I Differentialrechnung

I.1. Funktionen und ihre Graphen

Funktionen sind Zuordnungen, die wie Input-Output-Maschinen funktionieren. Diese Idee macht sie zu einem der universellsten und am häufigsten benutzten Konzepte der Mathematik. Ein Graph erlaubt es, eine Funktion mit einem Bild darzustellen.

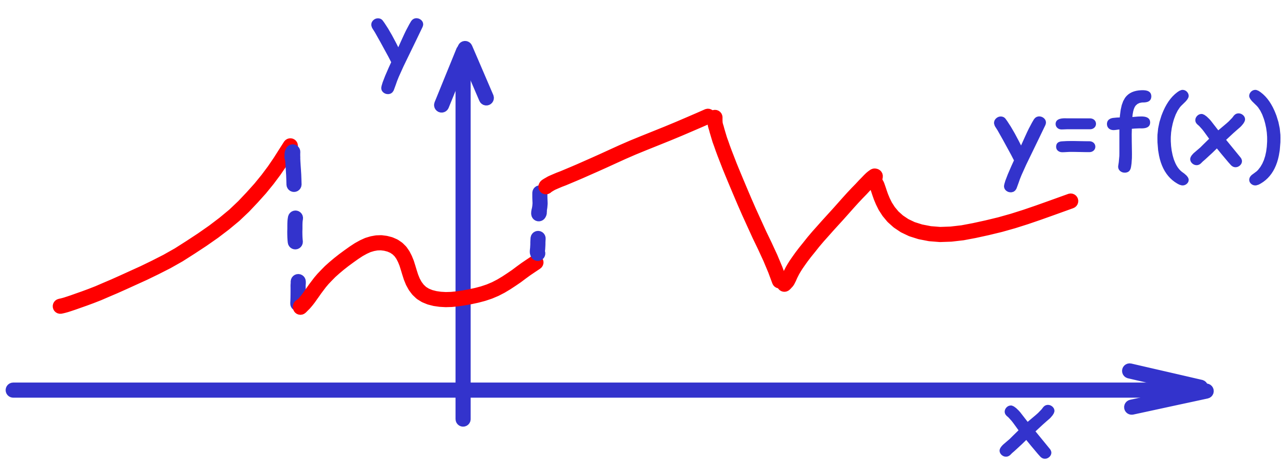
Funktionen

Man sagt, dass „y eine Funktion von x ist" und schreibt „$y=f(x)$", wenn der Wert der veränderlichen Grösse, y, vom Wert der anderen variablen Grösse, x, abhängt.

Schreibweise mit Zuordnungspfeil:

$$\underset{\text{Variable}}{x} \longmapsto \underset{\text{Funktionswert}}{y=f(x)}$$

Graph:



Def Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.

Definitionsbereich

Wertebereich

Für eine reelle Funktion einer reellen Variable sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$.

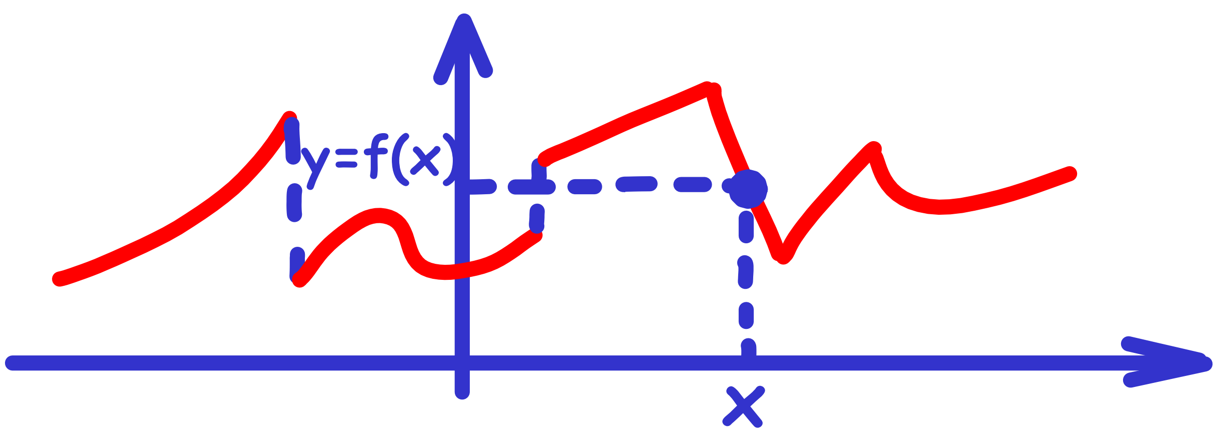
Menge aller reellen Zahlen

Oft ist eine Funktion durch eine Formel gegeben und der Definitionsbereich ist die maximale Teilmenge von $\mathbb{R}$, für die die Formel reelle y-Werte liefert.

$\in$ kennzeichnet "in":
"Element x ist in Menge D enthalten"

Def Ist $f(x)$, $x \in D$, eine reelle Funktion einer reellen Variablen mit dem Definitionsbereich D, so besteht ihr <u>Graph</u> aus den ebenen Punkten mit Koordinaten

$$\boxed{(x,y), \text{ wobei } x \in D \text{ und } y=f(x).}$$



Der Graph einer Funktion zeigt visuell ihr Verhalten an.

Graphen Diskussion

Eigenschaften und Verlauf einer Funktion

- **Definitionsbereich**

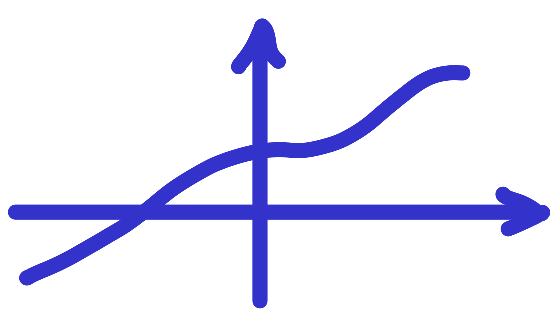
  Für welche Elemente x ist die Funktion f(x) überhaupt definiert?

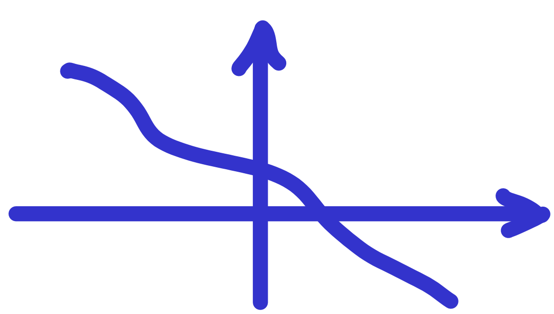
- **Wertebereich**

  Welche Werte y werden von f(x) angenommen?

- **Monotonie**

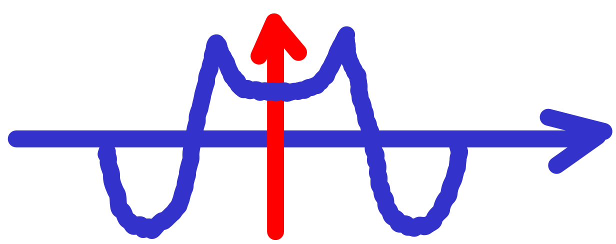
  Ist die Funktion (streng) monoton wachsend oder fallend?

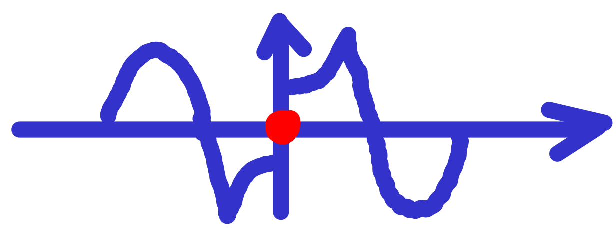




Symmetrieverhalten

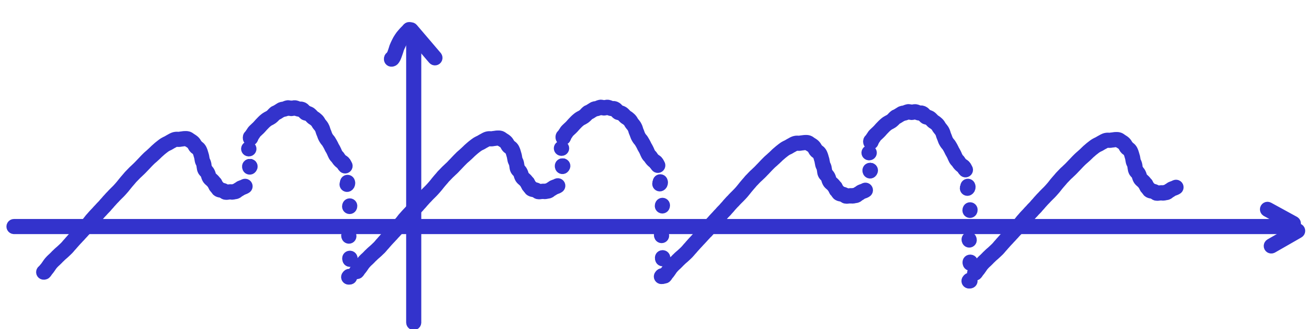
Ist die Funktion gerade $\boxed{f(x)=f(-x)}$
d.h. ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse?
Oder ist sie ungerade $\boxed{f(x)=-f(-x)}$
d.h. ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Ursprung?





Periodizität

Ist die Funktion periodisch?
D.h. gibt es eine Zahl T, so dass $f(x)=f(x+T)$ *für alle x?*
Die Zahl T heisst dann eine Periode.



- **Nullstellen**
  Für welche x_0 ist $f(x_0)=0$?
- **Polstellen (Unendlichkeitsstellen)**
  Für welche x_0 ist $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{\text{siehe nächstes Mal}}$ unendlich?
- **Fixpunkte**
  Für welche x_0 ist $f(x_0)=x_0$?
- **Asymptote im Unendlichen**
  Was ist das Verhalten von $f(x)$, wenn x nach +/- Unendlich strebt?
- **Stetigkeit**
- **Differenzierbarkeit**

  siehe nächstes Mal
  ⋮
- **Extremwerte**
  Wo besitzt f (relative/absolute) Maxima und Minima?
- **Wendepunkte und Sattelpunkte**
- **Etc**

Umkehrfunktion

Def Eine Funktion f heisst <u>injektiv</u> (oder linkseindeutig), wenn

$$f(x) = f(x_0) \Rightarrow x = x_0$$

bedeutet "impliziert"

für alle x und x_0 in ihrem Definitionsbereich.

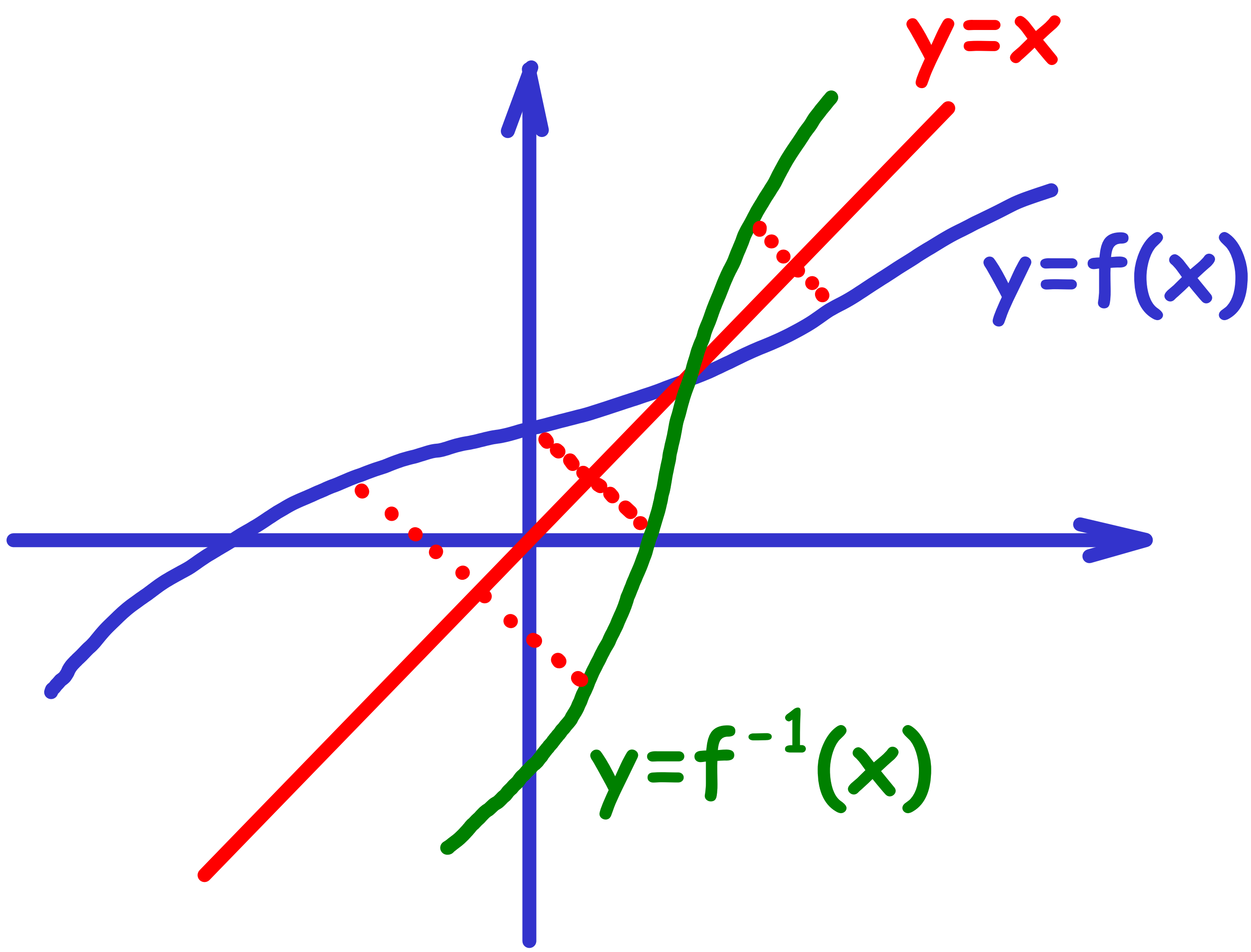
Falls f injektiv ist, dann gibt es eine <u>Umkehrfunktion</u> oder <u>inverse Funktion</u> f^{-1} definiert durch:

$$\boxed{f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)}$$

bedeutet "äquivalent"

f^{-1} ordnet jedem Wert von f, $y=f(x)$, das zugehörige Argument x zu.

Die Spiegelung des Graphen der Funktion f an der Geraden y=x ergibt den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}.



Ⓘ Differentialrechnung

I.2. Elementare Funktionen

Die elementaren Funktionen sind die immer wieder auftauchenden, grundlegenden Funktionen, aus denen sich viele andere Funktionen bilden lassen und die sich oft als Lösungen reeller Probleme ergeben.

Elementare Funktionen

- ## Wurzelfunktion

$$\boxed{\sqrt{x}} \qquad D = W = \mathbb{R}_0^+$$

- ## Potenzfunktionen

$$\boxed{x^a}$$

Basis ist variabel

Exponent ist fest

Der Definitionsbereich hängt vom Exponenten ab.

