Dr. Ana Cannas

MC-Serie 5

Einsendeschluss: 30. Oktober 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Seien f und g integrierbare Funktionen mit

$$\int_1^2 f(x)dx = -4 \ , \qquad \int_1^5 f(x)dx = 6 \ , \qquad \int_2^5 g(x)dx = 8 \ .$$

Dann ist das Integral

$$\int_2^5 (2f(x) - g(x)) \ dx$$

gleich

(a) -12 .

(b) -4 .

(c) 4 .

√ (d) 12 .

Wir wissen, dass

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 6 - (-4) = 10 \ ,$$

also

$$\int_2^5 (2f(x) - g(x))dx = 2 \times 10 - 8 = 12 \ .$$

2. Das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$$

ist gleich

√ (a) $\frac{14}{9}$.

(b) $\frac{14}{3}$.

(c) 14 .

(d) 42 .

Wir substituieren $y = 3x+1$. Wir haben $dy = 3dx$ und die neuen Grenzen sind 1 und 4. Also

$$\frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{y}dy = \frac{2}{9}y^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{14}{9}.$$

3. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$. Auf die Konstante aufpassen!

√ (a) $\dfrac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \dfrac{1}{x+1} + C$

(c) $\dfrac{2}{(x+1)^3} + C$

(d) $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} + C$

Wegen $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1-(x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x + (x+1)^{-1} + C \\ &= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C \\ &= \frac{x^2}{x+1} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können. Somit ist Antwort 1 korrekt.

4. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

ist gleich

(a) $\ln\frac{1}{3}$.

√ (b) $\ln\frac{4}{3}$.

(c) $\ln 3$.

(d) $\ln 12$.

Mittels Partialbruchzerlegung berechnet man

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

Also muss

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 3A+2B &= -1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=-1,\ B=1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \left[\ln|x-3|-\ln|x-2|\right]_0^1 \\ &= \left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_0^1 = \ln(2)-\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

5. Wie lautet die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt\ ?$$

(a) $2x+\cos x$.

(b) $2x\sin x$.

√ (c) $2x\cos\left(x^2\right)$.

(d) $\cos\left(x^2\right)-1$.

Mit Verwendung der Kettenregel für $g(x)=x^2$ erhält man

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} \cos t\,dt\right) = \cos(g(x))g'(x) = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x.$$

6. Welche der folgenden Funktionen ist für $x > 0$ **nicht** monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t\, dt$.

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2\, dt$.

√ (c) $x \mapsto \int_0^x \sin t\, dt$.

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\, dt$.

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf (c) alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend.
Eine geometrische Begründung: Ausser bei (c) wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

7. Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Formel

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)\, dx$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

√ (c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) ist falsch, falls f eine konstante Funktion ist.

Die Formel folgt durch partielle Integration der Funktion $1 \cdot f(x)$, wobei 1 integriert und $f(x)$ differenziert wird. Richtig ist also (c). Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung betrifft dagegen das bestimmte Integral. Substituiert wird auch nichts: Auf beiden Seiten steht $f(x)$ und nicht f von etwas anderem.

8. Entscheiden Sie welche Aussage richtig ist:

(a) $\int x \sin x \; dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$.

(b) $\int x \sin x \; dx = -x \cos x + C$.

√ (c) $\int x \sin x \; dx = -x \cos x + \sin x + C$.

(d) $\int x \sin x \; dx = -\frac{x^2}{2} \cos x + \sin x + C$.

Mittels partieller Integrations finden wir:

$$\int x \sin x \; dx = -x \cos x + \int \cos x \; dx = -x \cos x + \sin x + C \; .$$

9. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx.$

$\checkmark$ (b) $\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi.$

(c) $\int 2x^3 e^{x^2} \, dx = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \, dx.$

(d) $\int x\sqrt{x+1} \, dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx.$

Man überprüft, die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx$$

und findet, dass

$$\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)} dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x} dx = x\ln(x) - \int 1 dx,$$

$$\begin{aligned}\int \underset{\uparrow}{\sin(\varphi)} \underset{\downarrow}{\cos(\varphi)} d\varphi &= (-\cos(\varphi))\cos(\varphi) - \int (-\cos(\varphi))\,(-\sin(\varphi))\, d\varphi \\ &= -\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi) d\varphi,\end{aligned}$$

$$\int \underset{\uparrow}{\left(2xe^{x^2}\right)} \underset{\downarrow}{x^2} dx = e^{x^2} x^2 - \int e^{x^2}(2x) dx,$$

$$\int \underset{\uparrow}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} \underset{\downarrow}{x} dx = \frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\, x - \int \frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Daher ist der zweite Ausdruck die korrekte Anwtort.

10. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ konvergieren beide.

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ konvergiert, aber $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ divergiert.

√ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ konvergiert, aber $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ divergiert.

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ divergieren beide.

Für $1 < a$ gilt

$$\int_1^{+} \infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = \lim_{a \to +\infty} \frac{-1}{a} - \frac{-1}{1} = 1$$

und

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a (x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^a = \lim_{a \to +\infty} 2\sqrt{a} - 2 = +\infty.$$

Daher ist die dritte Antwort korrekt.