Dr. Ana Cannas

MC-Serie 13

Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Einsendeschluss: 23. Dezember 2015, 16:00

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

√ (d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Mit $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ist auch $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 4. Die allgemeine Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$ ist daher von der Form

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{0t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}.$$

Also ist die letzte Antwort richtig.

2. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer grösser als 10 bleibt.

√ (b) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$ bleibt.

(c) $|\vec{x}(t)|$ stets konstant gleich 1 bleibt.

(d) $|\vec{x}(t)|$ zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$ oszilliert.

Die Matrix $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -4 und 3 zu Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann ist die Lösung von der Form $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-4t} + 2k_2 e^{3t} \\ 7k_2 e^{3t} \end{pmatrix}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Mit $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt, dass $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$. Daher ist $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ 0 \end{pmatrix}$ und strebt für $t \to +\infty$ gegen $\vec{0}$ und somit ist die zweite Antwort korrekt.

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

√ (a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\vec{x}(t) = k_1 e^{3t} \left(\cos(30t) v_1 + \sin(30t) v_2\right) + k_2 e^{3t} \left(\cos(30t) v_1 - \sin(30t) v_2\right),$$

wobei v_1, v_2 die Eigenvektoren zu $3 \pm 30i$ sind. Da $\cos(30t)$ und $\sin(30t)$ beschränkt sind, gilt

$$|\vec{x}(t)| \to +\infty \text{ für } t \to +\infty.$$

Somit ist die erste Antwort korrekt.

4. Ein System wird durch das folgende diskrete Modell beschrieben:

$$\begin{cases} x(N+1) = -3x(N) + 4y(N) \\ y(N+1) = -2x(N) + 3y(N) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Was ist der Zustand von $\begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

√ (b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 5^8 \\ 4^8 \end{pmatrix}$

Wir betrachten also das Modell

$$\begin{pmatrix} x(N+1) \\ y(N+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(N) \\ y(N) \end{pmatrix}$$

für

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, zugehörige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir wollen

$$\begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix} = A^9 \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix}$$

berechnen, wobei aber

$$A^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^9 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

gilt. Also

$$\begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t),\\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t),\end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $2x(1) + y(1) = e^{-4}$.

(b) $x(1) + 2y(1) = e^{-4}$.

✓ (c) $2x(1) + y(1) = 2e^{3}$.

(d) $x(1) + 2y(1) = 2e^{3}$.

Hinweis: Schreibe das System um als

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + by(t),\\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t)\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}+\dot{y} &=& 4x\\ \dot{x}-\dot{y} &=& 6y\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl}2\dot{x} &=& 4x+6y\\ 2\dot{y} &=& 4x-6y\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl}\dot{x} &=& 2x+3y\\ \dot{y} &=& 2x-3y\end{array} \Leftrightarrow \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

mit $\vec{x} = (x, y)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)\,(\lambda-3)\,,$$

die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Aus

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -2a, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 3d,$$

erhalten wir die zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &= C_1 + 3C_2,\\ y(0) = 0 &= -2C_1 + C_2, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad C_1 = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{2}{7}$$

und somit

$$x\,(t) = \frac{1}{7}e^{-4t} + \frac{6}{7}e^{3t} \qquad \text{und} \qquad y\,(t) = -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}e^{3t}.$$

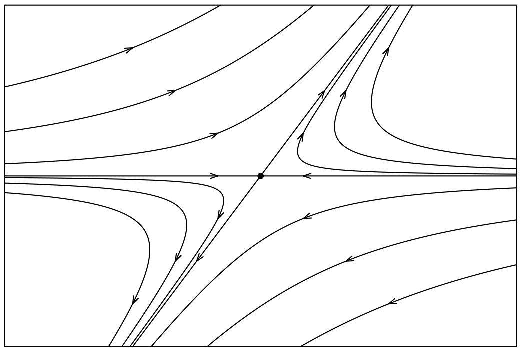
Dann ist

$$2x(1) + y(1) = \frac{2}{7}e^{-4} + \frac{12}{7}e^{3} - \frac{2}{7}e^{-4} + \frac{2}{7}e^{3} = 2e^{3}.$$

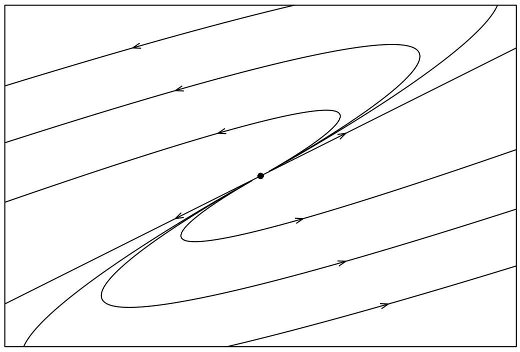
Also ist nur die dritte Antwort richtig.

6. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

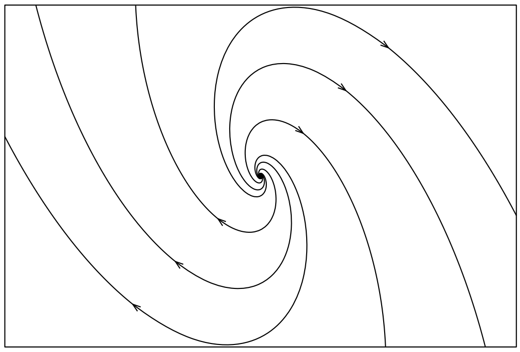
(a)



(b)



√ (c)



(d) in keinem Fall.

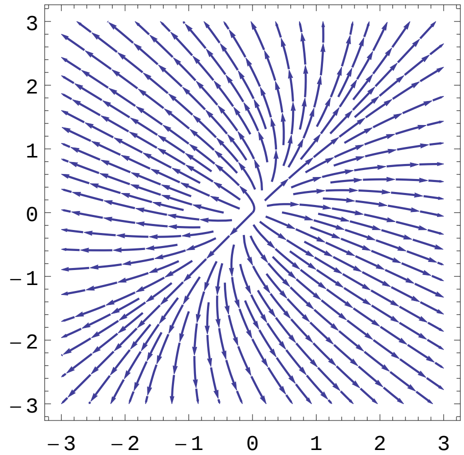
Die Bahnkurven der Abbildung in c) weisen spiralförmigen Charakter auf. Diese entsprechen genau Lösungen, deren Komponenten Linearkombinationen folgender Funktionen sind

$$e^{at}\cos(bt) \text{ und } e^{at}\sin(bt),\ a, b \neq 0.$$

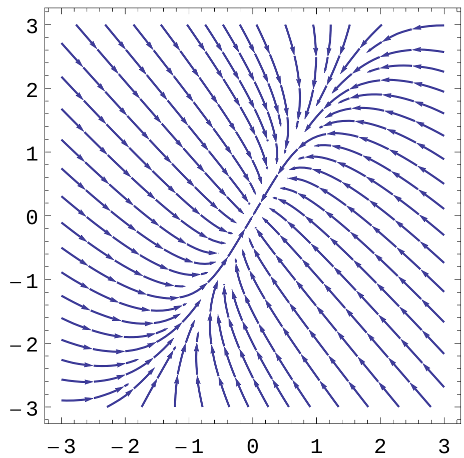
7. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

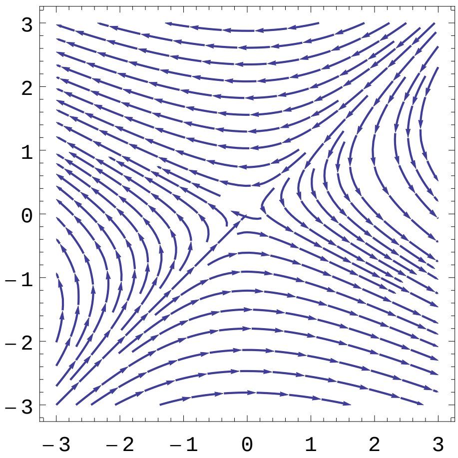
(a)



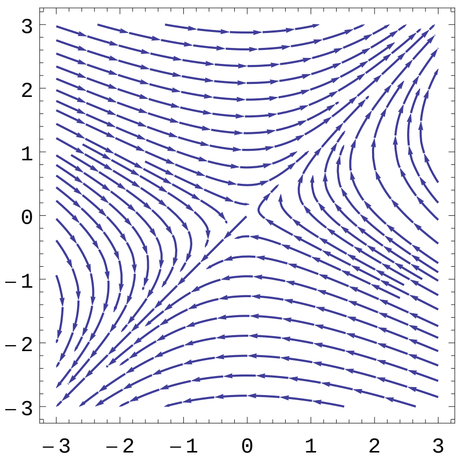
(b)



√ (c)



(d)

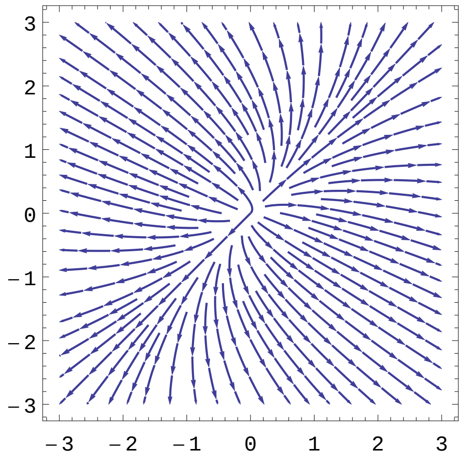


Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

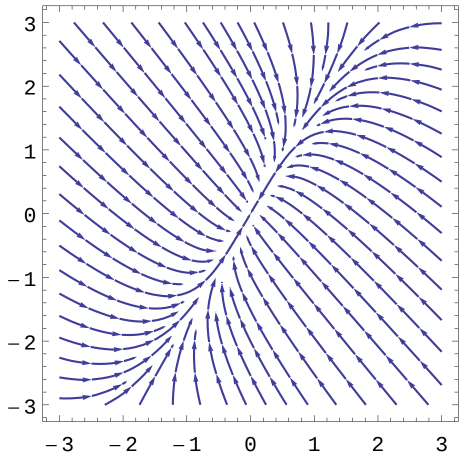
8. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \; ?$$

