Dr. Ana Cannas

MC-Serie 13

Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Einsendeschluss: 18. Dezember 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer grösser als 10 bleibt.

(b) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$ bleibt.

(c) $|\vec{x}(t)|$ stets konstant gleich 1 bleibt.

(d) $|\vec{x}(t)|$ zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$ oszilliert.

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

4. Ein System wird durch das folgende diskrete Modell beschrieben:

$$\begin{cases} x(N+1) = -3x(N) + 4y(N) \\ y(N+1) = -2x(N) + 3y(N) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Was ist der Zustand von $\begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 5^8 \\ 4^8 \end{pmatrix}$

5. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $2x(1) + y(1) = e^{-4}$.

(b) $x(1) + 2y(1) = e^{-4}$.

(c) $2x(1) + y(1) = 2e^{3}$.

(d) $x(1) + 2y(1) = 2e^{3}$.

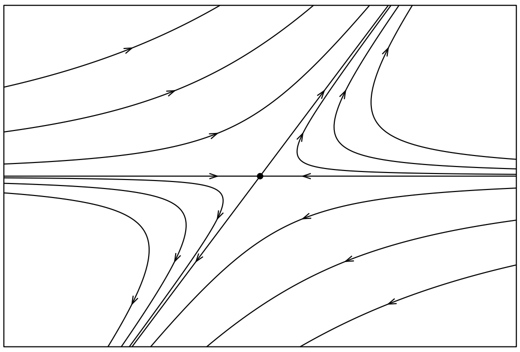
Hinweis: Schreibe das System um als

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t), \\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

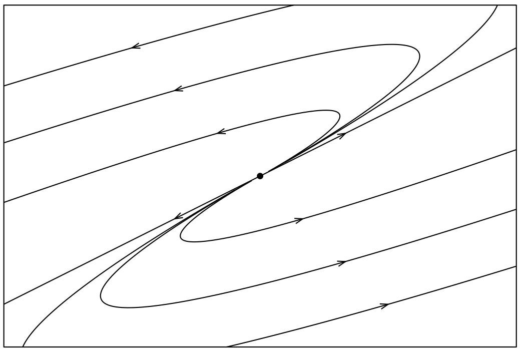
mit geeigneten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

6. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

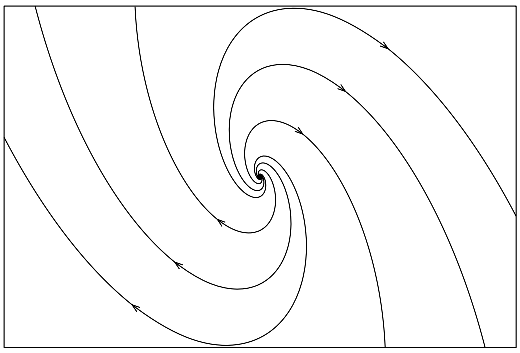
(a)



(b)



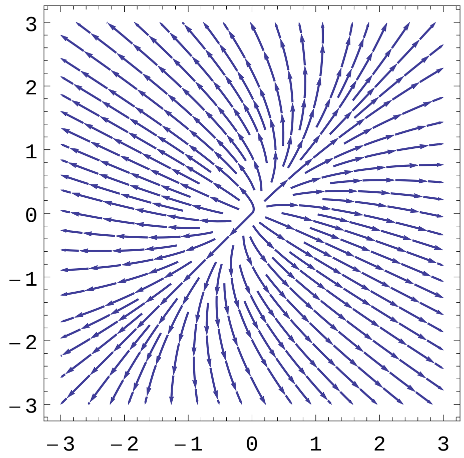
(c)



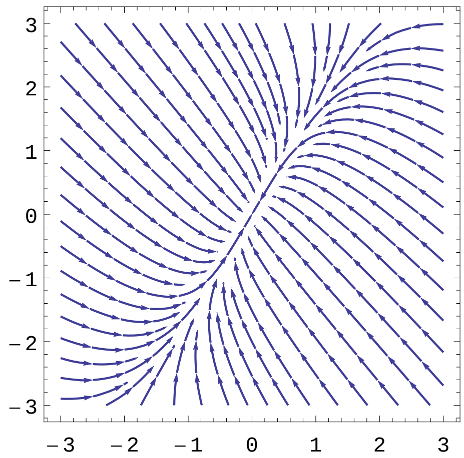
(d) in keinem Fall.

