

## MC-Serie 12

### Eigenwerte und Eigenvektoren

**Einsendeschluss: 18. Dezember 2015, 16:00**

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- (c)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- (d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

2. Welche der folgenden Aussagen ist **korrekt**?

- (a) Jede reelle  $2 \times 2$ -Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.
- (b) Jede reelle  $2 \times 2$ -Matrix hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren.
- (c) Besitzt eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix nur einen Eigenwert, so sind alle ihre Eigenvektoren kollinear (d.h. linear abhängig).
- (d) Besitzt eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix nur einen Eigenwert, so ist dieser Eigenwert reell.

3. Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat 0 als Eigenwert?

- (a)  $A$ .
- (b)  $B$ .
- (c)  $C$ .
- (d) Keine. 0 kann *per definitionem* kein Eigenwert sein.

4. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- (a) Die Eigenwerte einer invertierbaren Diagonalmatrix sind alle  $\neq 0$ .
- (b) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix ist auch ein Eigenvektor der inversen Matrix.
- (c) Jede Matrix mit negativer Determinante hat mindestens einen negativen Eigenwert.
- (d) Jede quadratische Matrix mit reellen Koeffizienten hat reelle Eigenwerte.

5. Welche Aussage über eine *reelle* quadratische Matrix ist **falsch**?

- (a) Die komplexen Eigenwerte treten immer als Paare komplex konjugierter Zahlen auf.
- (b) Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind stets reell.
- (c) Eine  $4 \times 4$  Matrix besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.
- (d) Eine  $5 \times 5$  Matrix besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

6. Die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist

- (a) diagonalisierbar und invertierbar.
- (b) diagonalisierbar aber nicht invertierbar.
- (c) nicht diagonalisierbar aber invertierbar.
- (d) nicht diagonalisierbar und nicht invertierbar.

7. Welche der folgenden Aussagen ist **korrekt**?

- (a) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.
- (b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.
- (c) Die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix sind alle nicht Null.
- (d) Die Eigenwerte einer diagonalisierbaren Matrix sind alle nicht Null.

8. Sei  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ . Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a)  $A$  hat Eigenwerte  $3 \pm 4i$ .
- (b)  $A$  hat Eigenwerte  $-3 \pm 4i$ .
- (c)  $A$  hat Eigenwerte  $4 \pm 3i$ .
- (d)  $A$  hat Eigenwerte  $-4 \pm 3i$ .

9. Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- (a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Basis des Eigenraumes  $\mathcal{E}_2$ .
- (b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist eine Basis des Eigenraumes  $\mathcal{E}_2$ .
- (c)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Eigenbasis für  $A$ .
- (d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist keine Eigenbasis für  $A$ .

10. Für welche Matrix ist die Summe der Eigenwerte gleich 16?

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

(b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$

(c)  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(d)  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$