MC-Serie 9

Einführung in die lineare Algebra und Aufholen der Integralrechnung

Einsendeschluss: 27. November 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

√ (a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Die Verwendung des Gauss-Algorithmus zeigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $0x + 0y + 0z = -\frac{3}{2}$. Damit sieht man, dass es keine Lösung gibt.

2. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

$\surd$ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Die Verwendung des Gauss-Algorithmus zeigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Diese Stufenformmatrix entspricht dem LGS

$$\begin{cases} x - z & = 2 \\ y & = 1. \end{cases}$$

Damit ist z (zum Beispiel) frei wählbar $z = t$ (reeller Parameter) und die Lösungsmenge ist eine 1-parametrige Schar:

$$(x, y, z) = (2 + t, 1, t), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

3. Ist der Vektor $\vec{b}$ eine der Spalten der Matrix A, so ist $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) auf jeden Fall unlösbar.

(b) auf jeden Fall eindeutig lösbar.

$\surd$ (c) immer lösbar, aber manchmal nicht eindeutig lösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

(d) manchmal lösbar, manchmal unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

$A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\vec{b}$ sich als Linearkombination der Spalten von A darstellen lässt. Ist $\vec{b}$ gleich der j-ten Spalte von A, so ist offenbar

$$\vec{x} = (0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1} 0 \cdots 0)^{\,T}$$

eine Lösung. Die Lösung ist nur eindeutig, wenn die homogene Gleichung auch eindeutig lösbar ist. Z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar, aber $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist mehrdeutig lösbar.

4. Der Winkel zwischen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist

(a) $\frac{\pi}{6}$.

(b) $\frac{\pi}{3}$.

(c) $\frac{2\pi}{3}$.

$\surd$ (d) $\frac{5\pi}{6}$.

Wir verwenden $u \cdot v = |u|\,|v| \cos\phi$, wobei ϕ den Winkel zwischen u und v bezeichnet. Dann ist $\cos\phi = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Also ist $\phi = \frac{5\pi}{6}$.

5. Es sei 0_n die $n \times n$-Nullmatrix, E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (a) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $A + A = 0_n$.

Ist $2A = 0_n$ so gilt $2a = 0$ für alle Einträge a von A. Daraus aber folgt $a = 0$ für alle Einträge von A, also $A = 0_n$.

(b) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = 0_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

(c) E_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = E_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

(d) E_n und 0_n sind die einzigen $n \times n$-Matrizen A mit der Eigenschaft $AA = A$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

6. Für welche der folgenden 3×3-Matrizen A gilt

$$AB = BA = B$$

für alle 3×3-Matrizen B?

√ (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Für keine Matrix, da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt für die $n \times n$-Einheitsmatrix $E_n B = BE_n = B$ für alle $n \times n$-Matrizen B. Daher ist die erste Antwort richtig und die letzte falsch. Die beiden übrigen Matrizen A haben die geforderte Eigenschaft offenbar nicht, wie man leicht durch die Wahl $B = E_3$ nachprüft. So folgt auch, dass E_n im allgemeinen die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft ist.

7. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

Richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G'$.

√ (b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

Falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber x^2 keine Stammfunktion von 1.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

Richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F'$.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

Richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.

8. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx.$

$\checkmark$ (b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi.$

(c) $\displaystyle\int 2x^3 e^{x^2} \, dx = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \, dx.$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \, dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx.$

Man überprüft, die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) \; dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \; dx$$

und findet, dass

$$\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \ln\underset{\downarrow}{(x)}dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx,$$

$$\begin{aligned} \int \underset{\uparrow}{\sin(\varphi)}\underset{\downarrow}{\cos(\varphi)}d\varphi &= (-\cos(\varphi))\cos(\varphi) - \int (-\cos(\varphi))\,(-\sin(\varphi))\,d\varphi \\ &= -\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi, \end{aligned}$$

$$\int \underset{\uparrow}{\left(2xe^{x^2}\right)}\underset{\downarrow}{x^2}dx = e^{x^2}x^2 - \int e^{x^2}(2x)dx,$$

$$\int \underset{\uparrow}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,\underset{\downarrow}{x}dx = \frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\,x - \int \frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Daher ist der zweite Ausdruck die korrekte Anwtort.

9. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$. Auf die Konstante aufpassen!

✓ (a) $\frac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \frac{1}{x+1} + C$

(c) $\frac{2}{(x+1)^3} + C$

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+1} + C$

Wegen $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1-(x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x + (x+1)^{-1} + C\\ &= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C\\ &= \frac{x^2}{x+1} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können. Somit ist Antwort 1 korrekt.

10. Welche ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \\ y(0) & = \pi \end{cases}$$

im Intervall $(-2, 2)$?

✓ (a) $y(x) = \arccos \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $y(x) = \arccos \dfrac{x}{2} + \pi$.

(c) $y(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

(d) $y(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + \pi$.

Eine Stammfunktion von $\dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$ ist $\arccos z$. Substitution mit $z = \dfrac{x}{2}$ liefert $dz = \dfrac{1}{2} dx$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx &= \int \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx \\ &= \int \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \arccos z + C = \arccos \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \arccos \frac{x}{2} + C$$

und aus $y(0) = \pi$ folgt $C = \dfrac{\pi}{2}$.