7. Was ist das Phasenportrait des Systems

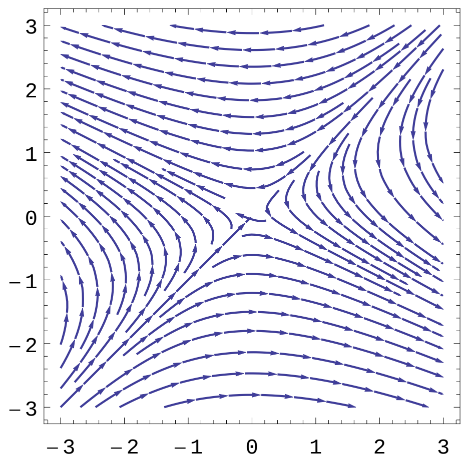
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$



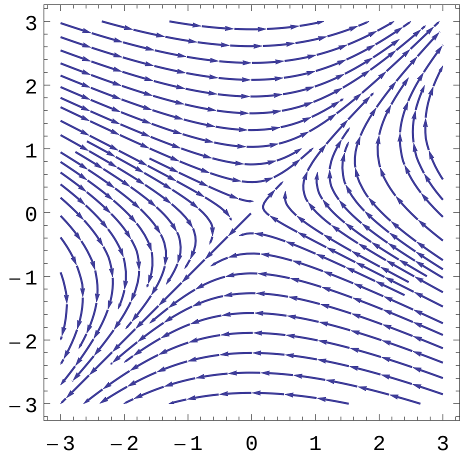
(a)



(b)



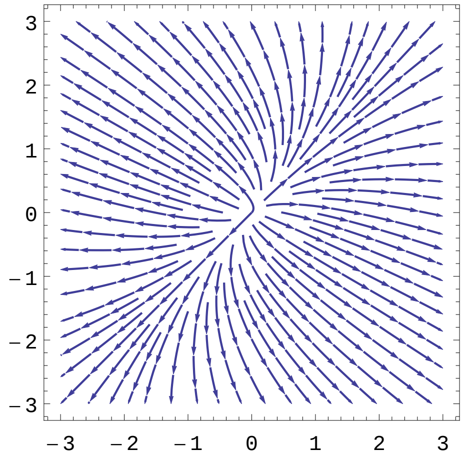
(c)



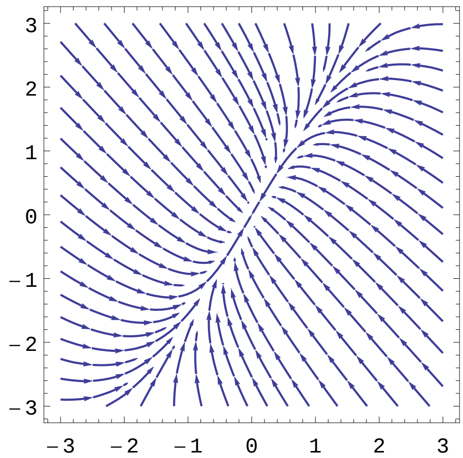
(d)

8. Was ist das Phasenportrait des Systems

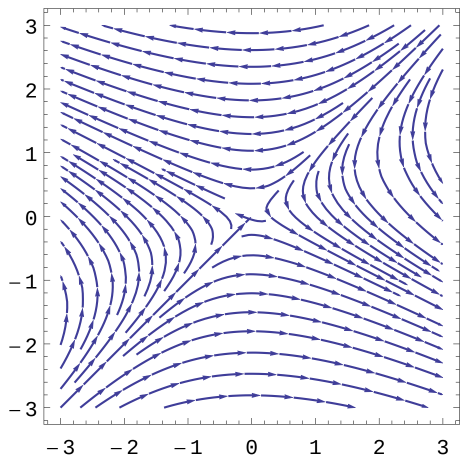
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \;?$$