- ## Polynomfunktionen

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

- ## Rationale Funktionen

$$\boxed{\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}}$$

Quotient zweier Polynome

- **Exponentialfunktionen**

Exponent ist variabel

$$\boxed{e^x} \qquad \boxed{e^{\lambda x}} \qquad \boxed{a^x} = e^{x \ln a}$$

Basis ist fest

- **Logarithmusfunktionen**

$$\boxed{\ln x} \qquad \boxed{\log_a x} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

- **Hyperbelfunktionen**

$$\boxed{\sinh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Sinus hyperbolicus

$$\boxed{\cosh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Cosinus hyperbolicus

$$\boxed{\tanh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Tangens hyperbolicus

$$\boxed{\coth x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Cotangens hyperbolicus

- Trigonometrische Funktionen

$$\boxed{\sin x} \qquad \boxed{\cos x}$$

$$\boxed{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{\cot x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Arkusfunktionen
(sind die Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen)

$\boxed{\arcsin x}$ $D=[-1,1]$
$W=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\boxed{\arccos x}$ $D=[-1,1]$
$W=[0,\pi]$

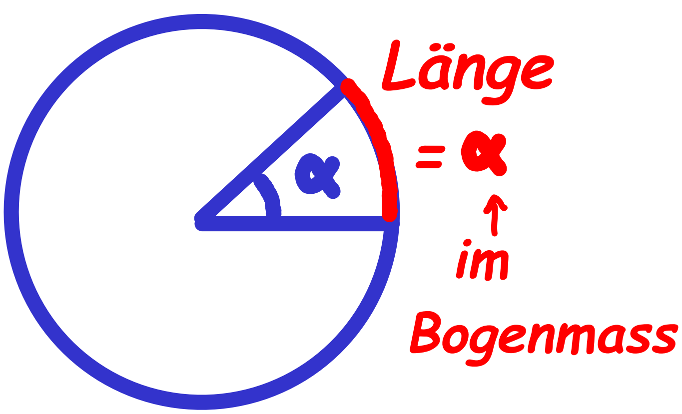
$\boxed{\arctan x}$ $D=\mathbb{R}$
$W=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\boxed{\text{arccot}\, x}$ $D=\mathbb{R}$
$W=(0,\pi)$

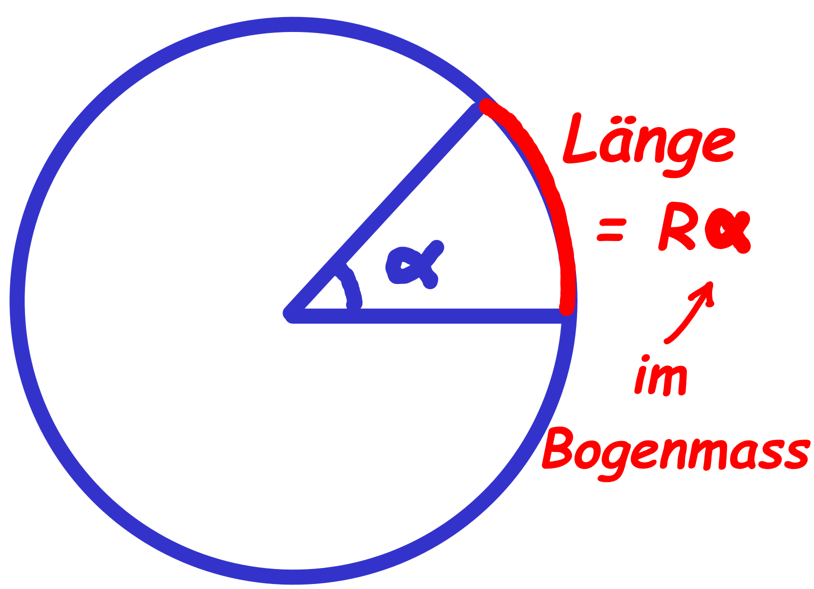
Bogenmass

In der Mathematik I / II
sind die Argumente (Winkel)
der trigonometrischen Funktionen
stets im Bogenmass gegeben.

Das Bogenmass beschreibt die
Länge des entsprechenden
Kreisbogens vom Radius 1.

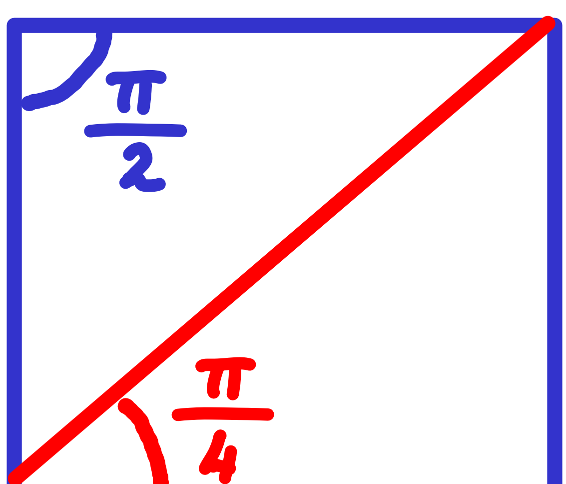


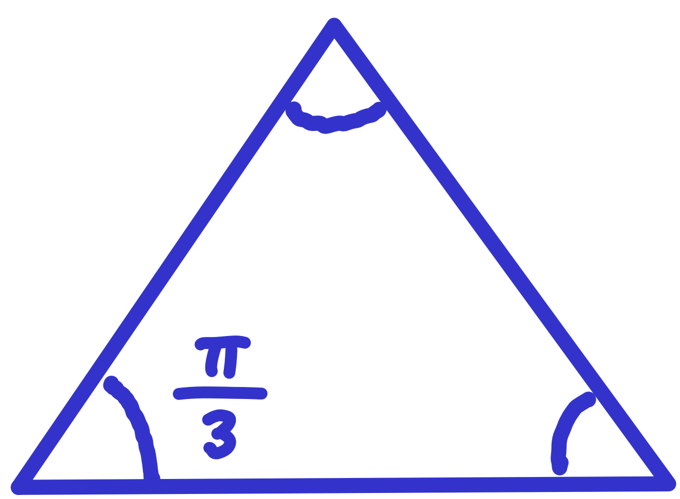
Einheitskreis



Kreis vom Radius R

Bogenmass	Gradmass	
2π	$360°$	Vollkreis
π	$180°$	Halbkreis
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	rechter Winkel
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	Winkel in einem gleichseitigen Dreieck
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	Diagonale in einem Quadrat





I Differentialrechnung

I.3. Grenzwerte

Um momentane Änderungsraten, wie die Geschwindigkeit eines Körpers, zu definieren ist das Konzept des Grenzwerts grundlegend.

Grob gesagt bezeichnet der Grenzwert oder Limes einer Funktion f(x) an einer bestimmten Stelle x_0,

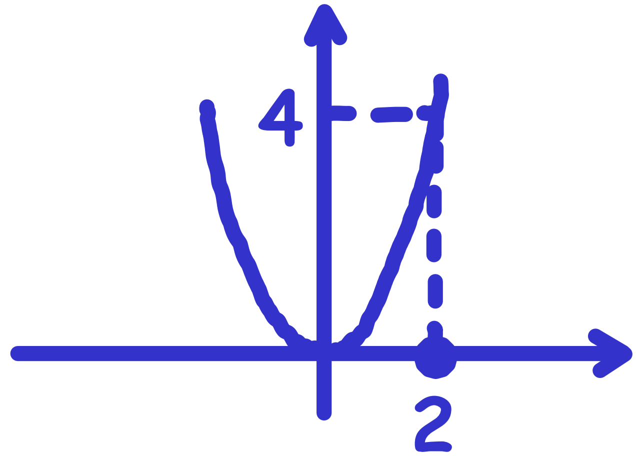
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \, ,$$

denjenigen Wert L, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen, auch wenn wir plus und minus Unendlich als Grenzwert L erlauben.

<u>Bsp</u> $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

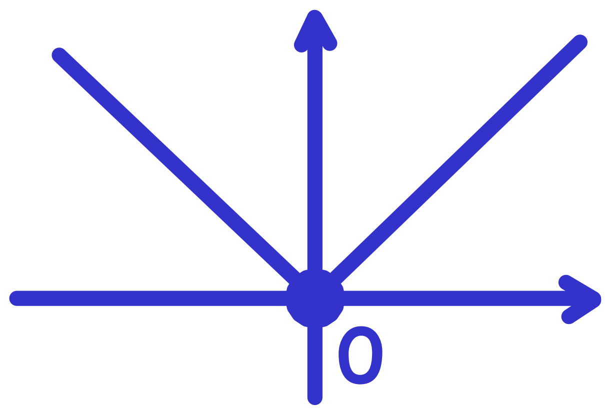
Graph:



$\blacksquare$

<u>Bsp</u> $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$

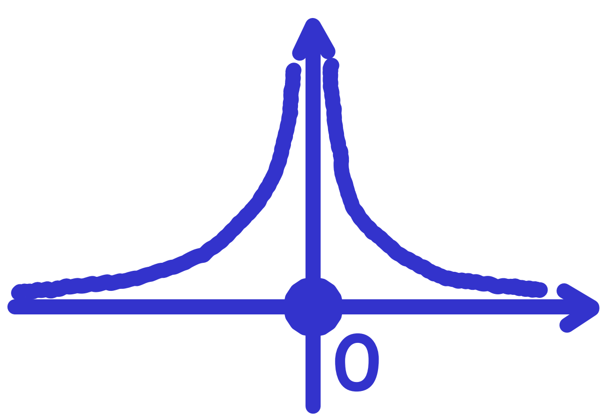
Graph:



$\blacksquare$

<u>Bsp</u> $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

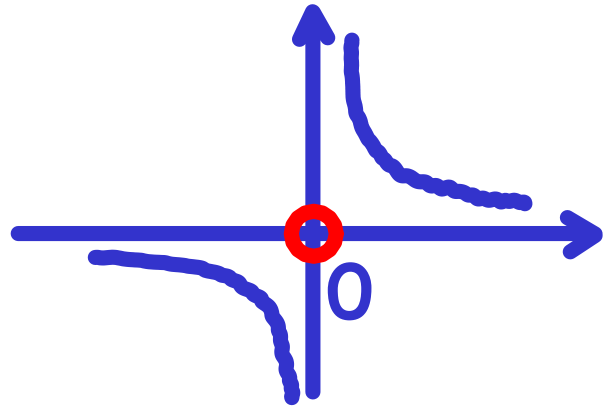
Graph:



$\blacksquare$

Bsp $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht

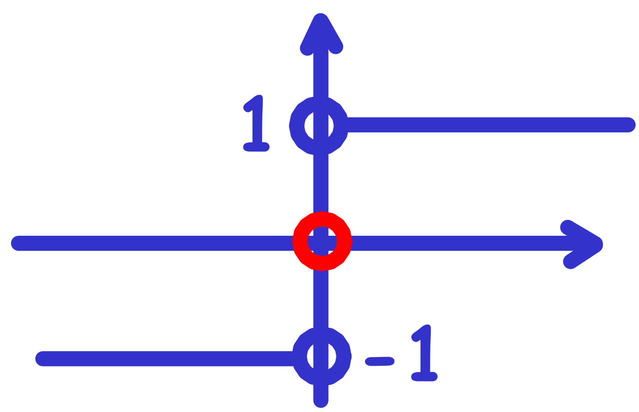
Graph:



■

Bsp $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ existiert nicht

Graph:



■

Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie.

Der Grenzwert einer rationalen Funktion, wobei der Grenzwert des Nenners null ist, z.B.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-5x+6},$$

lässt sich manchmal durch das Ausklammern von gemeinsamen Faktoren im Zähler und Nenner berechnen:

$$\frac{2-x}{x^2-5x+6} = \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-3}$$

(für $x \neq 2$ und $x \neq 3$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{x-3} = 1.$$

Die formale Grenzwertdefinition muss man für die verschiedenen Fälle unterschiedlich schreiben, wobei die Stelle x_0 und der Grenzwert L eine Zahl oder +/- Unendlich sind. Wir schreiben alle diese Definitionen hier nicht auf, ausser den folgenden Fall.

- Wenn beide x_0 und L Zahlen sind, hat der Ausdruck

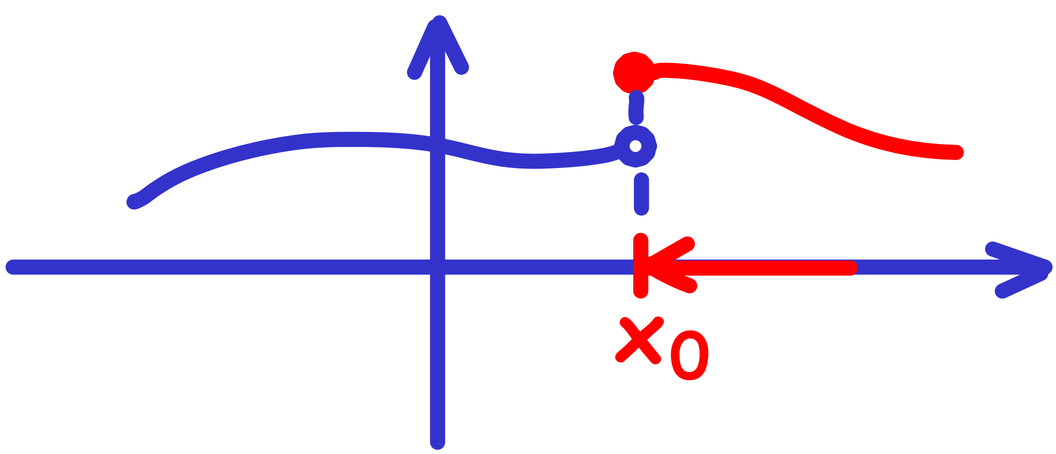
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

die folgende formale Definition:

$$\boxed{\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert } \delta > 0, \text{ so dass } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

Ein rechtsseitiger Grenzwert ist ein Grenzwert, bei dem x nur von rechts (d.h. $x>x_0$) gegen x_0 geht:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$



Ähnlich für einen linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$$

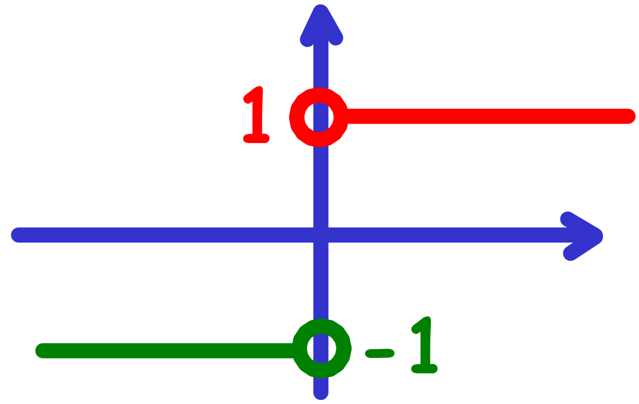
Bsp Die Funktion $\frac{x}{|x|}$ ist für alle $x \neq 0$ definiert und $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ existiert nicht.

