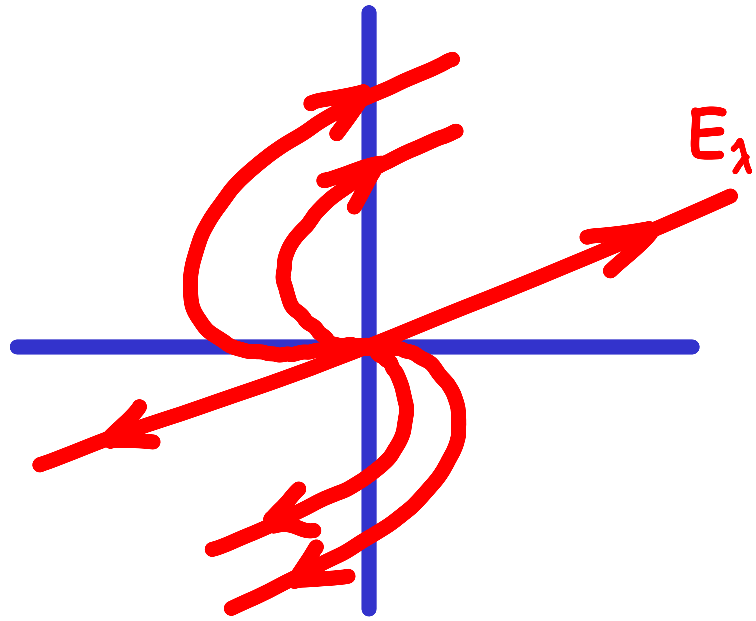
3 Falls alle Eigenvektoren von A kollinear sind, seien λ der einzige Eigenwert und $\vec{v}$ ein Eigenvektor. Sei $\vec{w}$ ein "Hauptvektor", d.h. so ein Vektor $\vec{w} \neq 0$, dass $(A-\lambda E)\vec{w}=\vec{v}$. Dann ist die allgemeine Lösung von *

$$\vec{x} = c_1 e^{\lambda t}\,\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\,(t\vec{v}+\vec{w})$$

wobei c_1 und c_2 beliebige reelle Konstanten sind.

3

$\lambda > 0$



$\lambda < 0$