MC-Serie 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Einsendeschluss: 13. November 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \\ y(0) & = \pi \end{cases}$$

im Intervall $(-2, 2)$?

√ (a) $y(x) = \arccos \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $y(x) = \arccos \dfrac{x}{2} + \pi$.

(c) $y(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

(d) $y(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + \pi$.

Eine Stammfunktion von $\dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$ ist $\arccos z$. Substitution mit $z = \dfrac{x}{2}$ liefert $dz = \dfrac{1}{2}dx$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx \\ &= \int \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \arccos z + C = \arccos \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \arccos \frac{x}{2} + C$$

und aus $y(0) = \pi$ folgt $C = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Die Differentialgleichung

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1)$$

geht durch Trennen der Variablen über in

(a) $yy' = \ln(x+1)$.

(b) $\dfrac{y'}{y} = \ln(x+1) + 1$.

(c) $yy' = \ln(x+1)^2$.

√ (d) $\dfrac{y'}{y+1} = \ln(x+1)$.

Die einzig korrekte Umformung ist:

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1) = (y+1)\ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y+1} = \ln(x+1).$$

3. Die Differentialgleichung $y' = x^2 + 2xy + y^2$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

√ (d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = x + y$ folgt $y' = u' - 1 = (x+y)^2 = u^2$, die Substitution führt also auf die Differentialgleichung $u' = u^2 + 1$ mit getrennten Variablen.

4. Die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$

√ (a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Diese DGL ist von der Form

$$y' = P(x)y + Q(x).$$

5. Die Differentialgleichung $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} + \sin\frac{y}{x}$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

√ (c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = \dfrac{y}{x}$ folgt $y' = u + xu' = \dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} + \sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{u}{1-u^2} + \sin u$, die Substitution führ also auf die Gleichung $u' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{u^3}{1-u^2} + \sin u\right)$ mit getrennten Variablen.

6. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 3y\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

geht durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung über in

√ (a) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right)dy = \int 3\,dx + c \qquad$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{y-2} - \frac{2}{y}\right)dy = \int 3\,dx + c \qquad$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{2-y} - \frac{1}{y}\right)dy = \int 3\,dx + c \qquad$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{y-2} + \frac{2}{y}\right)dy = \int 3\,dx + c \qquad$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

Man führt den Ausdruck via Trennung der Variablen auf

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{2}\right)}dy = 3dx,$$

und Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{2}\right)} = \frac{2}{y\,(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2-y} = \frac{A\,(2-y) + By}{y\,(2-y)} = \frac{2A + (B-A)y}{y(2-y)},$$

deshalb muss $A = 1$ und $B = A$ sein. Zusammen liefert das

$$\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right)dy = 3dx$$

und somit ist die erste Antwort korrekt.

7. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y = xy' + (y')^2$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf.

√ (b) $\dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$

Richtig, die Gleichung lässt sich umschreiben zu $y' = (x-1) \cdot y + \dfrac{1-x^2}{x^2}$

(c) $(y'-2)^2 = y$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf auf.

(d) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

Falsch, denn y tritt quadratisch (und im Nenner) auf.

8. Die Lösung $Y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dY(t)}{dt} = 2\,Y(t) - 10, \qquad Y(0) = 6,$$

erfüllt

√ (a) $Y(1) = e^2 + 5.$

(b) $Y(1) = 2.$

(c) $Y(1) = e^2 - 10.$

(d) $Y(1) = -8.$

Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dY}{Y(t) - 5} = 2dt$$

und somit

$$\int \frac{dY}{Y(t)-5} = \int 2dt \Rightarrow \ln|Y(t) - 5| = 2t + C \Rightarrow Y(t) = \tilde{C}e^{2t} + 5$$

und mit der Anfangsbedingung

$$Y(0) = 6 = \tilde{C} + 5 \Rightarrow \tilde{C} = 1.$$

Also ist die Lösung gleich

$$Y(t) = e^{2t} + 5$$

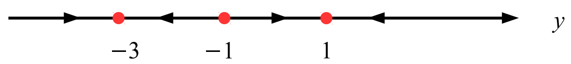
und liefert

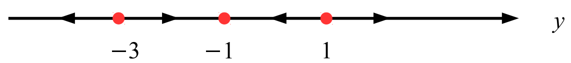
$$Y(1) = e^2 + 5.$$

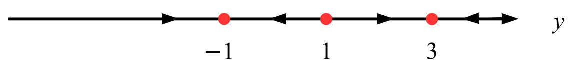
9. Welches Bild stellt die Phasenlinie der Gleichung

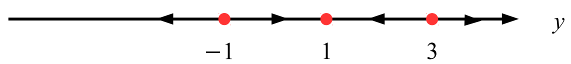
$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-1)(y-3)$$

dar?

(a) 

(b) 

(c) 

√ (d) 

Diese Differentialgleichung ist autonom: $\dfrac{dy}{dx} = g(y)$, wobei

$$g(y) = (y+1)(y-1)(y-3).$$

Die Gleichgewichtspunkte sind die Werte y, für die $g(y) = 0$, d.h.

$$y = -1, \quad y = 1, \quad \text{und} \quad y = 3.$$

Falls $y > 3$, ist $y+1 > 0, \quad y-1 > 0, \quad y-3 > 0$, deshalb ist $g(y) > 0$, d.h. y nimmt zu.

Falls $1 < y < 3$, ist $y+1 > 0, \quad y-1 > 0, \quad y-3 < 0$, deshalb ist $g(y) < 0$, d.h. y nimmt ab. Die restlichen Fälle sind analog.

10. Wir betrachten die Stabilität der Gleichgewichtspunkte der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y.$$

(a) $y = 0$ und $y = 2$ sind beide stabile Gleichgewichtswerte.

√ (b) $y = 0$ ist ein stabiler Gleichgewichtswert aber $y = 2$ ist instabil.

(c) $y = 0$ ist ein instabiler Gleichgewichtswert aber $y = 2$ ist stabil.

(d) $y = 0$ und $y = 2$ sind beide instabile Gleichgewichtswerte.

Die Funktion $y^2 - 2y = y(y-2)$ hat Nullstellen bei $y = 0$ und $y = 2$. Der Wert von $y(y-2)$ ist für $y < 0$ und $y > 2$ positiv aber für $0 < y < 2$ negativ. Daher ist bei $y = 0$ ein stabiler Gleichgewichtswert, jedoch bei $y = 2$ ein instabiler.