Aber beide einseitigen Grenzwerte existieren:

$$\lim_{x \to 0^+} = 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \to 0^-} = -1.$$

Graph:

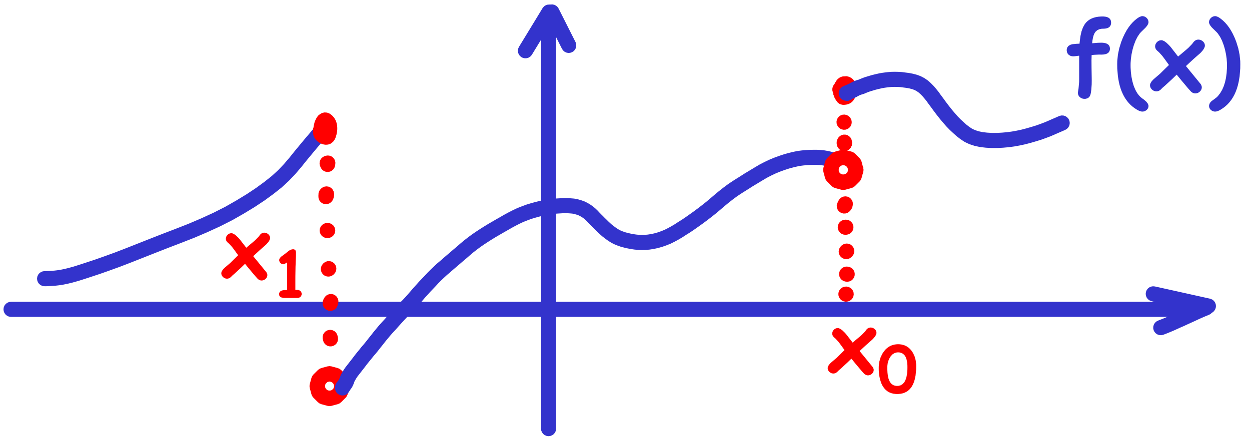


(I) Differentialrechnung

I.4. Stetigkeit und der Zwischenwertsatz

Eine Funktion heisst stetig, wenn hinreichend kleine Änderungen in der Variablen nur zu beliebig kleinen Änderungen des Funktionswertes führen.
Das heisst insbesondere, dass im Funktionsgraphen keine Sprünge auftreten.

Stetigkeit



Diese Funktion ist bei x_0 und x_1 nicht stetig.

Def Eine Funktion f heisst <u>an der Stelle x_0 stetig</u>, falls

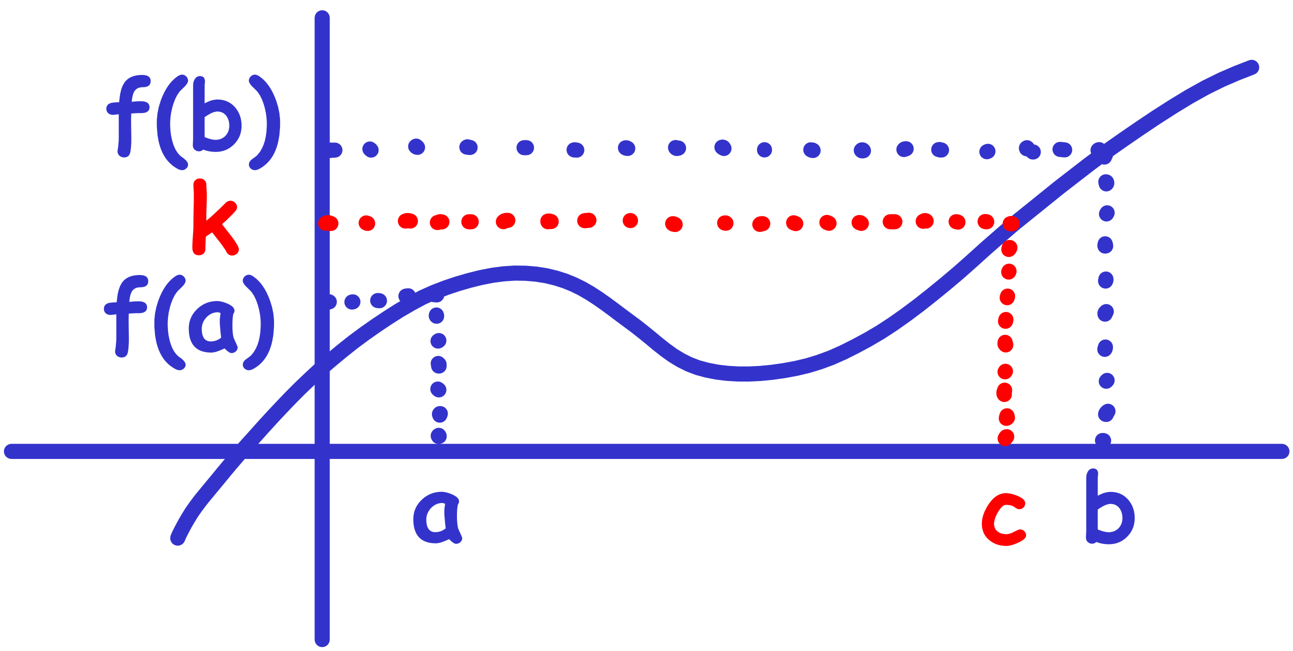
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heisst <u>stetig</u>, wenn sie an allen Stellen in ihrem Definitonsbereich stetig ist.

f heisst an einer Randstelle x_0 ihres Definitionsbereiches stetig, wenn der geeignete einseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist.

Zwischenwertsatz

Ist eine Funktion f(x) auf einem abgeschlossenen, endlichen Intervall [a,b] stetig, dann gibt es für alle k zwischen f(a) und f(b) ein $c \in [a,b]$ mit $f(c)=k$.

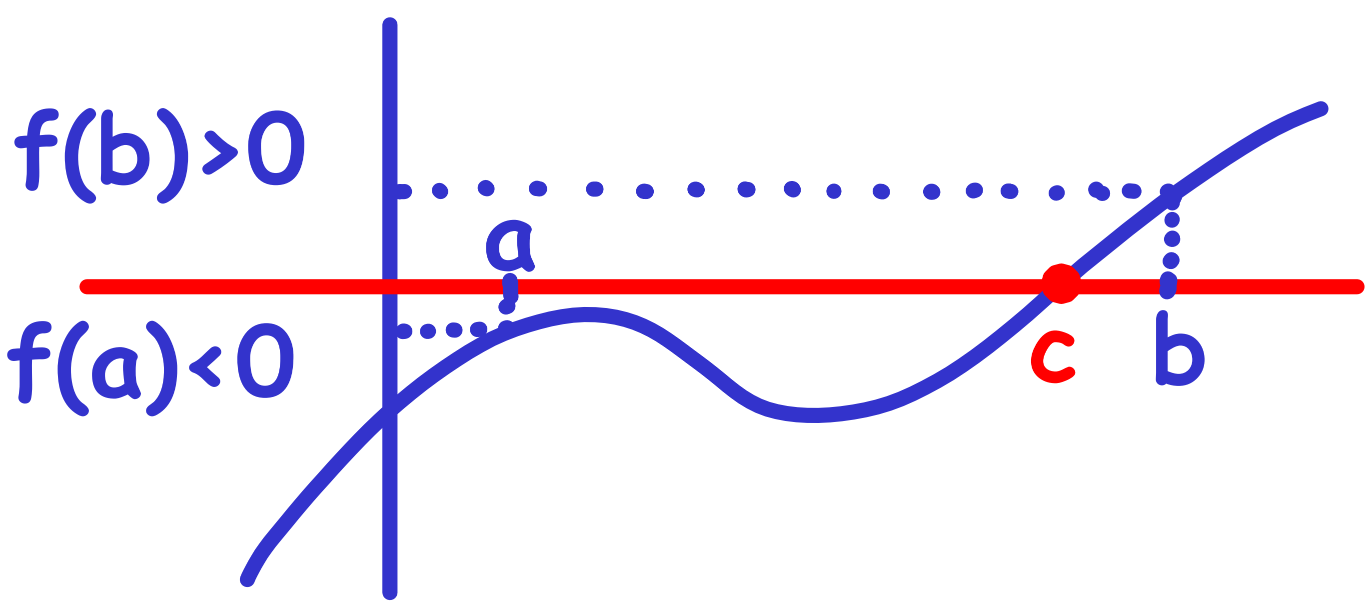


Also: *eine stetige Funktion f(x) in [a,b] nimmt jeden Wert zwischen f(a) und f(b) mindestens einmal an.*

Nullstellensatz

(Sonderfall k=0 des Zwischenwertsatzes)

Ist eine Funktion f(x) auf einem abgeschlossenen, endlichen Intervall [a,b] stetig und haben ihre Funktionswerte an den Rändern a und b verschiedene Vorzeichen, dann hat f(x) innerhalb von [a,b] mindestens eine Nullstelle.



Ⓘ Differentialrechnung

I.5. Ableitungen und ihre Rechenregeln

Ein zentrales Thema der Differentialrechnung ist die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. Hierzu dienlich und wichtig ist die Ableitung einer Funktion, deren geometrische Entsprechung die Tangentensteigung ist.

Differenzierbarkeit

Def f heisst <u>an der Stelle x_0 differenzierbar</u>, falls der folgende Grenzwert existiert und endlich ist:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Dann heisst dieser Grenzwert <u>die (erste) Ableitung von f(x) an der Stelle x_0,</u> $f'(x_0)$.

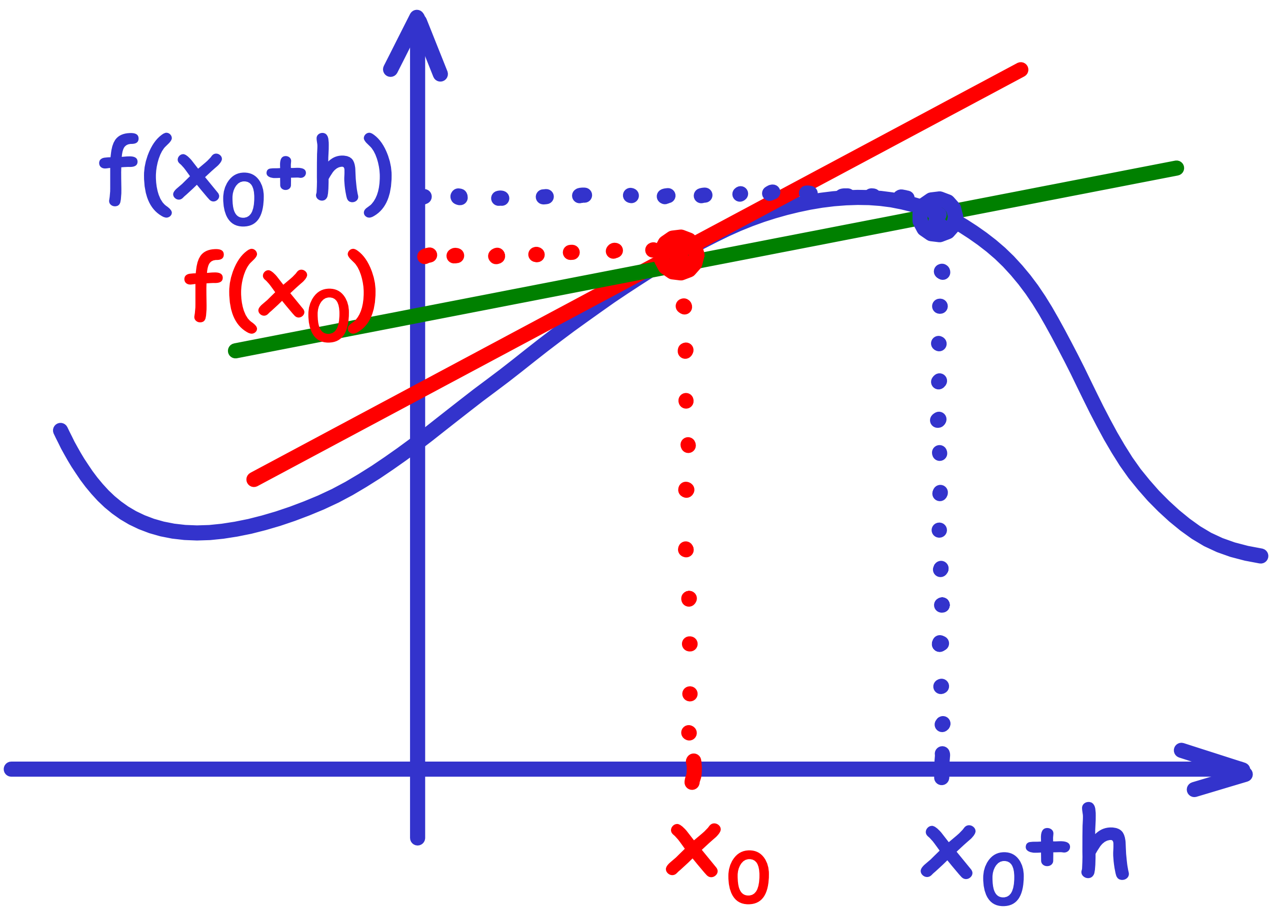
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Notationen

Geometrische Deutung:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ist die Steigung einer Sekante



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ist die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f in x_0.

Def Eine Funktion heisst <u>differenzierbar</u>, wenn sie an allen Stellen in ihrem Definitonsbereich differenzierbar ist.

Dann definiert die Kollektion aller

$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

eine neue Funktion:

(erste) Ableitungsfunktion, $f'(x)$.

Wenn $f'(x)$ differenzierbar ist, erhält man die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$, etc.

Bsp Die Ableitung von $f(x)=x^2$ ist nach der Definition:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 + h}{1}$$

$$= 2x_0 .$$

Deshalb gilt $\boxed{\frac{d}{dx}x^2 = 2x.}$

Konsultiere die Ableitungen anderer elementarer Funktionen in der Tabelle.

Rechenregeln für Ableitungen

- Linearität

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a\, f(x) + g(x)\right) = a\, f'(x) + g'(x)}$$

- Produkt- oder Leibnizregel

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

- Quotientenregel

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

- Kettenregel

(Ableitung einer Verkettung)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

(I) Differentialrechnung

I.6. Die Kettenregel und erste Folgen

Die Kettenregel ist eine Grundregel der Differentialrechnung und trifft Aussagen über die Ableitung einer Funktion, die sich als Verkettung von zwei differenzierbaren Funktionen darstellen lässt.
Wichtig bei ihrer Anwendung ist die Unterscheidung von „innerer" und „äusserer" Funktion.

Die Kettenregel besagt, dass eine Verkettung zweier differenzierb. Funktionen selbst wieder differenzierbar ist und man ihre Ableitung erhält, indem man die beiden miteinander verketteten Funktionen separat ableitet und – ausgewertet an den richtigen Stellen – miteinander multipliziert.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Merkregel: „die äussere Ableitung (an der richtigen Stelle) mal die innere Ableitung"

Woher kommt die Kettenregel:

Sei $y=g(x)$ und $y+w=g(x+h)$.

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(y+w)-f(y)}{w}}_{\downarrow \; f'(y)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow \; g'(x)}$$

Anwendung der Kettenregel:

Logarithmische Differentiation

Sei f(x) eine nicht verschwindene Fkt.
Dann gilt

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln\big(|f(x)|\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Das folgt aus der Kettenregel:

Falls f(x) positiv ist, dann gilt

$$\frac{d}{dx}\ln\big(|f(x)|\big) = \frac{d}{dx}\ln\big(f(x)\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Kettenregel

Falls f(x) negativ ist, dann gilt

$$\frac{d}{dx}\ln\big(|f(x)|\big) = \frac{d}{dx}\ln\big(-f(x)\big) = \frac{-f'(x)}{-f(x)}$$

Kettenregel

Anwendung der Kettenregel:

Implizite Differentiation

Eine implizite Funktion ist eine Fkt, die nicht explizit durch eine Formel, sondern nur implizit durch eine Gleichung gegeben ist.

