MC-Serie 11

Basis, Dimension und Rang

Einsendeschluss: 11. Dezember 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind nie linear unabhängig.

Da $\mathbb{R}^3$ ein drei-dimensionaler Raum ist, können nur höchstens drei Vektoren linear unabhängig sein.

(b) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$ können linear unabhängig sein oder nicht.

Z.B. sind $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ drei linear unabhängige Vektoren und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

√ (c) Vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind immer ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$.

Diese vier Vektoren können linear abhängig sein und dann nur einen strikten Unterraum erzeugen, z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

(d) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$ sind nie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^4$.

Da $\mathbb{R}^4$ vier-dimensional ist muss ein Erzeugendensystem mindestens aus 4 Vektoren bestehen.

2. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Die Lösungsmenge hat Dimension gleich

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

Das Gauss-Verfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gibt es zwei freie Parameter (z.B. $x_3 = t,\ x_4 = u$) und die Dimension der Lösungsmenge ist gleich 2. Man kann auch eine Basis angeben: die Lösungen sind die Vektoren der Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t - u, 2t, t, u) = t\,(1, 2, 1, 0) + u\,(-1, 0, 0, 1),\ u, t \in \mathbb{R},$$

deshalb ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis der Lösungsmenge.

3. Der Nullraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Dimension gleich

(a) 0.

√ (b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

Das Gauss-Verfahren liefert eine Stufenformmatrix mit zwei führenden Einsen (d.h. zwei Zeilen die nicht Null sind), deshalb gibt es $3-2 = 1$ freien Parameter.

4. Der Spaltenraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Dimension gleich

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

Man sieht, dass die drei Spalten linear abhängig sind (d.h. der Kern dieser Matrix ist nicht trivial), aber z.B. sind die ersten zwei Spalten nicht kollinear.

5. Der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 1.

√ (b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Das Gaussverfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist der Rang der Matrix 2.

6. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\operatorname{Rang}(A) = n$.

(b) Das Gauss-Verfahren auf die Matrix A angewendet erreicht eine Stufenform mit n führenden Einsen.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

$\surd$ (d) Der Nullraum von A ist $\mathbb{R}^n$.

Das folgt aus der Theorie der Vorlesung:
Da es genau n Variablen/Spalten gibt, bedeuten die Aussagen (a),(b) und (c), dass der Nullraum von A trivial ist, d.h. $\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

7. Sei A eine *quadratische* $n \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\det A = 0$.

(b) $\operatorname{Rang} A \neq n$.

(c) Das System $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt unendlich viele Lösungen.

$\surd$ (d) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt unendlich viele Lösungen für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Das folgt aus der Theorie der Vorlesung:
Für eine *quadratische* Matrix A bedeutet jede Aussage (a),(b) und (c), dass A *nicht* invertierbar ist. Und wenn A nicht invertierbar ist, gibt es Vektoren $\vec{b}$, für welche das System $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist.

8. Sei A eine *quadratische* $n \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\det A \neq 0$.

(b) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

$\surd$ (c) $\operatorname{Rang} A \neq 0$.

(d) Der Nullraum von A ist $\left\{\vec{0}\right\}$.

Das folgt aus der Theorie der Vorlesung:
Für eine *quadratische* Matrix A bedeutet jede Aussage (a),(b) und (d), dass A invertierbar ist. Der Rang einer $n \times n$ invertierbaren Matrix ist genau n (und nicht eine beliebige positive Zahl).

9. Sei A eine 4×3 Matrix mit Rang 2. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$

(a) leer.

(b) ein Punkt.

$\surd$ (c) eine Gerade.

(d) eine Ebene.

Die Matrix hat 4 Zeilen und 3 Spalten. Das bedeutet es gibt 4 Bedingungen an 3 Variablen. Dass der Rang der Matrix 2 ist, bedeutet dass nur 2 Bedingungen linear unabhängig sind. Daher gibt es 1 freien Parameter, respektive die Formel für die Dimension des Lösungsraumes, dim (Lösungsmenge) = (Anzahl von Variablen) − (Rang der Koeffizientenmatrix), liefert $1 = 3 - 2$ und somit ist der Lösungsraum 1-dimensional, also eine Gerade.

10. Sei A eine 3×4 Matrix mit Rang 2. Was ist die Dimension der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$?

(a) 0.

(b) 1.

$\surd$ (c) 2.

(d) 3.

Da die Matrix eine 3×4 Matrix ist, hat sie 3 Zeilen und 4 Spalten, also ist $A\vec{x} = \vec{0}$ ein LGS in 4 Variablen. Die Gleichung für die Dimension der Lösungsmenge dim (Lösungsmenge) = (Anzahl von Variablen)−(Rang der Koeffizientenmatrix), liefert $2 = 4 - 2$.