Dr. Ana Cannas

MC-Serie 6

Komplexe Zahlen

Einsendeschluss: 6. November 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell ist

(a) $z - \bar{z}$.

(b) $\frac{z}{\bar{z}}$.

(c) z^2.

√ (d) $e^z e^{\bar{z}}$.

Mit $z = x + iy$ bzw. $\bar{z} = x - iy$ ergeben sich

$$\begin{aligned}
&z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy \in i\mathbb{R}, \\
&\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy} \cdot \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x^2 + 2xyi - y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} i \in \mathbb{C}, \\
&z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \in \mathbb{C}, \\
&e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{x+iy+x-iy} = e^{2x} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Also ist die letzte Antwort richtig.

2. Sei $z \in \mathbb{C}$. Welche Aussage ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$.

√ (b) $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(iz)$.

(c) $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Im}(iz)$.

(d) $\mathrm{Im}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(iz)$.

Mit $z = x + iy$ bzw. $iz = -y + ix$ und $\bar{z} = x - iy$ ergeben sich

$$\mathrm{Re}(iz) = -y = \mathrm{Im}(\bar{z}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(iz) = x = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}).$$

3. Die Punktemenge
$$\{ z \in \mathbb{C} |\; |z-9| = 4\}$$
ist ein Kreis

(a) um $z_0 = 4$ mit Radius 9.

(b) um $z_0 = 4$ mit Radius 3.

√ (c) um $z_0 = 9$ mit Radius 4.

(d) um $z_0 = 9$ mit Radius 2.

Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} |z-9|^2 &= 4^2 \\ \operatorname{Re}(z-9)^2 + \operatorname{Im}(z-9)^2 &= 4^2 \\ (x-9)^2 + y^2 &= 4^2. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um einen Kreis um $z_0 = 9 + i \cdot 0 = 9$ mit Radius 4.

4. Die Punktemenge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \operatorname{Re}(z) + 1\}$ ist

(a) eine Ellipse.

√ (b) eine Parabel.

(c) eine Hyperbel.

(d) keine der obigen Kurven.

Mit $z = x + iy$ folgt

$$\begin{aligned} 0 = |z|^2 - (\operatorname{Re}(z)+1)^2 &= x^2 + y^2 - (x+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\right) - 2x. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die Parabel $x = \dfrac{1}{2}\,y^2 - \dfrac{1}{2}$.

5. Der Wert von $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ is gleich

(a) 1

(b) $-i$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{i}{2}$

√ (d) keine der obigen

$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

6. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} - i$ und $w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Welche Aussage über $\frac{z}{w}$ ist korrekt?

(a) $\left|\frac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

√ (b) $\left|\frac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(c) $\left|\frac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

(d) $\left|\frac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Es gilt $z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ und $w = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ausserdem ist

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

sind

(a) $\sqrt{2} + i$, $\sqrt{2} - i$.

√ (b) $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$.

(c) $(\sqrt{2} + 1)i$, $(\sqrt{2} - 1)i$.

(d) keine der obigen.

Mit der Mitternachtsformel für Nullstellen von quadratischen Polynomen folgt, dass

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i.$$

8. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^3 + 8$ sind

(a) $-2,\ 2i,\ -2i.$

(b) $-2,\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$

(c) $2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}},\ -2.$

√ (d) $2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\pi},\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

Man überprüft, dass

$$\begin{aligned}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 &= 2^3 e^{i\pi} = -8\\ \left(2e^{i\pi}\right)^3 &= 2^3 e^{3i\pi} = -8\\ \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 &= 2^3 e^{-i\pi} = -8.\end{aligned}$$

9. Gegeben sei das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$. Bemerken Sie, dass $p(\lambda)$ nur von λ^2 abhängt.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Das Polynom hat keine Nullstellen (weder reelle noch komplexe).

(b) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

√ (c) p hat 2 Paare komplex konjugierte Nullstellen.

(d) Die Nullstellen können nicht bestimmt werden.

Das Polynom kann geschrieben werden als,

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = \left(\lambda^2 + 2\right)\left(\lambda^2 + 1\right).$$

Man sieht, dass die Nullstellen genau die komplex konjugierten Paare

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i \text{ und } \lambda_{3,4} = \pm i$$

sind.

10. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$.

Welche der folgenden Zahlen sind mögliche Werte der Summe $z + w$?

(a) $i.$

√ (b) $\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(c) $1.$

(d) $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Es gelten $z \in \left\{e^{\frac{2k\pi i}{4}} \mid k = 0, 1, 2, 3\right\}$ und $w \in \left\{e^{\frac{3\pi i}{6} + \frac{2k\pi i}{3}} \mid k = 0, 1, 2\right\}$, also

$$z \in \{1, -1, i, -i\} \qquad \text{und} \qquad w \in \left\{i, \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right\}.$$