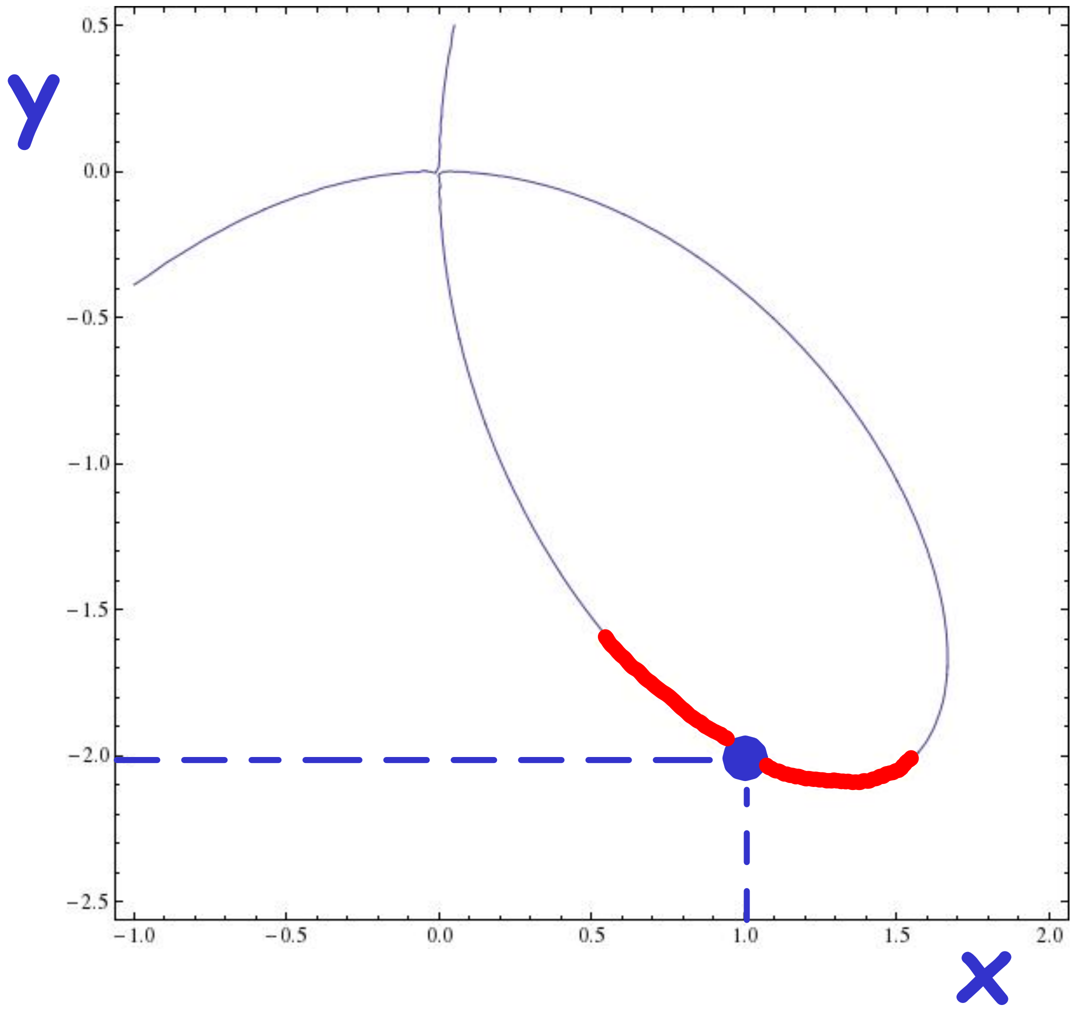
Bsp Die Gleichung

$$2x^3 - y^3 + 5xy = 0$$

definiert eine implizite Funktion $y = y(x)$ in der Nähe von $(x_0, y_0) = (1, -2)$, d.h., es gibt eine Fkt $y(x)$ definiert in einem Intervall I um $x_0 = 1$, die Folgendes für alle x in I erfüllt:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y(x))^3 + 5x \cdot y(x) = 0 \\ \text{und} \quad y(1) = -2. \end{cases}$$

Visualisierung der impliziten Funktion:



Die ganze Kurve $2x^3-y^3+5xy=0$ ist kein Graph einer Funktion,

aber z.B. der rote Teil ist der Graph einer Funktion $y=y(x)$.

Die Ableitung einer impliziten Fkt lässt sich mit Hilfe der Kettenregel bestimmen, indem man beide Seiten der Gleichung nach x ableitet und dabei y als Fkt von x behandelt. Dann sammelt man alle Terme mit $\frac{dy}{dx}$ auf einer Seite der Gleichung und löst nach $\frac{dy}{dx}$ auf.

Bsp $\quad \frac{d}{dx}(2x^3-y^3+5xy) = \frac{d}{dx}0$

$$\Leftrightarrow 6x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+5\left(y+x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Kettenregel

$$\Leftrightarrow (-3y^2+5x)\frac{dy}{dx} = -6x^2-5y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2+5y}{3y^2-5x}.$$

In $(x_0,y_0)=(1,-2)$: $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{4}{7}$ ■

Anwendung der Kettenregel:

Ableitung einer Umkehrfunktion

Sei $f(x)$ eine differenzierbare und umkehrbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$.
Sei $g(x)=f^{-1}(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Dann ist $g(x)$ differenzierbar und

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}}$$

Das folgt aus der Kettenregel:

$$f(g(y)) = y \quad \text{für alle Werte } y$$

$$\Rightarrow \quad f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1 \quad \text{für alle } y$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

■

Eselsbrücke: $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=g(y)}}$$

Bsp Die Wurzelfunktion $g(y)=\sqrt{y}$ ist die Inverse der Funktion $f(x)=x^2$ für $x>0$, d.h.

$$\sqrt{y} = x \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2$$

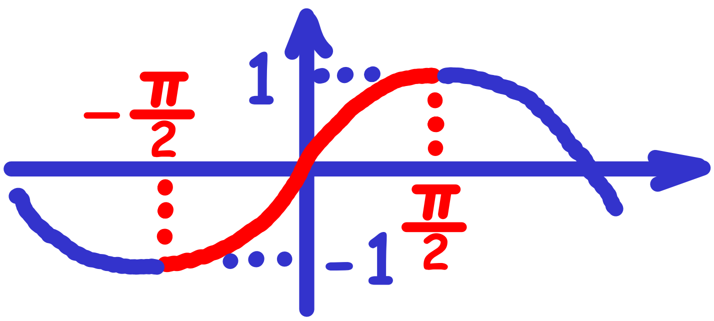
für x positiv

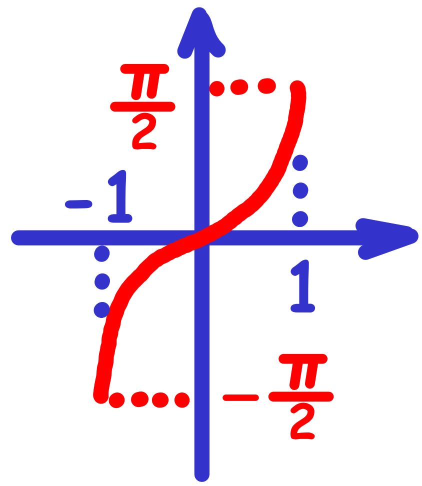
Aus $f'(x)=2x$ folgt, dass

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{2g(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Deshalb $\boxed{\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$ ■

Bsp Die Einschränkung von $f(x)=\sin x$ auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist umkehrbar.





Die Ableitung der Inversen, $g(y)=\arcsin y$, ist

$$\frac{d}{dy}\arcsin y = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}\sin x}\right|_{x=\arcsin y}$$

$$= \left.\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (y \neq \pm 1)$$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ & x in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ $\cos x = \sqrt{1-(\underbrace{\sin x}_{y})^2}$

I Differentialrechnung

I.7. Tangente an einen Funktionsgraphen, Linearisierung und Differentiale

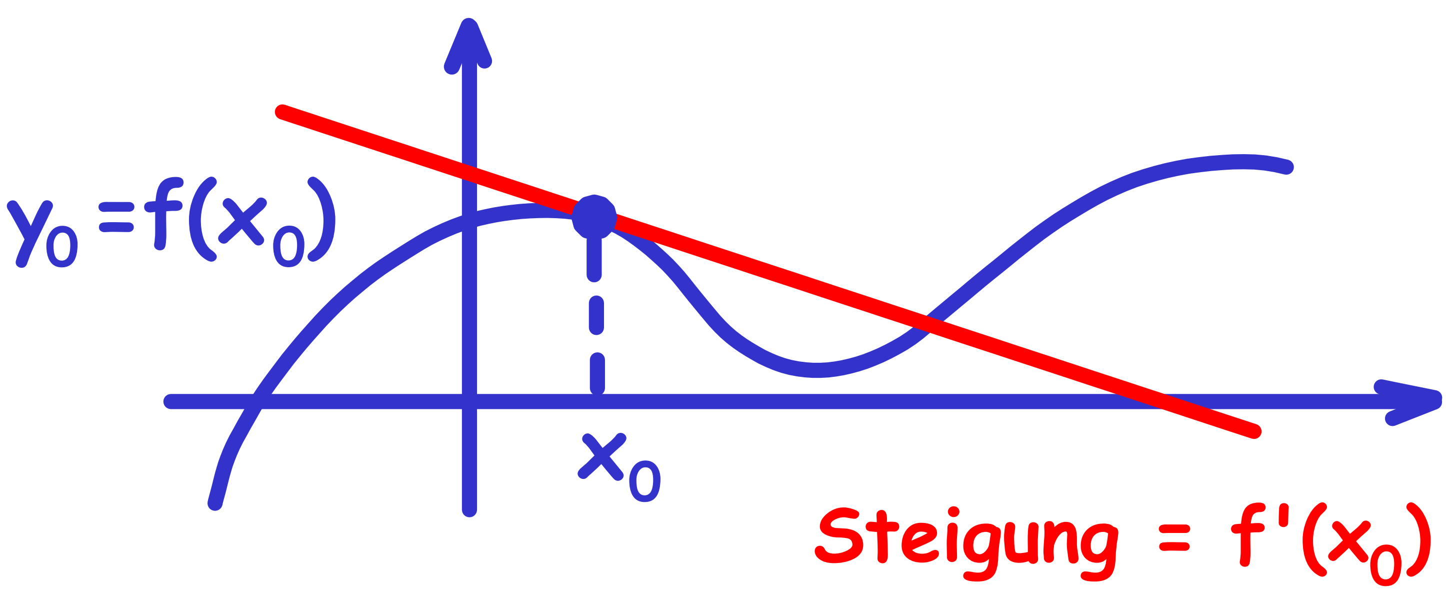
Der Graph einer differenzierbaren Funktion lässt sich linear durch eine Tangente annähern.
Die entsprechende Annäherung der Funktion heisst Linearisierung und wird angewandt, da lineare Fkt'en $g(x)=ax+b$ umfangreich verstanden und einfach zu berechnen sind.

Tangente

Sei $f(x)$ bei x_0 differenzierbar.

Die Tangente an den Funktionsgraphen von f in x_0 ist die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und mit der Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

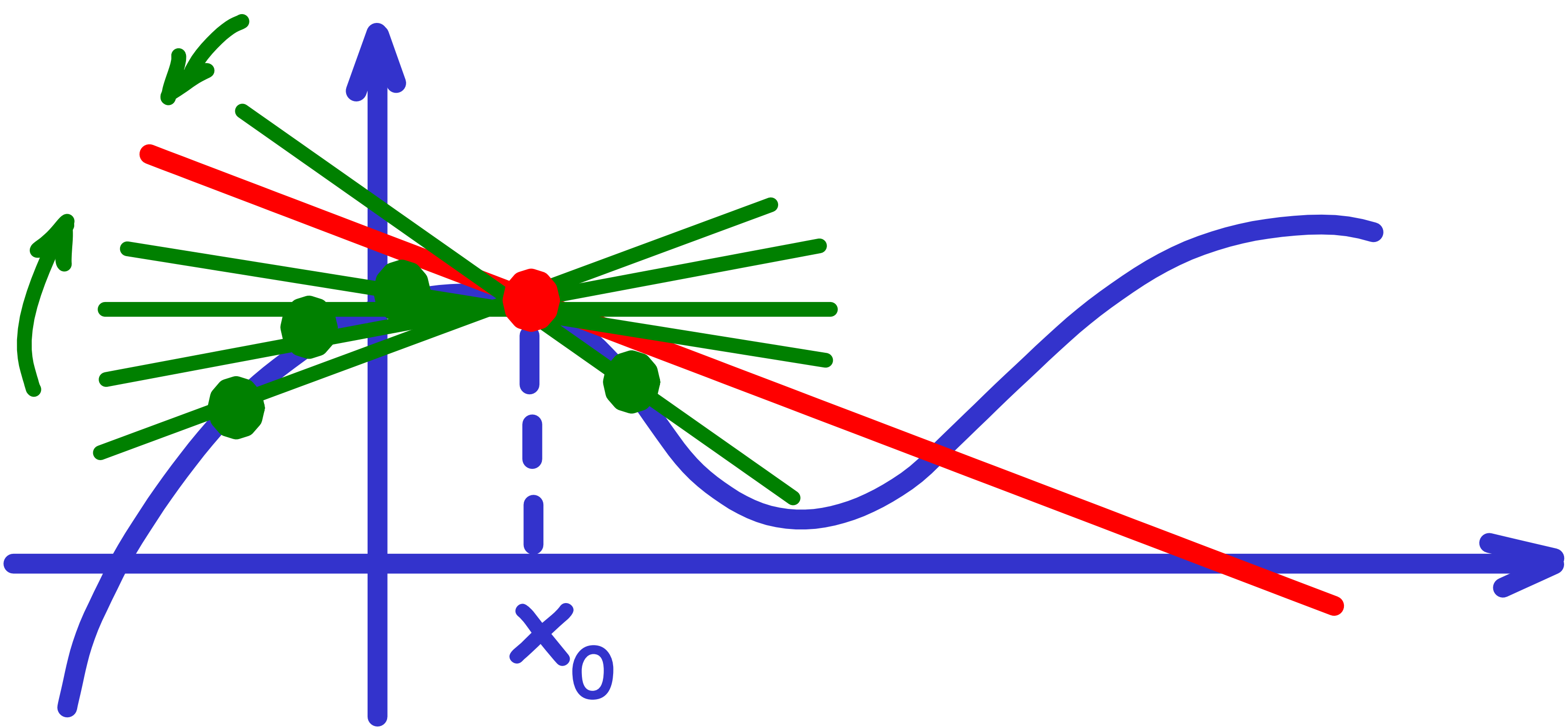


=> Tangentengleichung

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

d.h. $\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$ ist die Steigung

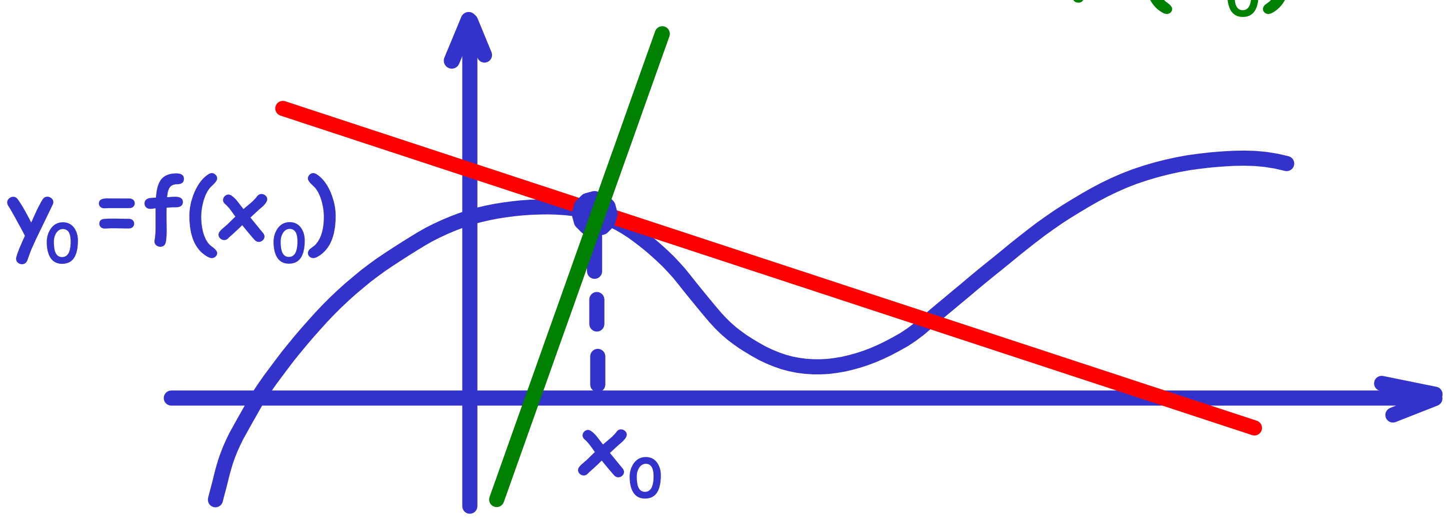
Zur Erinnerung: die Tangente lässt sich als Grenzwert von Sekanten betrachten.



