D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 2

Einsendeschluss: 9. Oktober 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche der folgenden Formeln ist **keine** Rechenregel, die für alle $x, y, z > 1$ gültig ist?

√ (a) $(x^y)^z = x^{(y^z)}$.

(b) $\frac{x^y}{x^{y-z}} = x^z$.

(c) $\log_x x^{yz} = yz$.

(d) $\log_x y^z = z \log_x y$.

Es gelten für alle $x, y, z > 1$,

$$\frac{x^y}{x^{y-z}} = \frac{x^y}{x^y \cdot x^{-z}} = \frac{1}{x^{-z}} = x^z,$$
$$\log_x x^{yz} = yz \log_x x = yz,$$
$$\log_x y^z = z \log_x y$$

jedoch ist

$$(x^y)^z = x^{yz}$$

und somit ist die erste Aussage im Allgemeinen falsch.

2. Die Umkehrfunktion $g(y)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2e^x}$ auf dem Intervall $(0, 1)$ ist:

(a) $g(y) = \ln\left(1 + 2e^{-y}\right)$.

√ (b) $g(y) = \ln\left(\dfrac{1-y}{2y}\right)$.

(c) $g(y) = 1 + 2e^y$.

(d) $g(y) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-y}$.

Wir schreiben die Gleichung $f(x) = y$ so um, dass x als Funktion von y ausgedrückt werden kann:

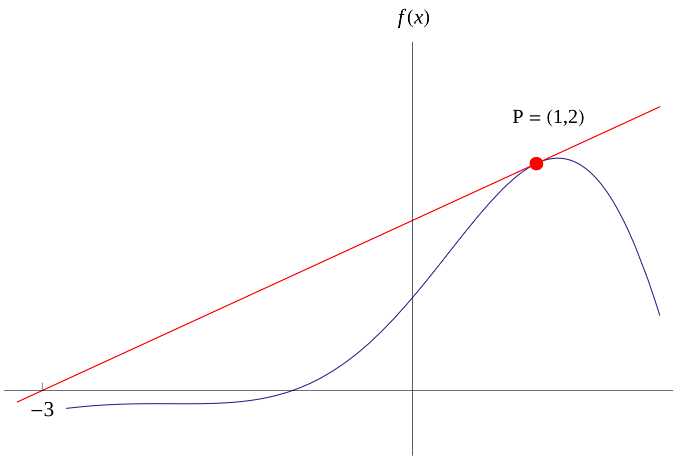
$$\frac{1}{1+2e^x} = y \Rightarrow 1 + 2e^x = \frac{1}{y} \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{2y}.$$

Logarithmieren ergibt schliesslich

$$x = \ln\left(\frac{1-y}{2y}\right)$$

Es ist zu beachten, dass die Umkehrfunktion nur auf dem Intervall $(0, 1)$ definiert ist (dieses Intervall ist der Wertebereich von $f(x)$).

3. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

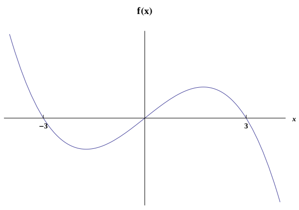
(d) -2

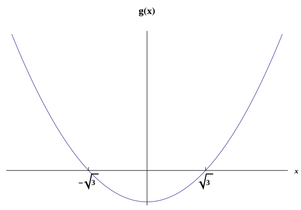
Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

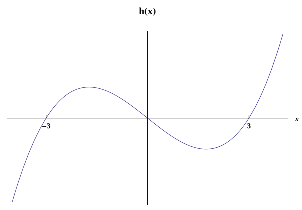
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Die folgenden Bilder zeigen die Graphen dreier reeller Funktionen einer reellen Variable, $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist.

Welche Aussage ist richtig?







(a) $f' = g$.

(b) $g' = f$.

(c) $f' = h$.

√ (d) $h' = g$.

Die Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ haben im Intervall $[-3, 3]$ jeweils zwei Extrema, also müssen die ersten Ableitungen dort 0 sein. Die Funktion $f(x)$ ist auf $(-\infty, -3]$ (resp. $[3, +\infty)$) monoton fallend, die Ableitung nimmt dort also negative Werte an, während $h(x)$ auf $(-\infty, -3]$ (resp. $[3, +\infty)$) monoton steigend ist, die Ableitung nimmt dort also positive Werte an. Also kann nur der Graph von g der Graph der Ableitung von h sein.

5. Was ist die Steigung der Tangente in $x = \frac{\pi^2}{4}$ an den Graphen von

$$f(x) = \cos\sqrt{x}?$$

(a) -1.

(b) $-\pi$.

√ (c) $-\frac{1}{\pi}$.

(d) $-\frac{\pi^2}{2}$.