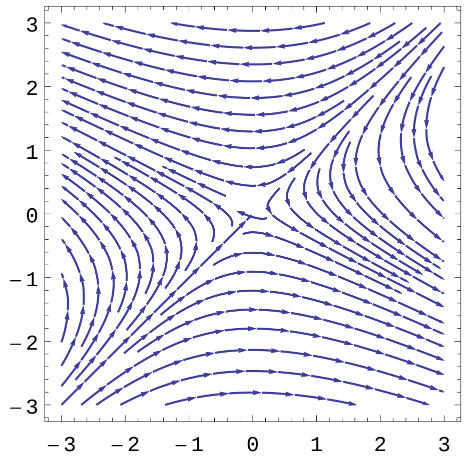
√ (a)



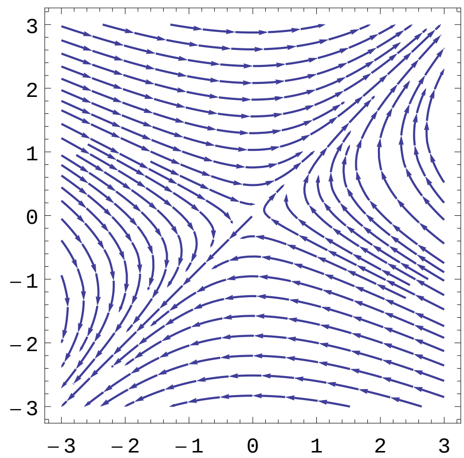
(b)



(c)



(d)

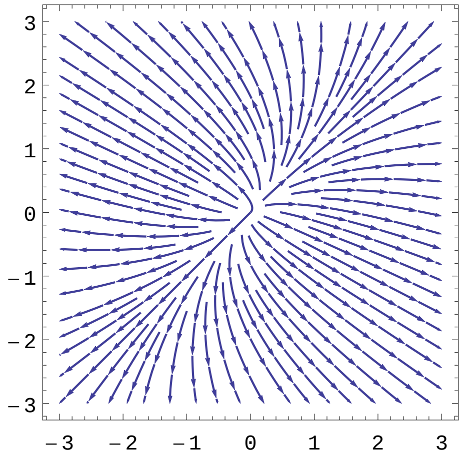


Die Matrix $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

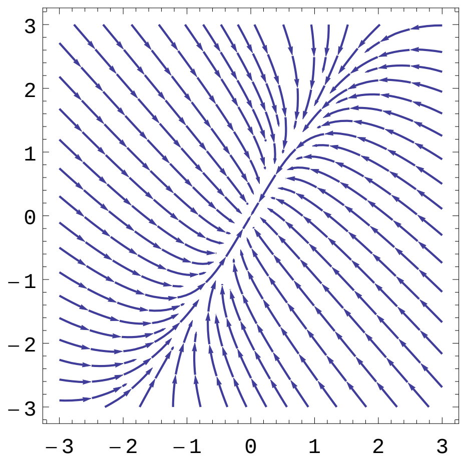
9. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

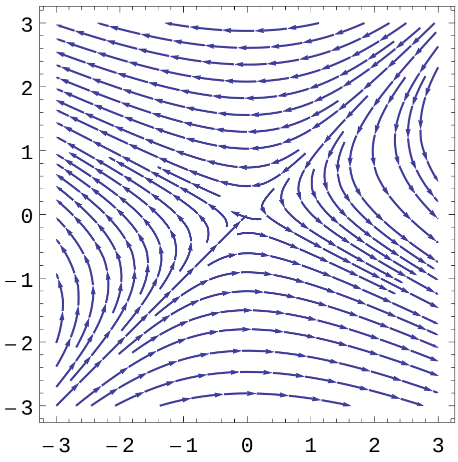
(a)



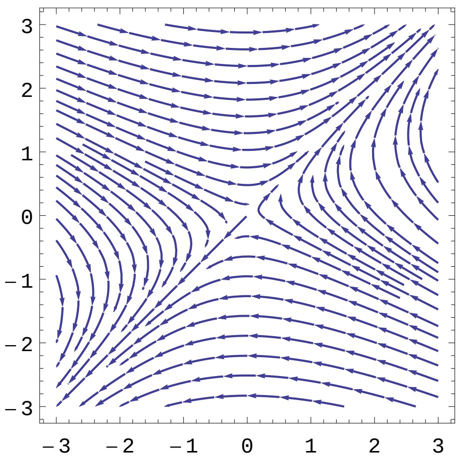
(b)



(c)



√ (d)



Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = 3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. Wir betrachten das System

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

Dann gilt:

(a) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

(b) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.

(c) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

√ (d) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = 3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Die Bahnkurven streben also auswärts vom Ursprung weg und sind nicht geschlossen. Übrigens, Aufgabe 9 (Antwort d) zeigt das Phasenportrait.