Normale

Die **Normale** des Funktionsgraphen bei x_0 ist die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$, die **senkrecht zur Tangente** verläuft.

$$\text{Steigung} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$



=> **Gleichung der Normalen**

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

d.h. $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ *falls* $f'(x_0) \neq 0$

Linearisierung

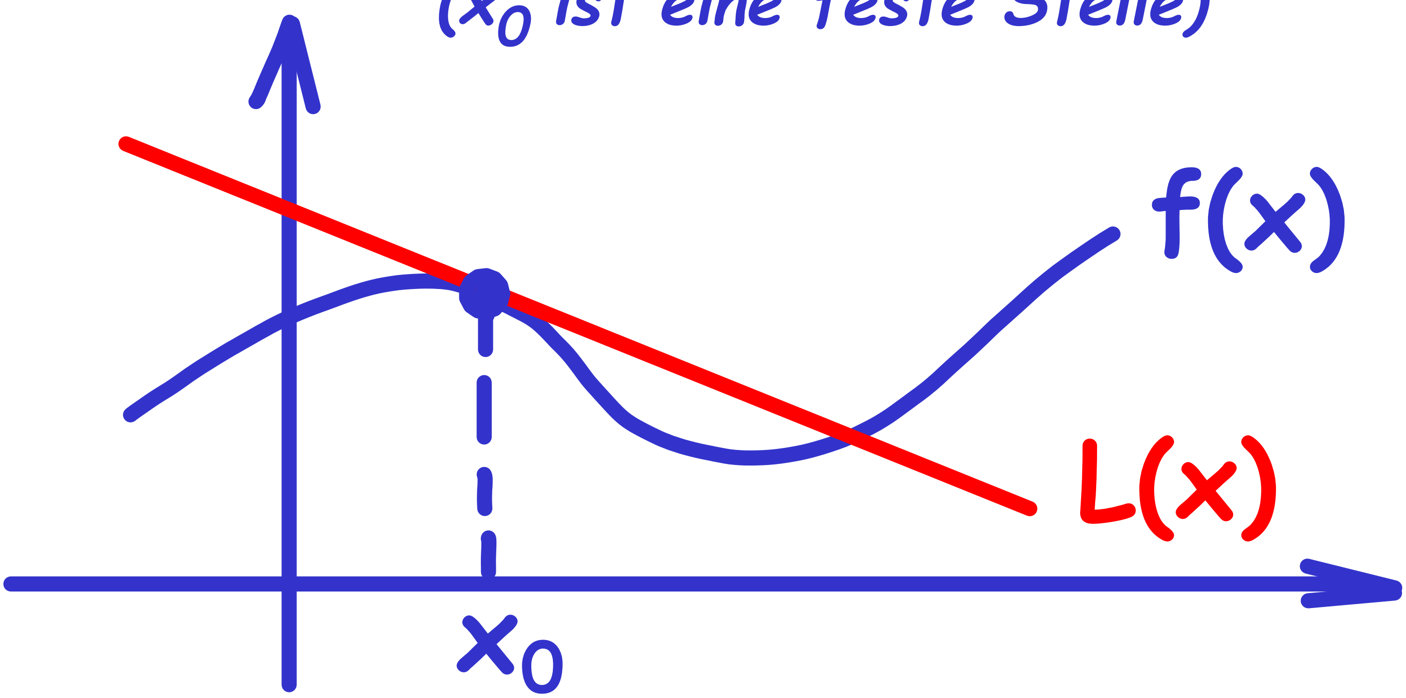
Sei $f(x)$ bei x_0 differenzierbar.

Def Die <u>Linearisierung</u> von f bei x_0 ist die lineare Fkt

$$\boxed{L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Variable *Variable*

(x_0 ist eine feste Stelle)



Der Graph der Linearisierung in x_0 ist die Tangente für $f(x)$ in x_0.

Die Linearisierung $L(x)$ ist die <u>beste lineare Näherung</u> für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0. Wieso?

$\boxed{\text{AW}}$* Sei $R_1(x) = f(x)-L(x)$ das Restglied (oder der Fehler) dieser Näherung.

Wenn $x \to x_0$, strebt das Restglied schneller nach Null als $x-x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0$$

■

* AW = Allgemeinwissen & nicht Gegenstand der Prüfung.

Die Taylorpolynome liefern noch bessere Näherungen!

Differentiale

Sei $y=f(x)$ eine diff Fkt.
Die Leibniz-Schreibweise für die Ableitung ist:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

In Anwendungen betrachtet man oft den Nenner „dx" als unabhängige Variable.
Dann schreibt man

$$dy=f'(x)dx$$

und nennt dy ein <u>Differential</u>.
dy wird auch df geschrieben.

Bsp Sei $y=x^7-5x^2$. Dann ist

$$dy = (7x^6-10x)\,dx.$$

Ist $x=1$ und $dx=0.02$, dann erhalten wir

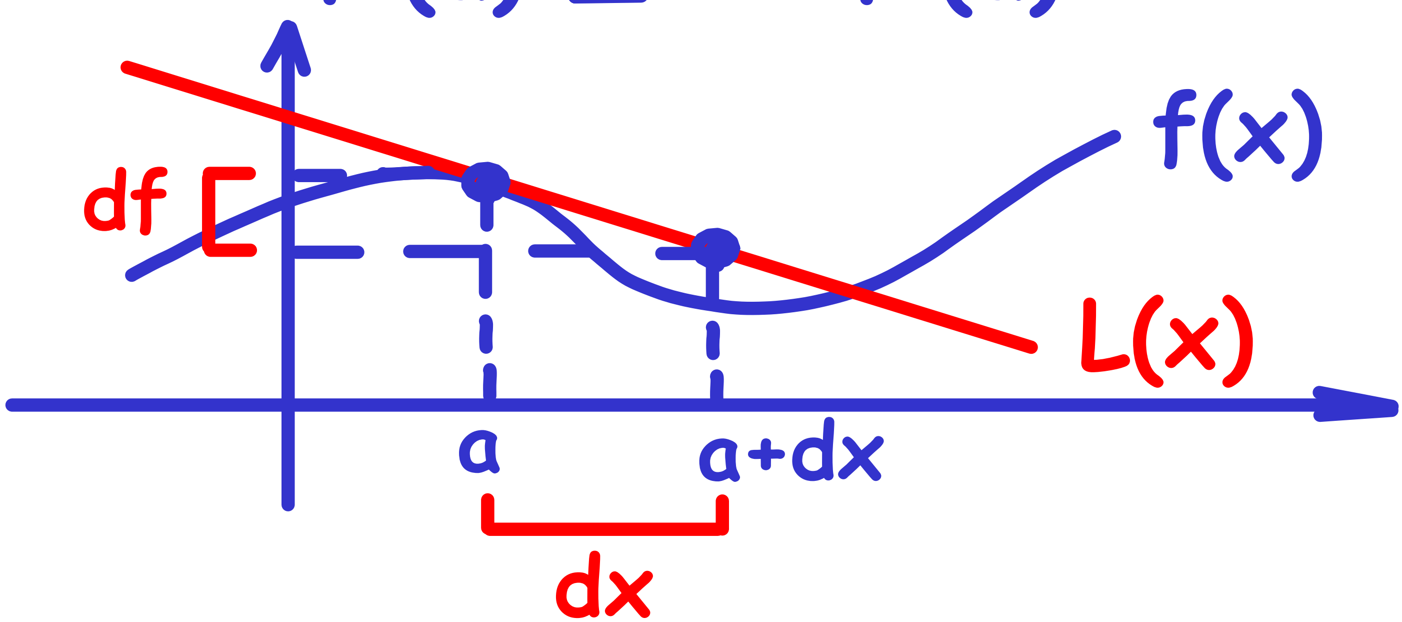
$$dy = -0.06.$$

■

Wir betrachten das Differential dy als eine Abschätzung der Änderung des Funktionswertes durch eine (infinitesimal kleine) Änderung dx der Variable x.

Die Änderung der Linearisierung $L(x)$ von $f(x)$ bei $x=a$ durch eine Änderung Δx der Variable x verursacht entspricht genau dem Wert des Differentials df bei $x=a$ und $dx=\Delta x$:

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a+\Delta x)-L(a)\\ &= f'(a)\cdot\Delta x = f'(a)\cdot dx = df.\end{aligned}$$



df steht also für die Grösse, um die die Tangente steigt oder fällt, wenn x sich um dx verändert.

I Differentialrechnung

I.8. Taylor-Polynome und Taylor-Reihen

Taylor-Polynome liefern Näherungen für Funktionen in einer Umgebung eines Punktes, die, aufgrund ihrer relativ einfachen Anwendbarkeit und Nützlichkeit, ein Hilfsmittel in vielen Natur- und Ingenieurwissenschaften geworden sind.

Taylorpolynome

Sei f bei x_0 n-mal differenzierbar.

$n=1$ Das erste Taylorpolynom ist die Linearisierung $L(x)$.

$$\boxed{P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$$

$n=2$ Das zweite Taylorpolynom ist das folgende quadratische Polynom

$$\boxed{\begin{aligned}P_2(x)=f(x_0)&+f'(x_0)\cdot(x-x_0)\\&+\tfrac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2\end{aligned}}$$

Def Das n-te <u>Taylorpolynom</u> von f in x_0 ist das folgende Polynom n-ten Grades:

$$P_n(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Linearisierung}} + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

n-te Ableitung

Sonderfall: wenn $x_0 = 0$ heisst es <u>MacLaurinsches Polynom</u>.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n}$$

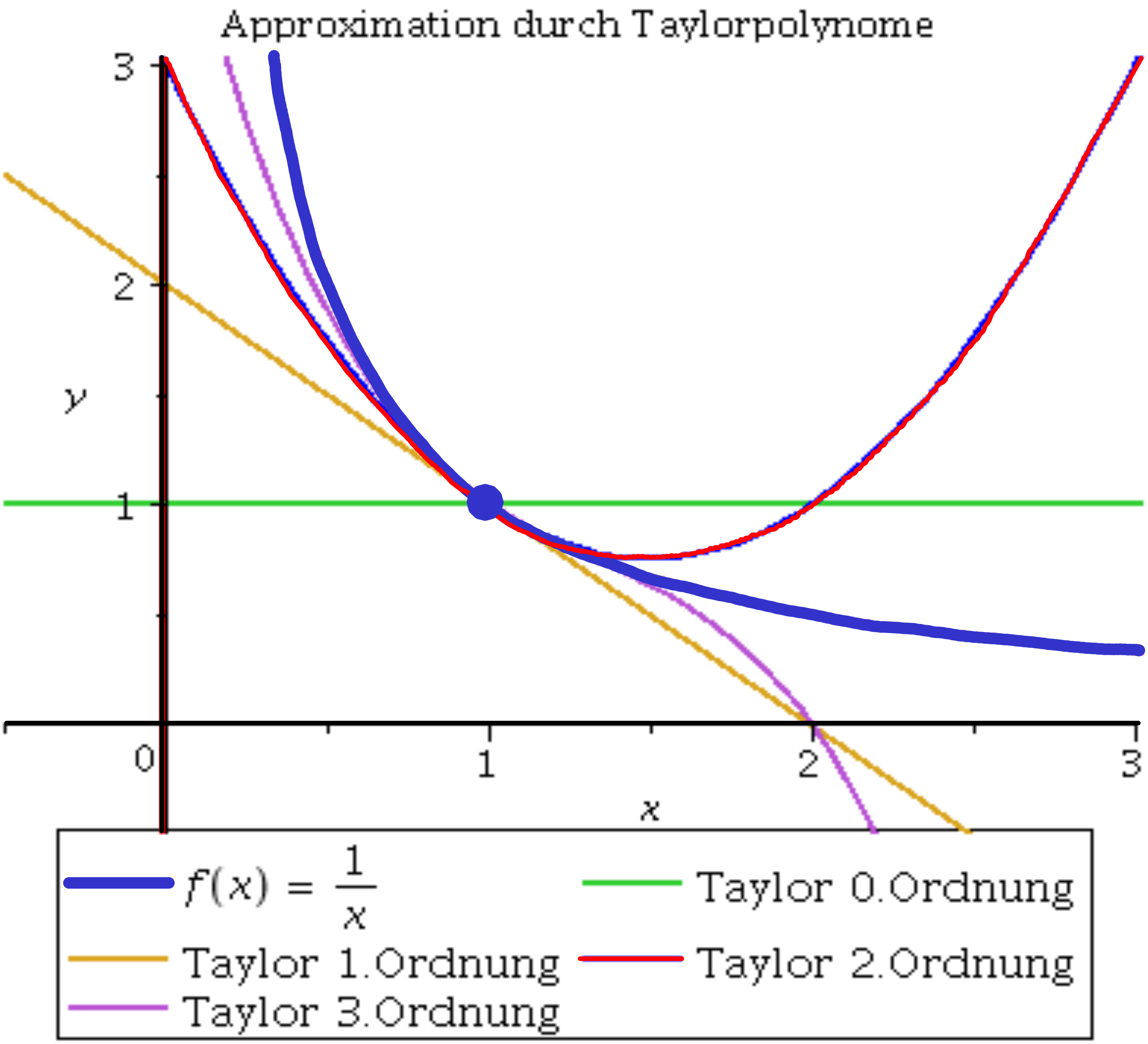
Bsp Taylorpolynome von $f(x)=1/x$ an $x_0=1$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 2-x$$

