D-ERDW, D-HEST, D-USYS   Mathematik I   HS 15
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 4

Einsendeschluss: 23. Oktober 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2$$

im Intervall $[0, 1]$ ist richtig?

(a) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(b) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

√ (c) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

(d) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

Die kritischen Stellen von f sind die Nullstellen der ersten Ableitung,

$$0 \stackrel{!}{=} f'(x) = x\,(3x - 2)\,.$$

Also hat f kritische Stellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$. An diesen Stellen nimmt f die Werte

$$f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

an. Ausserdem gilt an den Randstellen des Definitionsbereiches $[0, 1]$

$$f(0) = 0 \text{ und } f\,(1) = 0.$$

Daher sind die Stellen $x = 0, 1$ jeweils globale Maxima und $x = \frac{2}{3}$ das globale Minimum im Intervall $[0, 1]$.

2. Das Maximum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1,5]$ ist

(a) 0.

(b) 1.

$\surd$ (c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

Die inneren kritischen Stellen sind Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Dann ist $f'(x) = 0 \iff x = e$, wobei $f(e) = \frac{1}{e}$. Ausserdem ist $f(1) = 0 < e$ und $f(5) = \frac{\ln 5}{5} < e$. Also ist $\frac{1}{e}$ das Maximum von f im Intervall $[1,5]$.

3. Das Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1,5]$ ist

$\surd$ (a) 0.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

Die inneren kritischen Stellen sind Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Dann ist $f'(x) = 0 \iff x = e$, wobei $f(e) = \frac{1}{e}$. Ausserdem ist $f(1) = 0 < e$ und $f(5) = \frac{\ln 5}{5} > 0$. Also ist 0 das Minimum von f im Intervall $[1,5]$.

4. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ keine Minimalstelle von $f(x) = x^3$.

(b) Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$, so nimmt f in x ein Maximum an.

Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so nimmt f ein Minimum in x an, vgl. zum Beispiel $f(x) = x^2$, dann nimmt f in $x = 0$ ein Minimum an.

√ (c) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

Richtig. x ist dann ein Sattelpunkt.

(d) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ ein Minimum von $f(x) = x^4$.

5. Sei x_n eine Approximation von einer Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - \alpha$$

wobei $\alpha > 0$. Was ist unter Anwendung des Newtonverfahrens die nächste Approximation x_{n+1}?

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

√ (c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

6. Approximieren Sie den Wert $\sqrt{5}$, indem Sie zwei Iterationsschritte des Newtonschen Verfahrens für $f(x) = x^2 - 5$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ berechnen. Dann ergibt sich die Approximation:

(a) $x_2 = \frac{7}{3}$

✓ (b) $x_2 = \frac{47}{21}$

(c) $x_2 = \frac{2207}{987}$

(d) $x_2 = \frac{4870847}{2178309}$

Die Näherungsformel lautet $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, wobei hier $f'(x) = 2x$ ist. Die erste Näherung ist deshalb

$$x_1 = 3 - \frac{4}{6} = \frac{7}{3}$$

womit die erste Antwort schon ausscheidet. Wir sind an der zweiten Näherung interessiert, also

$$x_2 = \frac{7}{3} - \frac{f(\frac{7}{3})}{f'(\frac{7}{3})} = \frac{7}{3} - \frac{\frac{4}{9}}{\frac{14}{3}} = \frac{47}{21}.$$

Also ist die zweite Antwortmöglichkeit richtig. Antwort c) entspricht übrigens der dritten Näherung und Antwort d) der vierten Näherung.

7. Welche ist eine korrekte Stammfunktion von

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2x}?$$

✓ (a) $\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|$.

(b) $\arctan(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}$.

(c) $\operatorname{arsinh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|$.

(d) $\operatorname{arsinh}(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}$.

Man berechnet

$$\int_0^x \frac{1}{1+\tilde{x}^2} + \frac{1}{1+2\tilde{x}} d\tilde{x} = \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|,$$

wobei man $\frac{1}{2}$ vor $\ln|1+2x|$ mit Substitution $t = 2\tilde{x}$, also $\frac{1}{2}dt = d\tilde{x}$ erhält. Alternativ findet man auch

$$\left(\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot 2.$$

8. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

Richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G'$.

√ (b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

Falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber x^2 keine Stammfunktion von 1.

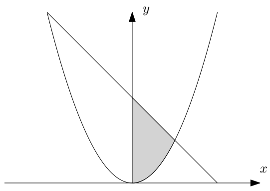
(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

Richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F'$.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

Richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.

9. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur im ersten Quadrant, die zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 2 - x$ liegt?



√ (a) $F = \frac{7}{6}$.

(b) $F = \frac{4}{3}$.

(c) $F = \frac{5}{6}$.

(d) $F = \frac{10}{3}$.

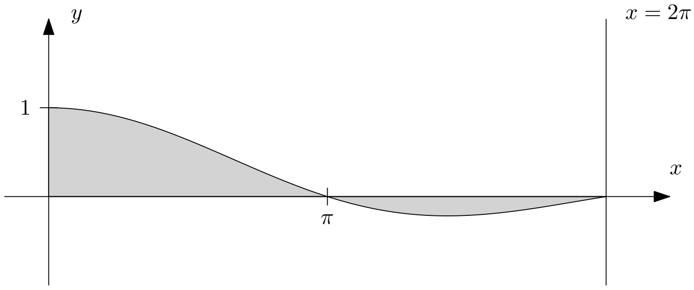
Die beiden Funktionen schneiden sich in

$$x^2 = 2 - x \text{ das heisst dort wo } (x - 1)(x + 2) = 0$$

also im 1.Quadranten bei $x = 1$. Die Fläche zwischen den Kurven ist

$$F = \int_0^1 (2 - x) - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

10. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2\pi$ begrenzt wird



ist

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin |t|}{|t|}\, dt.$

√ (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$

(d) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|.$

Im Allgemeinen besteht die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, den Koordinatenachsen und den Geraden $x = a$ und $x = b$, $a < b$, aus je einem Teil über und unter der Abszissenachse. Das Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ liefert dann die Differenz der beiden Flächeninhalte, $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right|$ den Absolutbetrag der Differenz. Das Integral $\int_a^b |f(t)|\, dt$ zählt beide mit positivem Vorzeichen.