D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15

Dr. Ana Cannas

MC-Serie 1

Einsendeschluss: 2. Oktober 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

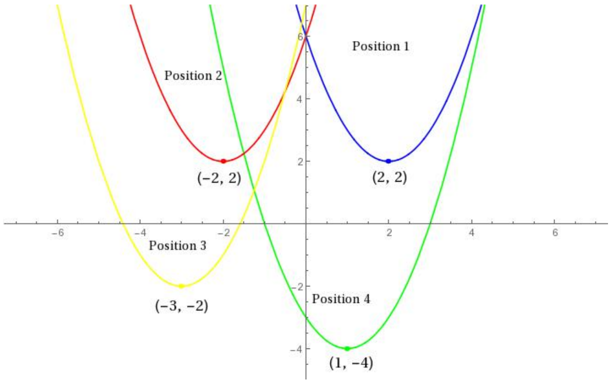
1. Ordnen Sie die Funktionsgleichungen aus den Teilen A bis D den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu.

A: $y = (x-1)^2 - 4$

B: $y = (x-2)^2 + 2$

C: $y = (x+2)^2 + 2$

D: $y = (x+3)^2 - 2$



(a) A3, B1, C2, D4

(b) A3, B2, C1, D4

√ (c) A4, B1, C2, D3

(d) A4, B2, C1, D4

Wir haben vier Funktionen von der Form $y = (x-a)^2 + b$, wobei a die Verschiebung an der x-Achse (für $a > 0$ in positive Richtung und für $a < 0$ in negative Richtung) und b die Verschiebung an der y-Achse bestimmt. Die Parabel $y = (x-1)^2 - 4$ ist also die Standardparabel um 1 in positive x-Richtung und um 4 in negative y-Richtung verschoben. Es handlet sich dabei also um Position 4. Ebenso kann man argumentieren, dass $y = (x-2)^2 + 2$ die Standardparabel um 2 in positive x-Richtung und um 2 in positive y-Richtung ist, also Position 1. Bei Position 2 handelt es sich um $y = (x+2)^2 + 2$ und bei Position 3 schliesslich um $y = (x+3)^2 - 2$.

2. Betrachten Sie einen Punkt (x, y), der auf dem Graphen der Geraden $2x + 4y = 5$ liegt. Sei L der Abstand des Punktes (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$. Schreiben Sie L als eine Funktion von x.

(a) $L(x) = x$

(b) $L(x) = \frac{1}{4}(5 - 2x)$

(c) $L(x) = \sqrt{x^2 + \frac{5}{4}}$

√ (d) $L(x) = \frac{1}{4}\sqrt{20x^2 - 20x + 25}$

Die Gerade ist gegeben durch $2x + 4y = 5$. Eine Umformung nach y liefert $y = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x$. Ein Punkt auf der Geraden ist also durch $(x, \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x)$ gegeben. Der Abstand eines solchen Punktes zum Urspung kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt werden, nämlich $L(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{20x^2 - 20x + 25}$.

3. Wie lang ist ein Kreisbogen eines Kreises vom Radius 9 m, der von einem 120 Grad Winkel eingeschlossen wird?

√ (a) 6π m

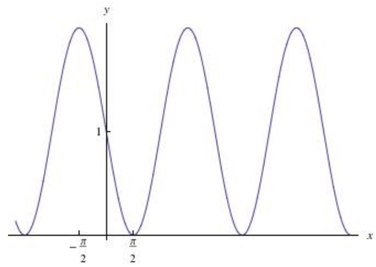
(b) 18π m

(c) 540 m

(d) 1080 m

Der gesamte Kreisumfang beträgt 18π, hier betrachten wir ein Drittel des Kreisbogens, also $\frac{2\pi}{3}9 = 6\pi$.

4. Welche Funktion besitzt den folgenden Graphen?



(a) $f(x) = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

√ (b) $f(x) = 1 + \sin(x - \pi)$.

(c) $f(x) = -1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(d) $f(x) = -1 + \sin(x - \pi)$.

Die Funktion $f(x) = 1 + \sin(x - \pi)$ hat den Graphen, der entsteht, wenn man $\sin(x)$ in x-Richtung um $-\pi$ und in y-Richtung um 1 verschiebt.