$$P_2(x) = 3-3x+x^2$$

$$P_3(x) = 4-6x+4x^2-x^3$$



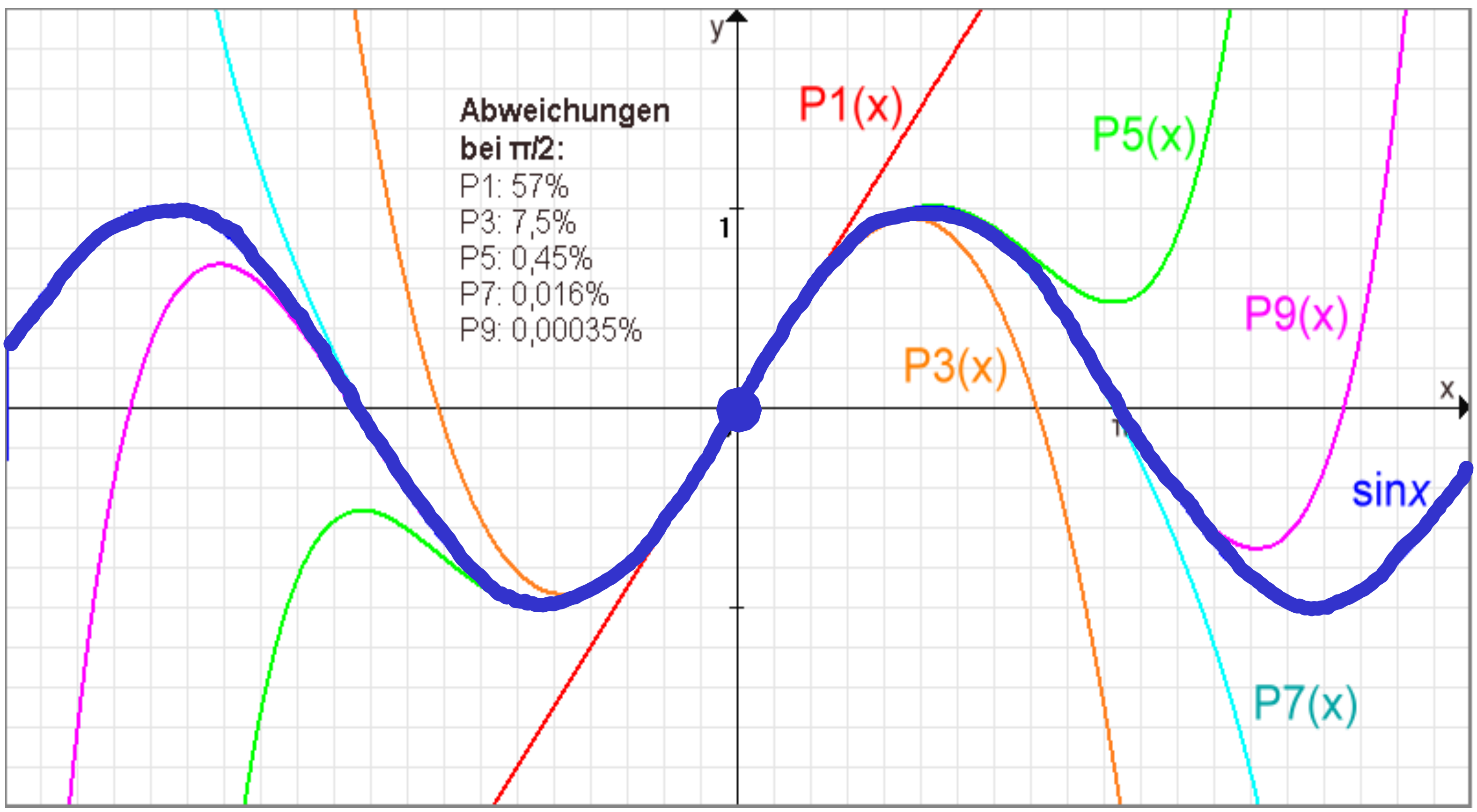
Bsp Maclaurinsche Polynome von sin x

$P_1(x) = x$

$P_3(x) = P_2(x) = x - x^3/6$

$P_5(x) = P_4(x) = x - x^3/6 + x^5/120$

$P_7(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$



$P_1(x)=x$ heisst die

Kleinwinkelnäherung von sin x:

$\sin x \approx x$ für $x \approx 0$

Das n-te Taylorpolynom von f in x_0 $P_n(x)$, ist das einzige Polynom n-ten Grades mit

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f(x_0)\\
P_n'(x_0) &= f'(x_0)\\
P_n''(x_0) &= f''(x_0)\\
&\vdots\\
P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0),
\end{aligned}
$$

d.h. $P_n(x)$ und $f(x)$ und alle ihre Ableitungen bis und mit Ordnung n stimmen im Punkt x_0 überein.

Das n-te Taylorpolynom $P_n(x)$ ist die beste polynomiale Näherung n-ten Grades für $f(x)$ nahe bei x_0. Wieso?

AW* Sei $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ das Restglied. Wenn $x \to x_0$ strebt $R_n(x)$ schneller nach Null als $(x-x_0)^n$, d.h.:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Lagrange Restgliedformel

$$\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1}}$$

für ein c zwischen x_0 und x.

Liefert eine Abschätzung des Fehlers:

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M \cdot |x-x_0|^{n+1}}$$

wobei M der maximale Wert der $n+1$. Ableitung $f^{(n+1)}$ zwischen x_0 und x ist.

* AW = Allgemeinwissen & nicht Gegenstand der Prüfung.

Taylorreihe

Sei f bei x_0 beliebig oft diff.*

Die Taylorpolynome $P_n(x)$ von $f(x)$ bei x_0 liefern hoffentlich nach und nach bessere Näherungen für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0.

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

$R_n(x)$ = Restglied oder Fehler (kann abgeschätzt werden)

* Z.B. ist jede elementare Funktion im Inneren ihres Definitionsbereiches beliebig oft diff.

Im Grenzübergang bekommen wir die Taylorreihe oder Taylor--Entwicklung der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0.

$$\boxed{T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{Zahlen}} (\underset{\text{Variable}}{x} - x_0)^n}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n \underbrace{+ \ldots}_{\text{unendlich}}$$

Sonderfall: wenn $x_0 = 0$ heisst sie die MacLaurinsche Reihe.

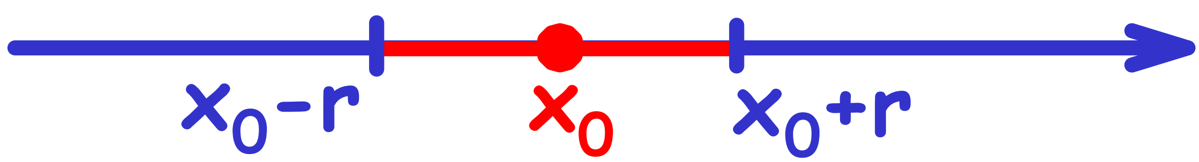
$$\boxed{T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Die Taylorreihe ist eine formale unendliche Potenzsumme.

- Wann konvergiert $T(x)$?

Die Reihe kann konvergent sein...

- ... nur für $x=x_0$ $\rightarrow$ sei $r=0$
- ... oder in einem Intervall mit Mittelpunkt x_0: $|x-x_0|<r$



- ... oder für alle x. $\rightarrow$ $r=\infty$

r heisst der Konvergenzradius der Taylorreihe und ist nicht Gegenstand der Prüfung.

- Falls konvergent, ist $T(x)=f(x)$?

Ja für die elementaren und meisten praktischen Funktionen (aber oft nicht).

Bsp MacLaurinsche Reihen

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\underbrace{r = \infty}$

d.h. diese Reihe konvergiert immer

- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ $\underbrace{r=1}$

d.h. diese Reihe konvergiert falls $|x|<1$

- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $r = \infty$

- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ $r = \infty$

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $r=1$

Diese Taylorreihe ist eine geometrische Reihe.

■

Ⓘ Differentialrechnung

I.9. Regel von Bernoulli-l'Hôpital

Mit der Regel von Bernoulli-l'Hôpital * lassen sich Grenzwerte von Fkt'en, die sich als Quotient zweier gegen 0 konvergiender ($\frac{0}{0}$) oder bestimmter, divergiender Fkt'en ($\frac{\infty}{\infty}$) schreiben lassen, mithilfe der 1. Ableitungen dieser Fkt'en berechnen.

* L'Hôpital hat diese Regel in einem Buch veröffentlicht, aber hatte sie von (Johann) Bernoulli übernommen.

Grenzwertregel von Bernoulli-L'Hôpital

Seien f & g stetig differenz.

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

dann

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

falls der Grenzwert rechts existiert.

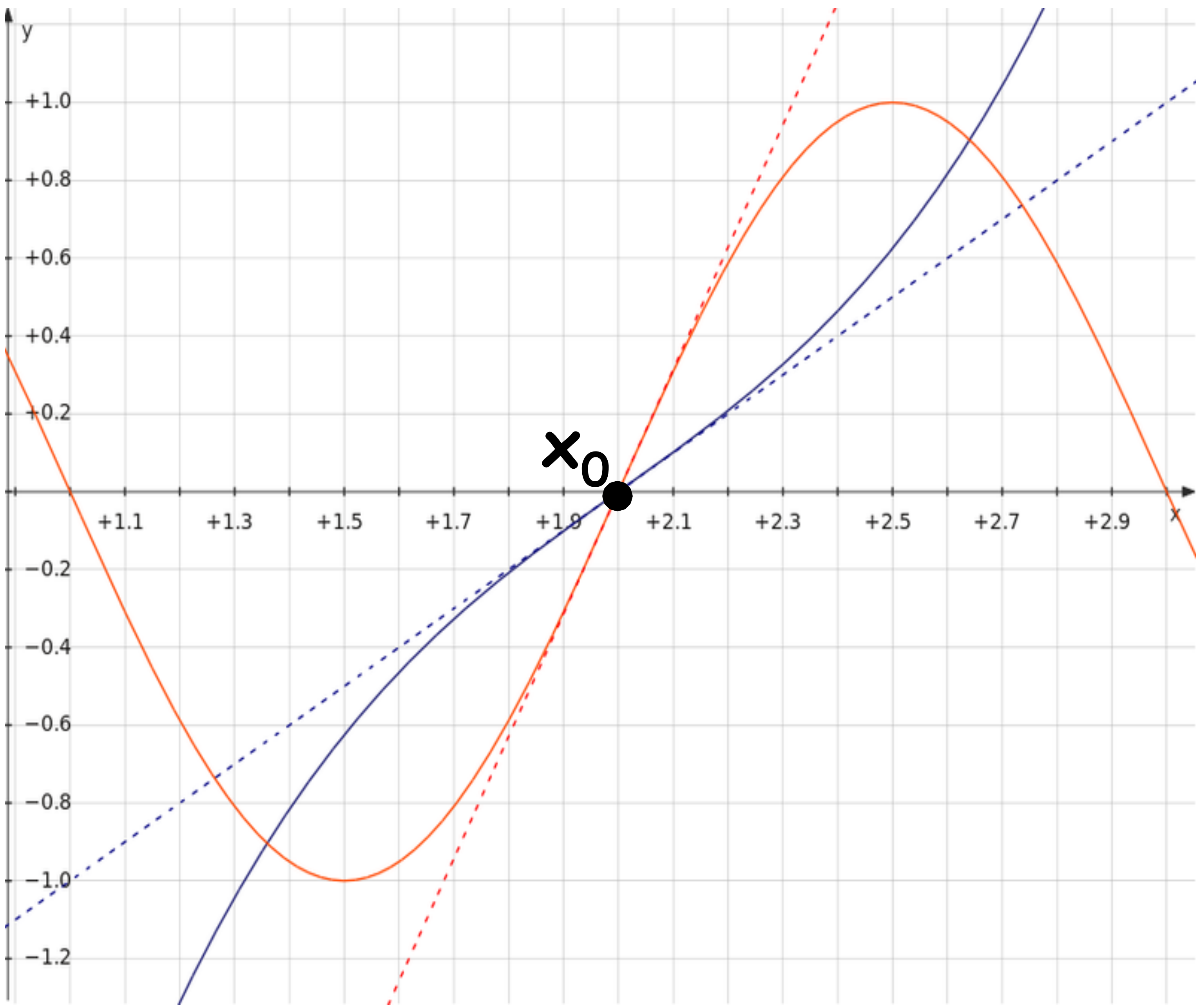
Beweis im Fall "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

da $f(x_0)=g(x_0)=0$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Bernoulli-L'Hôpital Regel beruht darauf, dass sich Funktionen (unten durchgezogen) in der Nähe einer Stelle x_0 durch ihre Tangenten (unten gestrichelt) annähern lassen.



Bsp

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{f(x)}{\sin x}}{\underset{g(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{f'(x)}{\cos x}}{\underset{g'(x)}{1}} = 1.$$

■

Bsp (doppelte Anwendung von B-H)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x}$$

$$\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

■

Bsp

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x \cos x}{1} = 0.$$

■

(I) Differentialrechnung

I.10. Extremwerte und der Extremwertsatz

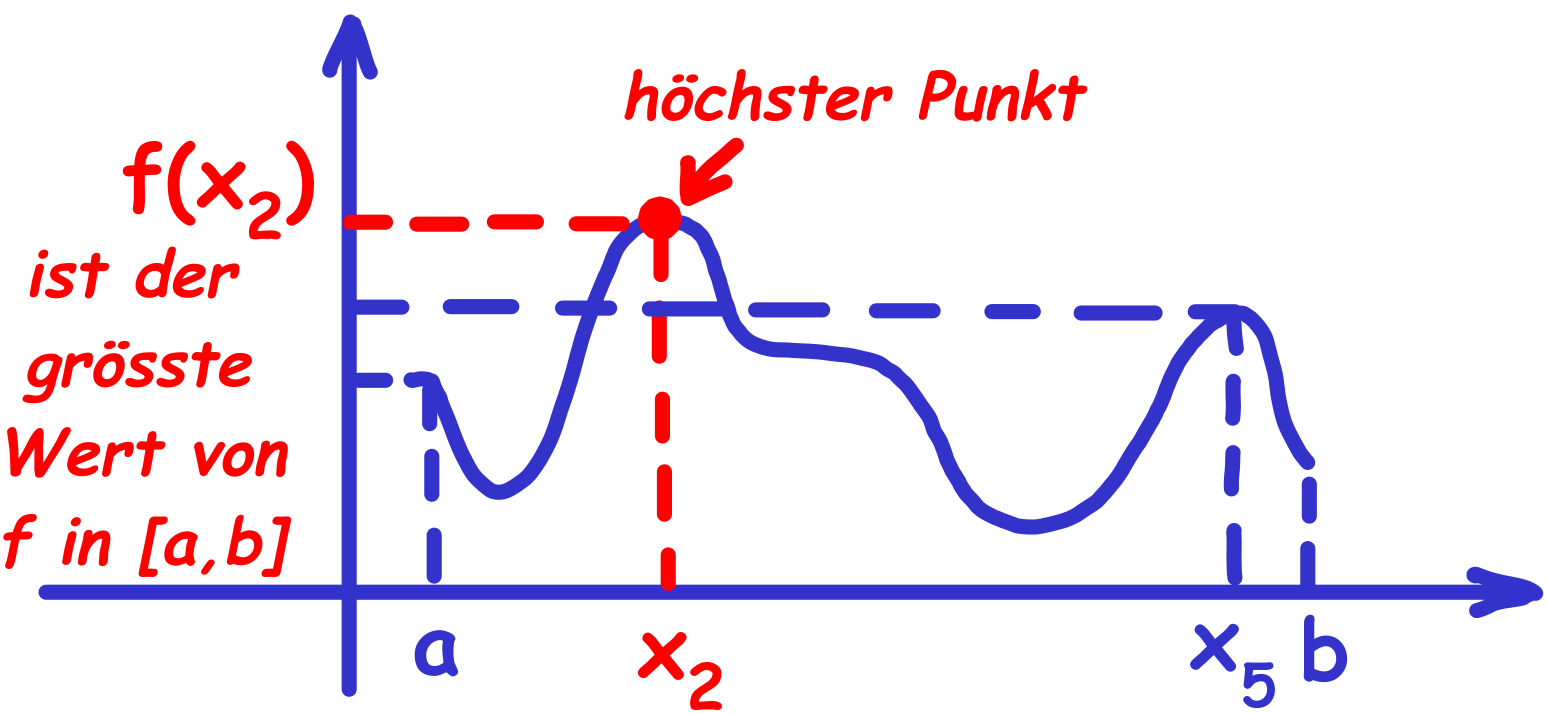
Die „Optimierung" beschäftigt sich damit, optimale Parameter eines Systems zu finden, das heisst, eine Funktion f zu minimieren oder zu maximieren. Im einfachsten Fall kann man ein Optimierungsproblem durch Auffinden der Nullstellen der ersten Ableitung von f lösen.

