D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 3

Einsendeschluss: 16. Oktober 2015

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Was ist die Linearisierung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

bei $x = 2$?

(a) $L(x) = 1 + \frac{1}{4}x.$

√ (b) $L(x) = 1 - \frac{1}{4}x.$

(c) $L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x.$

(d) $L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x.$

Die Linearisierung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist gegeben durch $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Man berechnet

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f'(x_0) = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=2} = -\frac{1}{4}.$$

Dann ist

$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) = 1 - \frac{1}{4}x.$$

2. Welche ist die Gleichung für die Tangente an die Kurve

$$y = \frac{1}{x^2}$$

im Punkt $(-1, 1)$?

(a) $y = x$

(b) $y = x + 2$

(c) $y = 2x - 1$

√ (d) $y = 2x + 3$

Wir berechnen zuerst die Ableitung von $y = \frac{1}{x^2}$ im Punkt $(-1, 1)$, nämlich

$$y' = -\frac{2}{x}|_{x=-1} = 2.$$

Die Steigung der Tangente ist also 2, das heisst die Tangente hat die Form $y = 2x + d$. Der Punkt $(-1, 1)$ liegt auf der Tangente, wir erhalten also $d = y - 2x = 1 - 2(-1) = 3$.

3. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 0 der Hyperbelfunktion $\cosh x$ ist

√ (a) $1 + \frac{1}{2}x^2$.

(b) $1 + x^2$.

(c) $1 + 2x^2$.

(d) $2 + x^2$.

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 0 ist gegeben durch

$$\cosh(0) + \cosh'(0)x + \frac{\cosh''(0)}{2}x^2 = 1 + \sinh(0)x + \frac{\cosh(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

4. Das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ ist

√ (a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^3$.

(c) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

(d) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Es gelten

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x}\ \cos x, \\ f''(x) &= e^{\sin x}\ \cos^2 x - e^{\sin x}\ \sin x, \\ f'''(x) &= e^{\sin x}\ \cos^3 x - 3\, e^{\sin x}\ \cos x\ \sin x - e^{\sin x}\ \cos x, \end{aligned}$$

also $f(0) + f'(0)\, x + \dfrac{f''(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}\, x^3 = 1 + 1\, x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + 0\, x^3$.

5. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

√ (a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) multipliziert.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f + g$ zweier Funktionen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Wegen

$$(f+g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

ist die erste Antwort die richtige.

6. Nur eine der folgenden Rechnungen ist korrekt. Welche?

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \times (-\infty) = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \times (-\infty) = -\infty$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} = -1$$

√ (d)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Da die Werte von $0\times(-\infty)$ und $\frac{-\infty}{\infty}$ nicht wohl definiert sind, scheiden die ersten drei Antwortmöglichkeiten sofort aus. Der richtige Ansatz ist die Verwendung der Regel von Bernoulli-l'Hôpital, also Antwort d).

7. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von Bernoulli-l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

√ (d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

Die Regel von Bernoulli-l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2 = 0$ und $x^2-3x+2 = 0$. Damit ist die Regel von Bernoulli-l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

8. Welche der folgenden Identitäten ist **falsch**?

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 0.$

Es gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = \frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = 0.$

Es gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = \frac{\ln(0+1)}{\sin 0 + 1} = \frac{\ln 1}{1} = 0.$

√ (c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = 0.$

Die zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{-\sin x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2}{-\cos x} = -2.$$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0.$

Die Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

9. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$ ist

√ (a) gerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$

(b) ungerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$

(c) gerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$

(d) ungerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$

Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{2}{e^x - 1} + \frac{x}{2}\frac{e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad \text{also}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{2}\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{-x}{2}\frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x).$$

Zudem ist $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} + \frac{0}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1$ (unter Anwendung von BH).

10. Die Gleichung
$$x \ln x = 1$$
besitzt im Intervall $[1,3]$

(a) keine Lösung.

√ (b) genau eine Lösung.

(c) genau zwei Lösungen.

(d) drei oder mehr Lösungen.

Hinweis: Zwischenwertsatz.
Wir wenden den Zwischenwertsatz an. Da $x \ln x|_{x=1} = 0$ und $x \ln x|_{x=3} = 3 \ln 3 > 3$ und $0 < 1 < 3 \ln 3$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Stelle $z \in [1,3]$ gibt, so dass $z \ln z = 1$. Ausserdem gilt $(x \ln x)' = \ln x + 1$ und dies ist immer positiv im Intervall $[1,3]$. Daher ist $x \ln x$ auf $[1,3]$ monoton wachsend und somit $x = z$ die einzige Stelle, wo $x \ln x = 1$.