5. Welche Funktion ist gleich $f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$?

(a) $\cos(-x)$

√ (b) $-\cos(x)$

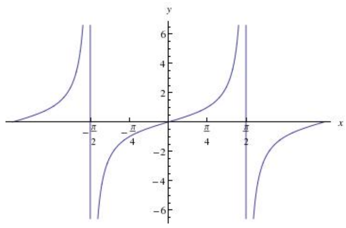
(c) $\cos(x + \frac{\pi}{2})$

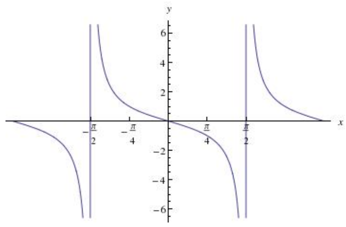
(d) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

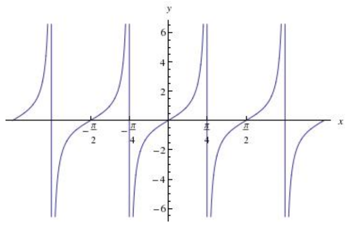
Verschieben wir den Sinus um $\frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung, erhalten wir den Cosinus. Eine Verschiebung um $\frac{3\pi}{2}$ ergibt demnach den negativen Cosinus, d.h. an der x-Achse gespiegelt. Da $\cos(-x) = \cos(x)$ ist die erste Antwort falsch. Die dritte und vierte Antwort stellen Verschiebungen des Cosinus um $\frac{\pi}{2}$ dar, sind also nicht gleich $-\cos(x)$ und deshalb falsch.

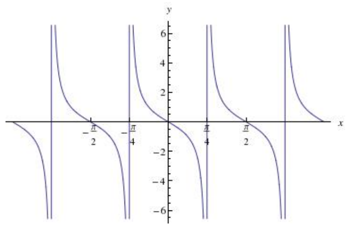
6. Welcher ist der Graph der Funktion

$$f(x) = \tan(-2x)?$$

(a) 

(b) 

(c) 

$\surd$ (d) 

Man sieht, dass die Funktion $\tan(-2x)$ den Graphen hat, der entsteht, wenn $\tan(x)$ an der y-Achse gespiegelt wird und mit Polstellen bei $\pm\dfrac{\pi}{4}$.

7. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (x+2)\frac{|x-1|}{x-1}$$

ist **falsch**?

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -2.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\frac{|-1|}{-1} = 2 \cdot -1 = -2.$$

(b) $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 3 \cdot 1 = 3.$$

(c) $\lim_{x\to 1-} f(x) = -3.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

√ (d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$

Falls der Grenzwert existiert, muss

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1+} f(x) = 3 \cdot 1 = 3 \\ \lim_{x\to 1-} f(x) = 3 \cdot (-1) = -3 \end{cases}$$

also existiert dieser Grenzwert nicht.

8. Für welchen Wert von a ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

an jeder Stelle x stetig?

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{3}{4}$

√ (c) $\frac{4}{3}$

(d) 3

Da sowohl $x^2 - 1$ als auch $2ax$ stetige Funktionen sind, ist nur die Stelle $x = 3$ interessant. Wir wollen $3^2 - 1 = 6a$, was zu $a = \frac{4}{3}$ führt.

9. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **nicht** stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = |0|$$

und somit ist die Funktion stetig.

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ e - x + 1, & x \leq 1. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 1} e^x = e = e - 1 + 1$$

und somit ist die Funktion stetig.

√ (c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 0} 2x + 3 = 3 \neq 3 \cdot 0$$

und somit ist die Funktion *nicht* stetig.

(d) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 = 2 \cdot 3$$

und somit ist die Funktion stetig.

10. Welche Aussage über Grenzwerte der Funktion

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

ist **falsch**?

(a) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

√ (b) $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

(c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Durch Division des Zählers und des Nenners durch x erhalten wir $\frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x}}$, was sowohl für $x \to +\infty$ als auch $x \to -\infty$ gegen 2 geht. Es gilt $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$, da der Nenner $x - 4$ für $x > 4$ positiv ist. Für $x < 4$ ist der Nenner $x - 4$ aber negativ, weshalb $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ gilt. Antwort b) ist daher eine falsche Aussage.