Extremwerte

Def f besitzt ein relatives oder lokales Maximum bei x_0, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Def f besitzt ein absolutes oder globales Maximum bei x_0 in [a,b], wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $a \leq x \leq b$.



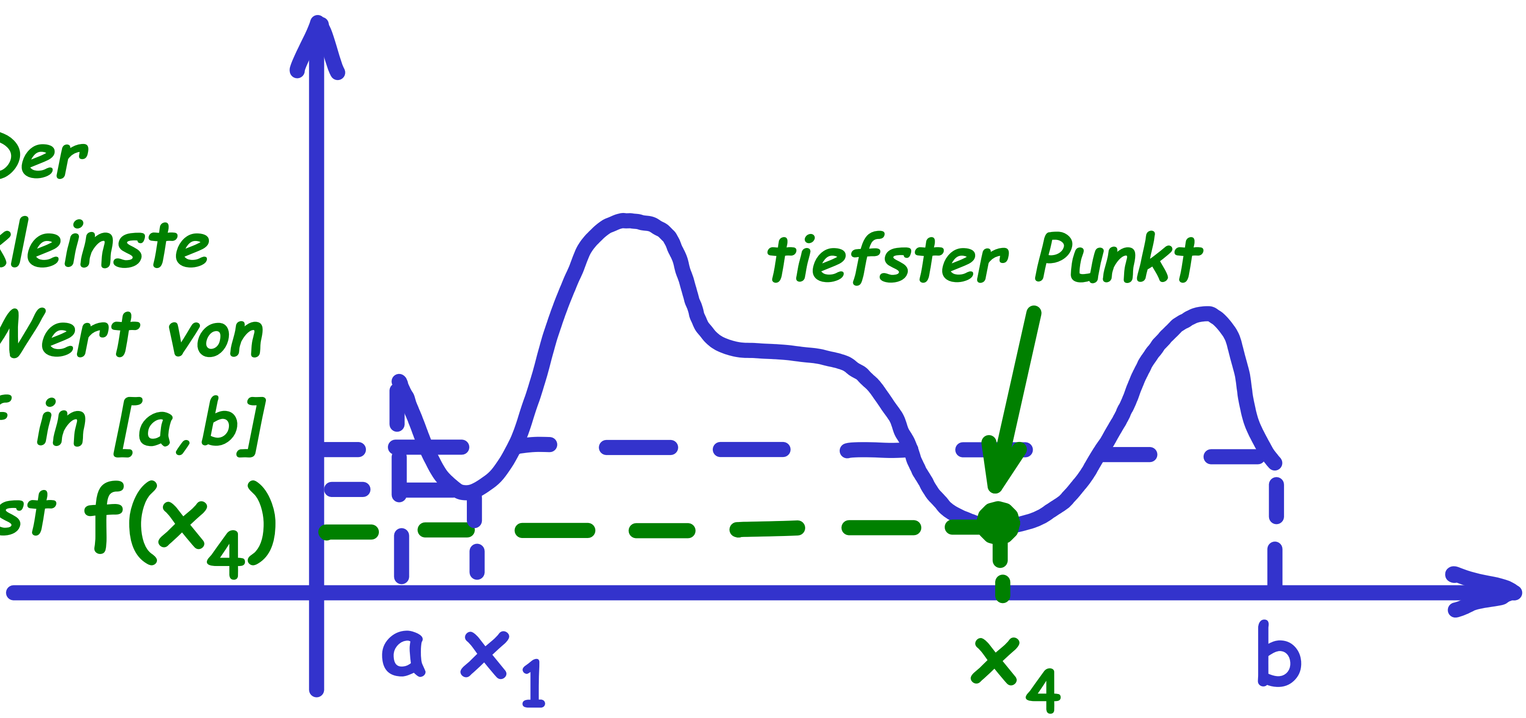
f besitzt relative/lokale Maxima bei a und x_5
und besitzt ein absolutes/globales Maximum bei x_2

Def f besitzt ein relatives oder lokales Minimum bei x_0, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Def f besitzt ein absolutes oder globales Minimum bei x_0 in $[a,b]$, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $a \leq x \leq b$.

Der kleinste Wert von f in [a,b] ist $f(x_4)$

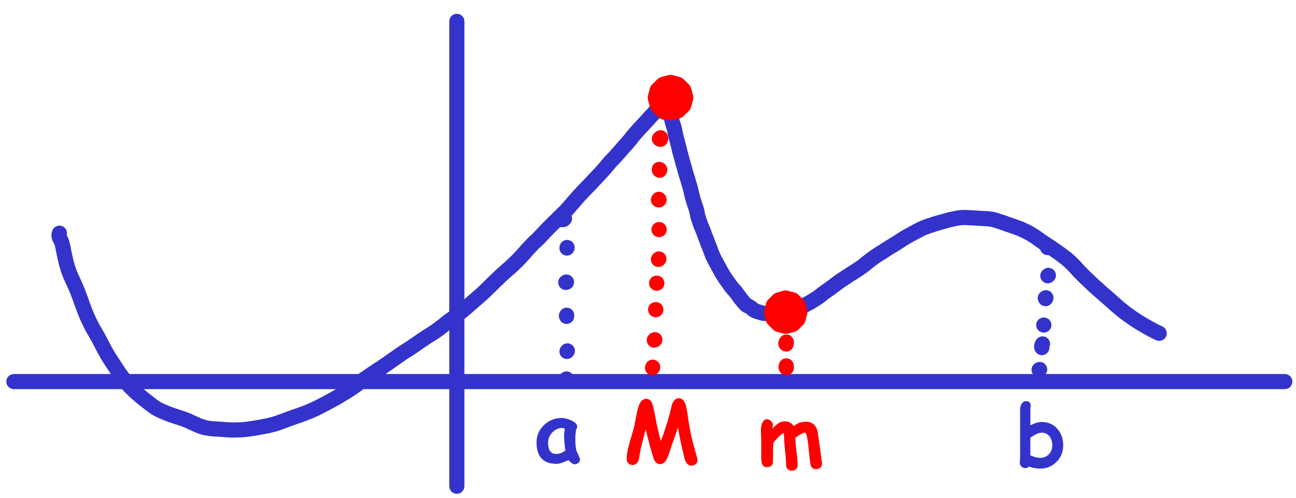


f besitzt relative/lokale Minima bei x_1 und b und besitzt ein absolutes/globales Minimum bei x_4

Extremwertsatz

Ist eine Funktion $f(x)$ auf einem abgeschlossenen, endlichen Intervall $[a,b]$ stetig, dann gibt es Stellen m und M in $[a,b]$ mit

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$



Also: *eine stetige Funktion nimmt in [a,b] einen grössten und einen kleinsten Funktionswert an.*

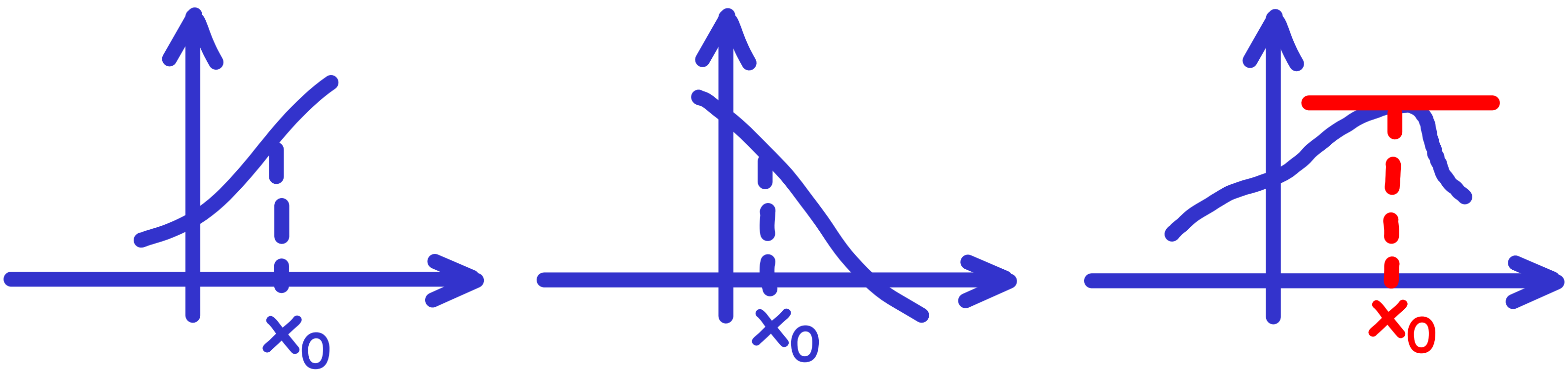
(I) Differentialrechnung

I.11. Monotonie und Krümmung

Monoton (steigend oder fallend) sind Funktionen f, die bei wachsendem Funktionsargument x immer nur grösser oder nur kleiner werden.
Die Krümmung bezeichnet die lokale Abweichung einer Kurve von einer Geraden.
Monotonie und Krümmung sind oft entscheidend für die Bestimmung von Extremwerten.

Extremwerte vs. Ableitung

Sei $f(x)$ in einem offenen Intervall (a,b) differenzierbar und $a<x_0<b$.



- Ist $f'(x_0)>0$, so wächst f streng monoton in der Nähe von x_0.
- Ist $f'(x_0)<0$, so fällt f streng monoton in der Nähe von x_0.
- Ist x_0 eine lokales Extremstelle von f, so muss $f'(x_0)=0$ sein.

x_0 heisst dann eine kritische Stelle

("innere Extrema müssen kritisch sein")

Notwendige Bedingung für Extrema

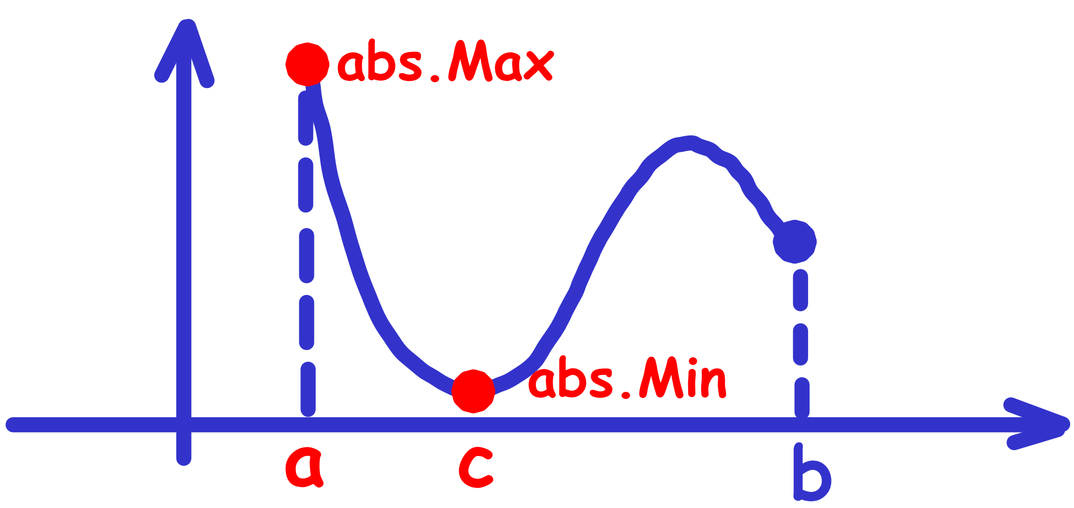
einer differenzierbaren Funktion f auf einem offenen Intervall (a,b):

Hat f an einer inneren Stelle x_0 ein lokales Extremum, dann ist

$$f'(x_0)=0.$$

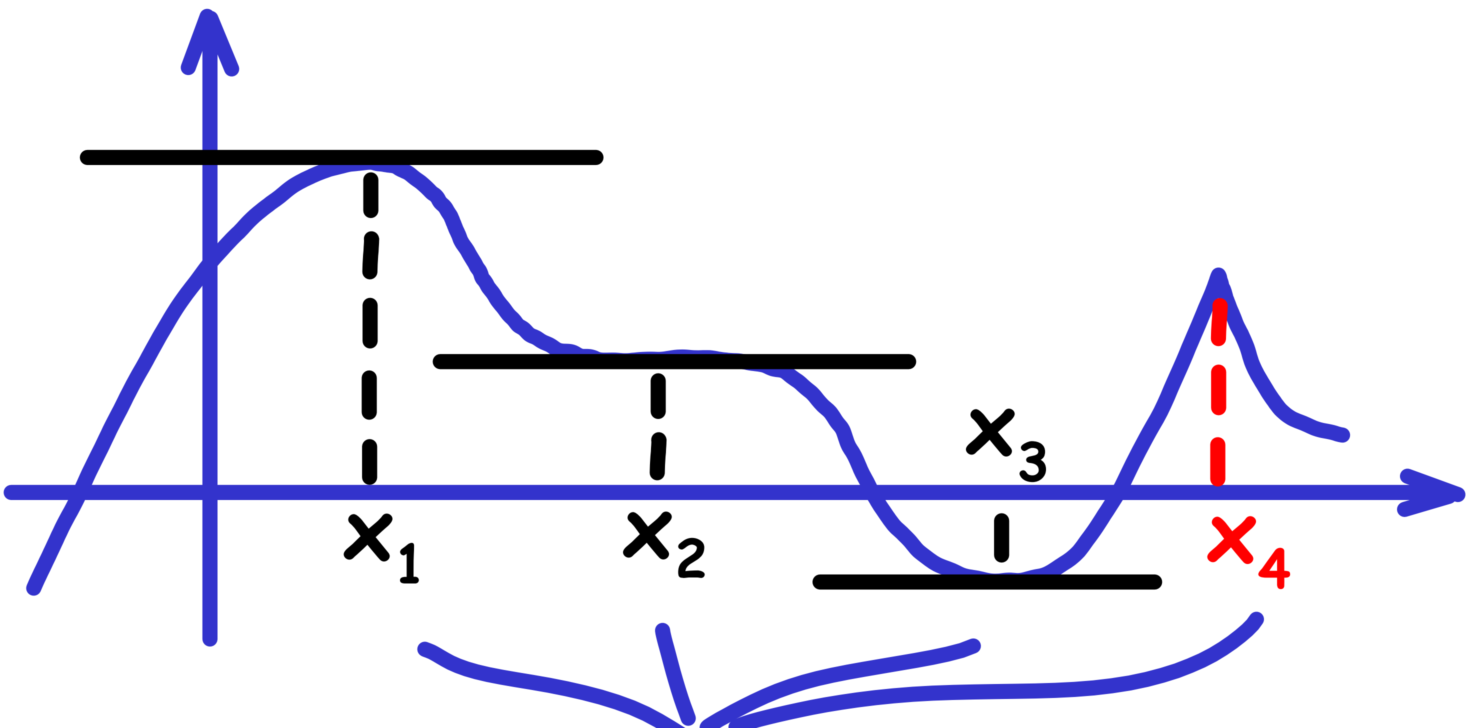
Vorsicht:

Auf einem abgeschlossenen Intervall [a,b] können die Randstellen a und b auch Extremstellen sein.



