Dr. Ana Cannas

MC-Serie 8

Lineare DGL 2. Ordnung und Aufholen der Differentialrechnung

Einsendeschluss: 20. November 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0$$

(wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) ist korrekt?

(a) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

(b) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

√ (d) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Richtig. Die charakteristische Gleichung ist $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$. Wegen der doppelten reellen Nulstelle -1 ist die allgemeine Lösung wie angegeben.

2. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0?$$

(a) $r^2 - 3r = 0.$

$\checkmark$ (b) $r^2 - 3r + 2 = 0.$

(c) $1 - 3r + 2r^2 = 0.$

(d) $r - r^3 + r^2 = 0.$

Das Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{rx}$ in die DGL liefert die charakteristische Gleichung $r^2 - 3r + 2 = 0.$

3. Gegeben seien die Lösungen

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

einer linearen homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Welche der folgenden Funktionen ist **keine** Lösung dieser DGL?

(a) 0.

Die triviale Lösung ist immer eine Lösung einer homogenen DGL.

$\checkmark$ (b) $xe^x.$

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unaghängige Lösungen der DGL sind, ist die allgemeine Lösung $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL. xe^x lässt sich jedoch nicht als solche Kombination darstellen.

(c) $\cosh x.$

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, lösen auch alle Kombinationen $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL. Man verwendet $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$

(d) $4e^x - 3e^{-x}.$

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, lösen auch alle Kombinationen $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL.

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^x \ .$$

Welcher der folgenden Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist geeignet?

(a) $y_{\text{spez}}(x) = ke^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

√ (b) $y_{\text{spez}}(x) = kxe^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(c) $y_{\text{spez}}(x) = ke^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(d) $y_{\text{spez}}(x) = kxe^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

Da diese Differentialgleichung von 2. Ordnung ist und e^x eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist, verwendet man den Ansatz kxe^x.

5. Die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'' + 16y = e^{3x}$$

ist von der Form

✓ (a) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung ist

$$r^2 + 16 = 0$$

welches Wurzeln $r_{1,2} = \pm 4i$ hat. Die homogene Lösung besteht daher aus reellen Linearkombinationen von

$$\cos(4x) \text{ und } \sin(4x).$$

Also ist die homogene Lösung

$$y_h(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x).$$

Einsetzen des Ansatzes $y_p(x) = ke^{3x}$ für die partikuläre Lösung gibt

$$9ke^{3x} + 16ke^{3x} = e^{3x}$$

das heisst $25k = 1$, also $k = \frac{1}{25}$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}.$$

6. Wie lautet die Ableitung von

$$f(x) = 2^{x^2+1}?$$

(a) $2x \cdot 2^{x^2}$.

(b) $(x^2+1) \cdot 2^{x^2}$.

(c) $(\ln 2)2^{x^2+1}$.

$\surd$ (d) $4x(\ln 2)2^{x^2}$.

Man berechnet mit der Kettenregel für $f(x) = 2^{h(x)}$ mit $h(x) = x^2 + 1$

$$f'(x) = h'(x)(\ln(2))2^{h(x)}$$

dann ist

$$f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2+1}.$$

7. Sei $f(x) = \pi + 2\arctan(x)$ und $g(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Der Definitionsbereich von arctan ist $\mathbb{R}$, das ändert sich nicht nach Skalierung und Verschiebung. Da arctan überall differenzierbar ist, gilt das auch für f, wobei

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Der Wertebereich von $f(x)$ ist $(0, 2\pi)$.

Der Wertebereich von arctan ist $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist der Wertebereich von $2\arctan$ gleich $(-\pi, \pi)$und der Wertebereich von f ist das Intervall $(0, 2\pi)$.

√ (c) $g(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Da der Wertebereich von f das Intervall $(0, 2\pi)$ ist, ist die Umkehrfunktion nur auf diesem Intervall definiert.

(d) $g(x) = \cot\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

Wir schreiben die Gleichung $f(x) = y$ um:

$$\begin{aligned} \pi + 2\arctan(x) &= y \Leftrightarrow \\ \arctan(x) &= \frac{y-\pi}{2} \Leftrightarrow \\ x &= \tan\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehung $\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ finden wir

$$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cot(\pi - \frac{y}{2}),$$

das heisst

$$g(y) = \cot\left(\pi - \frac{y}{2}\right)$$

beziehungsweise $g(x) = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$.

8. Die Gleichung

$$y^2 = x^2 - \sin(xy) + 1$$

definiert y als differenzierbare Funktion von x in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 1)$. Was ist die Ableitung $\dfrac{dy}{dx}$ dieser Funktion?

(a) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{2x - y\cos(xy)}$.

(b) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{-2x + y\cos(xy)}$.

√ (c) $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

(d) $\dfrac{-2x + y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

$y(x)$ erfüllt

$$\begin{cases} y(x)^2 - x^2 + \sin(xy(x)) - 1 = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ableiten der Gleichung für $y(x)$ unter Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(y^2 - x^2 + \sin(xy) - 1\right) = 0 \\ \iff \quad & 2y\frac{dy}{dx} - 2x + \cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0 \\ \iff \quad & (2y + x\cos(xy))\,\frac{dy}{dx} = 2x - y\cos(xy) \end{aligned}$$

und weil $2y + x\cos(xy) \neq 0$ in einer Umgebung von $(1, 0)$ folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}.$$

9. Das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ ist

√ (a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^3$.

(c) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

(d) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Es gelten

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\sin x} \cos x, \\
f''(x) &= e^{\sin x} \cos^2 x - e^{\sin x} \sin x, \\
f'''(x) &= e^{\sin x} \cos^3 x - 3\, e^{\sin x} \cos x \sin x - e^{\sin x} \cos x,
\end{aligned}$$

also $f(0) + f'(0)\, x + \dfrac{f''(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}\, x^3 = 1 + 1\, x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + 0\, x^3$.

10. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ ist

√ (a) gerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

(b) ungerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

(c) gerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

(d) ungerade und $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \frac{2}{e^x - 1} + \frac{x}{2} \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad \text{also} \\
f(-x) &= \frac{-x}{2} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{-x}{2} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x).
\end{aligned}$$

Zudem ist $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{0}{2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$ (unter Anwendung von BH).