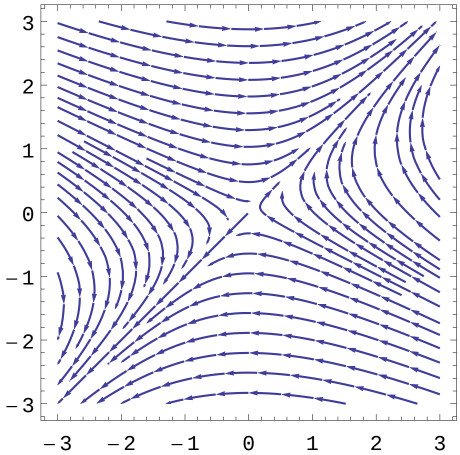
(a)



(b)



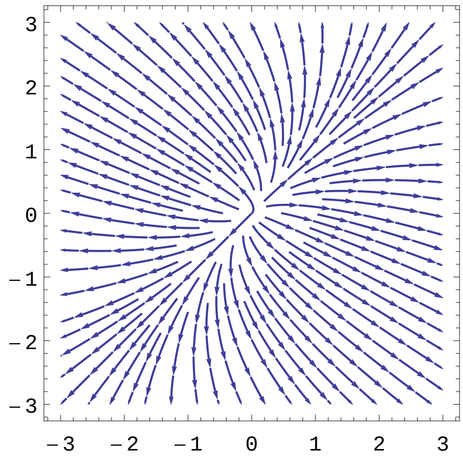
(c)



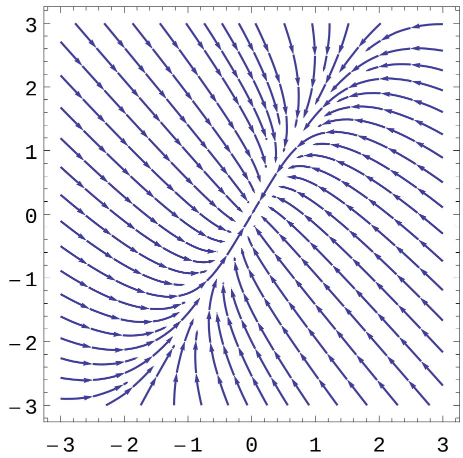
(d)

9. Was ist das Phasenportrait des Systems

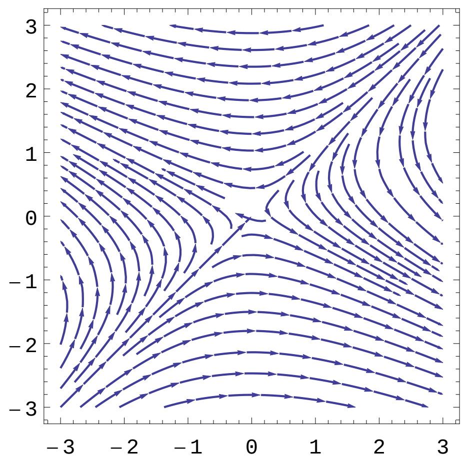
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$



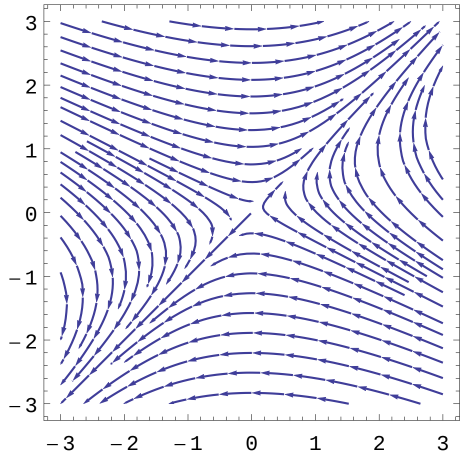
(a)



(b)



(c)

(d) 

10. Wir betrachten das System

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

Dann gilt:

(a) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

(b) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.

(c) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

(d) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.