

MC-Serie 10

Determinante, inverse Matrix und Unterräume

Einsendeschluss: 4. Dezember 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

1. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

- (a) 2.
- (b) 3.
- (c) 4.
- ✓ (d) 6.

Die Laplacesche Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 2 = 6.$$

2. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen für reelle $n \times n$ -Matrizen A und B sowie alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ **falsch**?

- (a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
siehe Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung.
- ✓ (b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.
Z.B. ist $\det(E_2 + E_2) = \det(2E_2) = 4 \neq 2$.
- (c) $\det(A^T) = \det A$.
siehe Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung.
- (d) $\det(AB) = \det B \det A$.
siehe Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung.

3. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = -A.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\det A = 4$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

(b) $\det B = -4$.

Die Determinante von A ist 2 und da $B = -A$ folgt

$$\det B = \det(-A) = (-1)^4 \det A = \det A$$

also muss $\det B = 2$.

✓ (c) $\det(AB) = 4$.

Es gilt $\det(AB) = \det A \det B = 2 \cdot 2 = 4$.

(d) $\det(BA) = -4$.

Es gilt $\det(BA) = \det B \det A = 2 \cdot 2 = 4$.

4. Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A = 0$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) stets unlösbar.

(b) nur lösbar für $\vec{b} = 0$.

(c) lösbar für alle \vec{b} , aber nicht unbedingt eindeutig lösbar.

✓ (d) lösbar nur für manche \vec{b} , aber für kein \vec{b} eindeutig lösbar.

Z.B. hat $A\vec{x} = \vec{b}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist aber unlösbar für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit sind die drei ersten Aussagen falsch. Eine eindeutige Lösung \vec{x} von $A\vec{x} = \vec{b}$ existiert für alle \vec{b} nur, wenn $\det A \neq 0$.

5. Welche ist die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}?$$

(a) $A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$

✓ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}.$

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}.$

Wir verwenden die Formel für die inverse Matrix von 2×2 Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{dann ist} \quad M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

6. Sei A^{-1} die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ inverse Matrix. Die Summe der Spalten von

A^{-1} ist

(a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

✓ (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Gauss-Algorithmus zur Ermittlung der Inversen liefert

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Somit ist die Summe der Spalten gleich

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. Welche Menge ist ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ?

(a) $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$.

Der Nullvektor $(0, 0, 0)$ ist nicht enthalten. Diese Menge ist zwar eine Ebene, bloss aber nicht durch den Ursprung.

(b) $\{(x, y, z) \mid x^2 = y^2\}$.

Dies ist keine lineare Bedingung und so sind beliebige Linearkombinationen von Vektoren nicht mehr in der Menge enthalten, z.B. sind $(1, 1, 0)$ und $(1, -1, 0)$ in der Menge enthalten, jedoch die Summe $(1, 0, 0)$ nicht ($1^2 \neq 0^2$). Diese Menge ist die Vereinigung von den Ebenen $x = y$ und $x = -y$.

✓ (c) $\{(x, y, z) \mid x = y = z\}$.

Hier handelt es sich um eine lineare Bedingung, insbesondere handelt es sich um die Diagonale in \mathbb{R}^3 , die Menge aller Vektoren von der Form $(x, y, z) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, und diese bildet einen Unterraum. Man überprüft leicht, dass sich sowohl der Nullvektor als auch Linearkombinationen von Elementen aus der Menge in der Menge befinden.

(d) $\{(x, y, z) \mid x = y \text{ oder } x = z\}$.

Man überprüft leicht, dass zwar die Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(1, 0, 1)$ in der Menge sind, jedoch die Summe $(2, 1, 1)$ nicht.

8. Welcher Vektor ist eine Linearkombination von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} ?$$

- (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ✓ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man überprüft, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Um zu zeigen, dass die übrigen Vektoren keine Linearkombinationen der angegebenen Vektoren sind, überprüft man, z.B für den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dass die folgende Gleichung keine Lösung besitzt

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In dem Fall, liefert der Gaußalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

also sind die Gleichungen für die einzelnen Koordinaten inkonsistent.

9. Welche der folgenden Aussagen bedeutet die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ eines Unterraumes V ?

- (a) Wenn $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, dann $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.
- (b) Es gibt c_1, c_2, \dots, c_n nicht alle Null mit $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.
- (c) $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ für alle $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.
- ✓ (d) $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$, nur wenn $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Dies folgt aus der Definition.

10. Welche ist eine Liste von linear unabhängigen Vektoren?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Es ist $2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, also sind die beiden Vektoren linear abhängig.

✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Man überprüft, dass die beiden Vektoren nicht kollinear sind und daher linear unabhängig.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die ersten beiden Vektoren sind zwar nicht kollinear, jedoch ist der Nullvektor nie linear unabhängig von anderen Vektoren, da für beliebige Vektoren \vec{v} gilt: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man überprüft, dass z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Also sind die drei Vektoren linear abhängig. Wenn man eine solche Gleichung nicht direkt findet, kann man den Kern der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ untersuchen. Ein nicht trivialer Vektor (c_1, c_2, c_3) im Kern

entspricht einer nicht trivialen Kombination $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.