Die Steigung der Tangente in $x = \frac{\pi^2}{4}$ an den Graphen von $f(x)$ entspricht genau der ersten Ableitung $f'(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = \frac{\pi^2}{4}$. Man berechnet

$$f'(x) = \left(-\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dann ist

$$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\frac{\pi}{2}} = -1 \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

6. Welche der folgenden Funktionen ist streng monoton wachsend im Intervall $]-1,1[$?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

√ (c) $x \mapsto -e^{-x}$

(d) $x \mapsto \arccos x$

Auf $]-1,0]$ ist x^2 streng monoton fallend und $|x|+x = 0$ konstant, also scheiden diese aus. Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist sowieso streng monoton fallend. Nur die Exponentialfunktion $x \mapsto -e^{-x}$ ist hier streng monoton wachsend.

7. Wie lautet die Ableitung von

$$f(x) = 2^{x^2+1}?$$

(a) $2x \cdot 2^{x^2}$.

(b) $(x^2+1) \cdot 2^{x^2}$.

(c) $(\ln 2) 2^{x^2+1}$.

√ (d) $4x(\ln 2)2^{x^2}$.

Man berechnet mit der Kettenregel für $f(x) = 2^{h(x)}$ mit $h(x) = x^2 + 1$

$$f'(x) = h'(x)(\ln(2))2^{h(x)}$$

dann ist

$$f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2+1}.$$

8. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die Ableitung der Funktion

(a) $x(t) = \sin\left(e^{2t}\right)$ ist $\dot{x}(t) = 2e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right)$.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Andwendung der Kettenregel

$$\dot{x}(t) = \left(e^{2t}\right)' \cos\left(e^{2t}\right) = 2e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right).$$

√ (b) $x(t) = \dfrac{1}{t^2} + t\ln t, \quad t > 0,$ ist $\dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^2} + \ln t + t.$

Falsch. Es gilt $\dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^3} + \ln t + 1$.

(c) $x(t) = e^{\ln t + t^2}, \quad t > 0,$ ist $\dot{x}(t) = \left(1 + 2t^2\right)e^{t^2}$.

Richtig. Es gilt $x(t) = e^{\ln t}e^{t^2} = te^{t^2}$, also $\dot{x}(t) = e^{t^2} + 2t^2e^{t^2}$.

(d) $x(t) = \dfrac{\sin^2(t^2)}{\cos(t^2)}$ ist $\dot{x}(t) = 2t\sin(t^2)\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2(t^2)}\right)$.

Richtig. Es gilt $x(t) = \dfrac{1-\cos^2(t^2)}{\cos(t^2)} = \dfrac{1}{\cos(t^2)} - \cos(t^2)$, also

$$\dot{x}(t) = -\frac{-2t\sin(t^2)}{\cos^2(t^2)} + 2t\sin(t^2) = 2t\sin(t^2)\left(1 + \frac{1}{\cos^2(t^2)}\right).$$

9. Die Gleichung

$$y^2 = x^2 - \sin(xy) + 1$$

definiert y als differenzierbare Funktion von x in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 1)$. Was ist die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ dieser Funktion?

(a) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{2x - y\cos(xy)}$.

(b) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{-2x + y\cos(xy)}$.

√ (c) $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

(d) $\dfrac{-2x + y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

$y(x)$ erfüllt

$$\begin{cases} y(x)^2 - x^2 + \sin(xy(x)) - 1 = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ableiten der Gleichung für $y(x)$ unter Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(y^2 - x^2 + \sin(xy) - 1\right) = 0 \\ \iff \quad & 2y\frac{dy}{dx} - 2x + \cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0 \\ \iff \quad & (2y + x\cos(xy))\,\frac{dy}{dx} = 2x - y\cos(xy) \end{aligned}$$

und weil $2y + x\cos(xy) \neq 0$ in einer Umgebung von $(1, 0)$ folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}.$$

10. Sei $f(x) = \pi + 2\arctan(x)$ und $g(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Der Definitionsbereich von arctan ist $\mathbb{R}$, das ändert sich nicht nach Skalierung und Verschiebung. Da arctan überall differenzierbar ist, gilt das auch für f, wobei

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Der Wertebereich von $f(x)$ ist $(0, 2\pi)$.

Der Wertebereich von arctan ist $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist der Wertebereich von $2\arctan$ gleich $(-\pi, \pi)$und der Wertebereich von f ist das Intervall $(0, 2\pi)$.

√ (c) $g(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Da der Wertebereich von f das Intervall $(0, 2\pi)$ ist, ist die Umkehrfunktion nur auf diesem Intervall definiert.

(d) $g(x) = \cot\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

Wir schreiben die Gleichung $f(x) = y$ um:

$$\begin{aligned} \pi + 2\arctan(x) = y &\Leftrightarrow \\ \arctan(x) = \frac{y-\pi}{2} &\Leftrightarrow \\ x = \tan\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehung $\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ finden wir

$$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cot(\pi - \frac{y}{2}),$$

das heisst

$$g(y) = \cot\left(\pi - \frac{y}{2}\right)$$

beziehungsweise $g(x) = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$.