Kritische Stellen

Def Eine <u>kritische Stelle</u> einer Fkt ist eine Stelle x_0 an der f' null oder undefiniert ist.



sind vier kritische Stellen

$f'(x_0)=0 \iff$ Die Tangente des Funktionsgraphen bei x_0 ist waagrecht.

Auf der Suche nach Extrema einer stetigen Funktion f auf einem abgeschlossenen, endlichen Intervall [a,b]

1. Bestimme alle kritischen Stellen von f in (a,b), d.h. die Stellen x_0 wo $f'(x_0)=0$ oder wo f nicht differenzierbar ist.
2. Vergleiche die Werte von f an jeder kritischen Stelle x_0 *und* an den Randstellen a und b.

Also sind die folgenden Stellen Kandidaten für Extremstellen:

- innere Stellen wo $f'(x_0)=0$,

- innere Stellen wo f nicht diff ist

- und Randstellen.

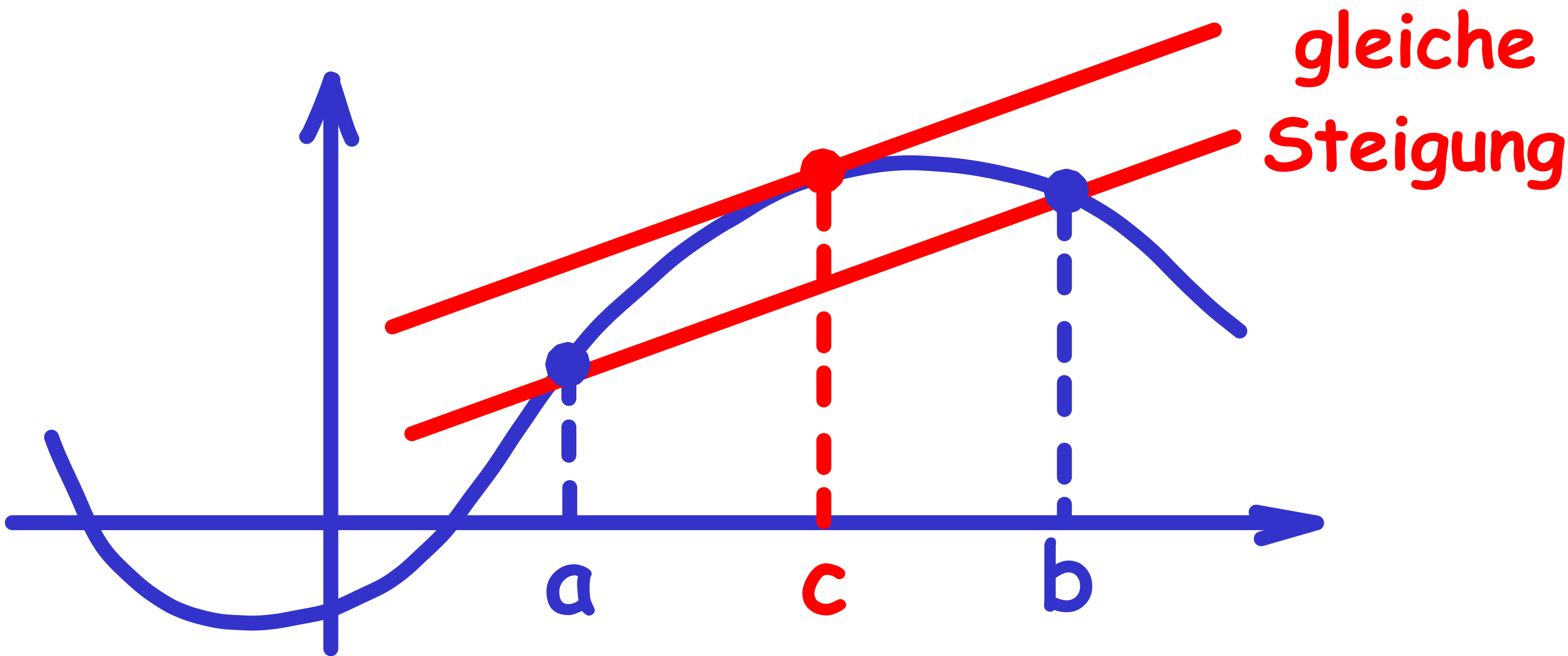
Mittelwertsatz

Ist eine Funktion f(x) auf einem abgeschlossenen, endlichen Intervall [a,b] stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) diff, dann gibt es mindestens eine Stelle c in (a,b), an der gilt

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Steigung der Tangente bei c

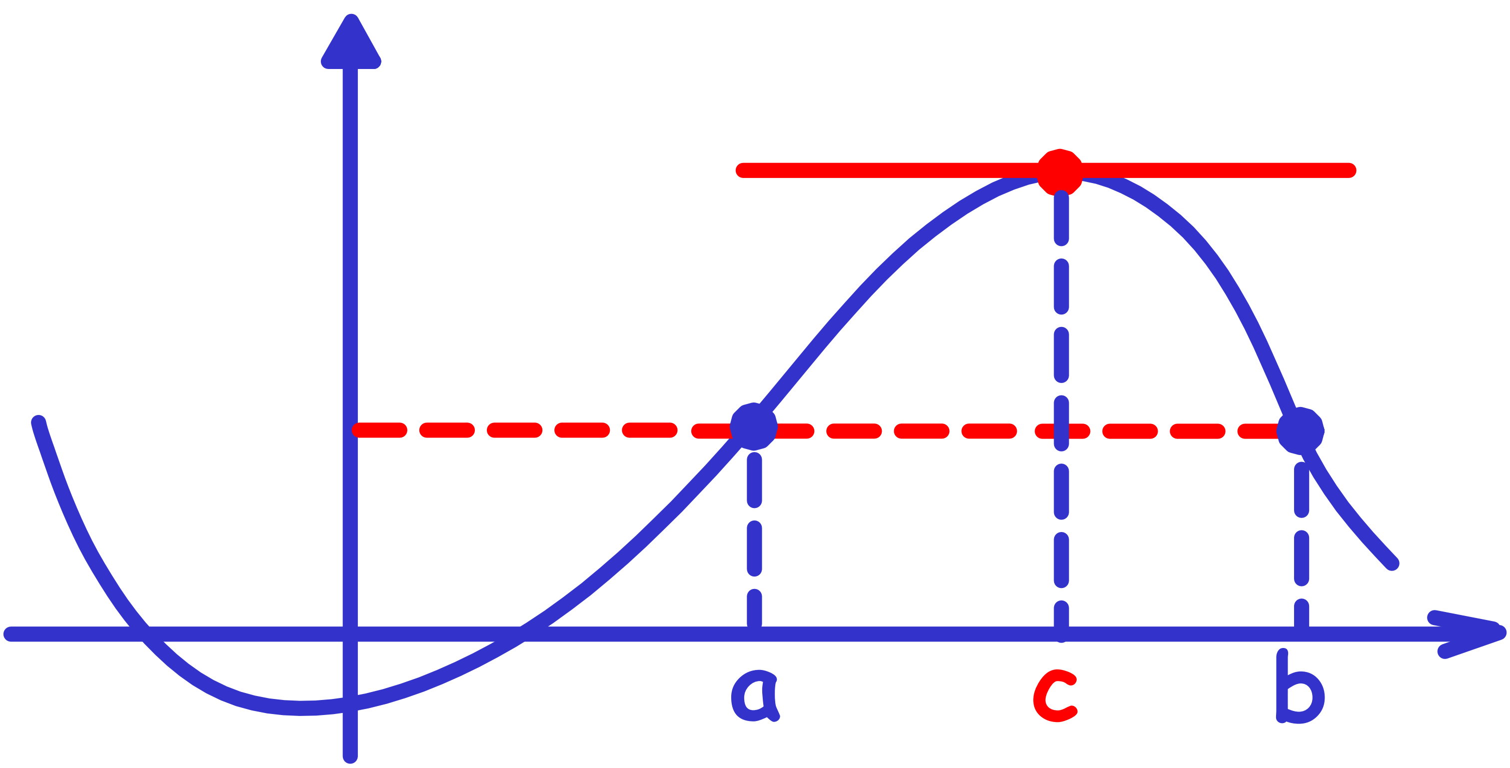
Steigung einer Sekante



Sonderfall des Mittelwertsatzes: Satz von Rolle

Unter gleichen Voraussetzungen, falls ausserdem f(a)=f(b) erfüllt ist, dann ist mindestens an einer Stelle c aus (a,b) die Ableitung Null:

$$f'(c)=0.$$



Geometrisch gedeutet bedeuten diese Sätze,

- dass eine Sekantensteigung an mindestens einer Zwischenstelle als Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen auftritt;

- dass insbesondere zwischen zwei Punkten des Graphs mit übereinstimmenden y-Koordinaten mindestens ein Punkt des Graphs mit waagrechter Tangente liegt.

Krümmung

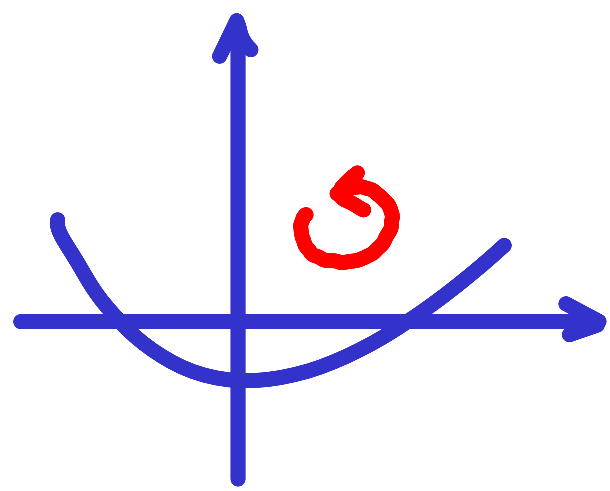
Die zweite Ableitung $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten, d.h. das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$.

Linkskrümmung:

Die Steigung der Tangente nimmt zu.

Die Tangente dreht sich im positiven Drehsinn.

Der Graph ist konvex.



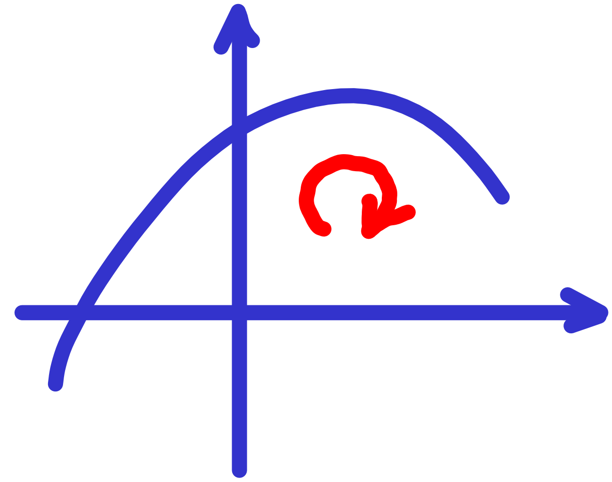
$f''(x_0)>0$

Rechtskrümmung:

Die Steigung der Tangente nimmt ab.

Die Tangente dreht sich im negativen Drehsinn.

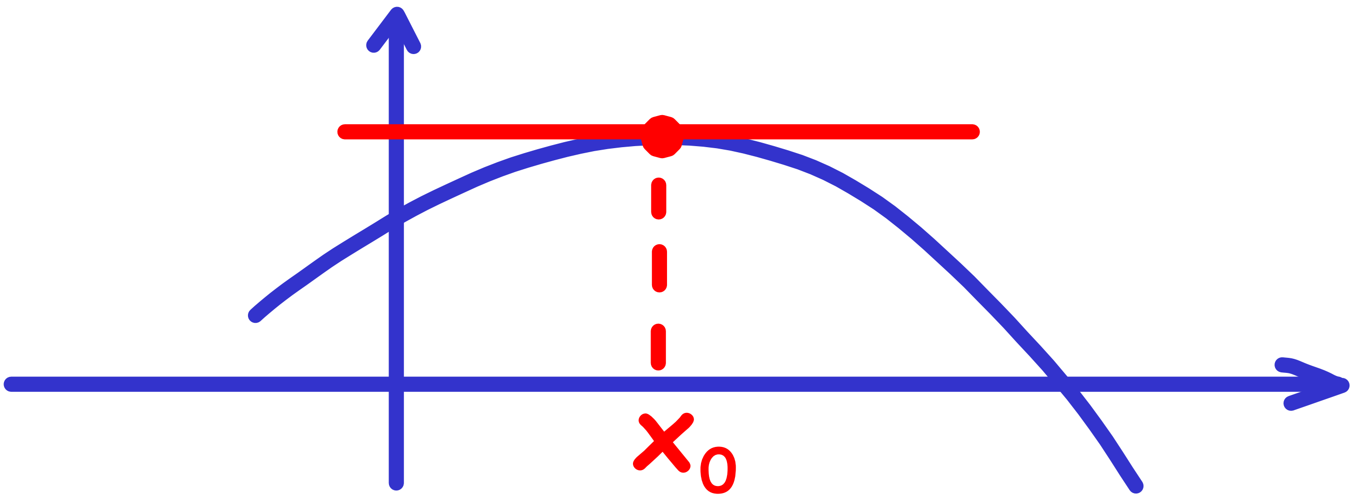
Der Graph ist konkav.



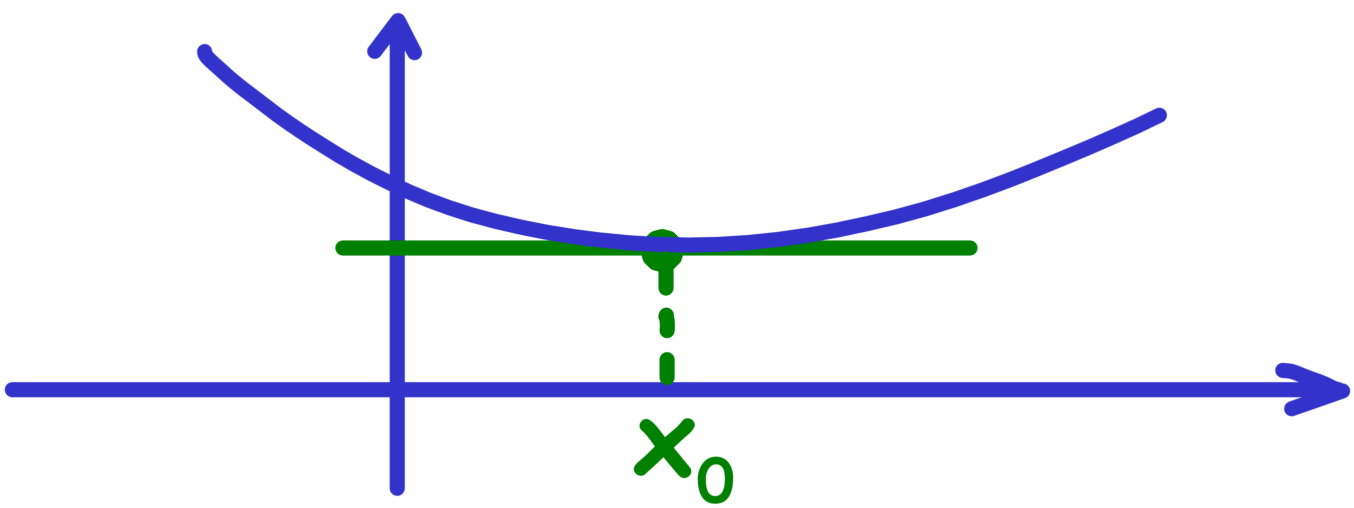
$f''(x_0)<0$

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

einer zweimal differenzierbaren Fkt f



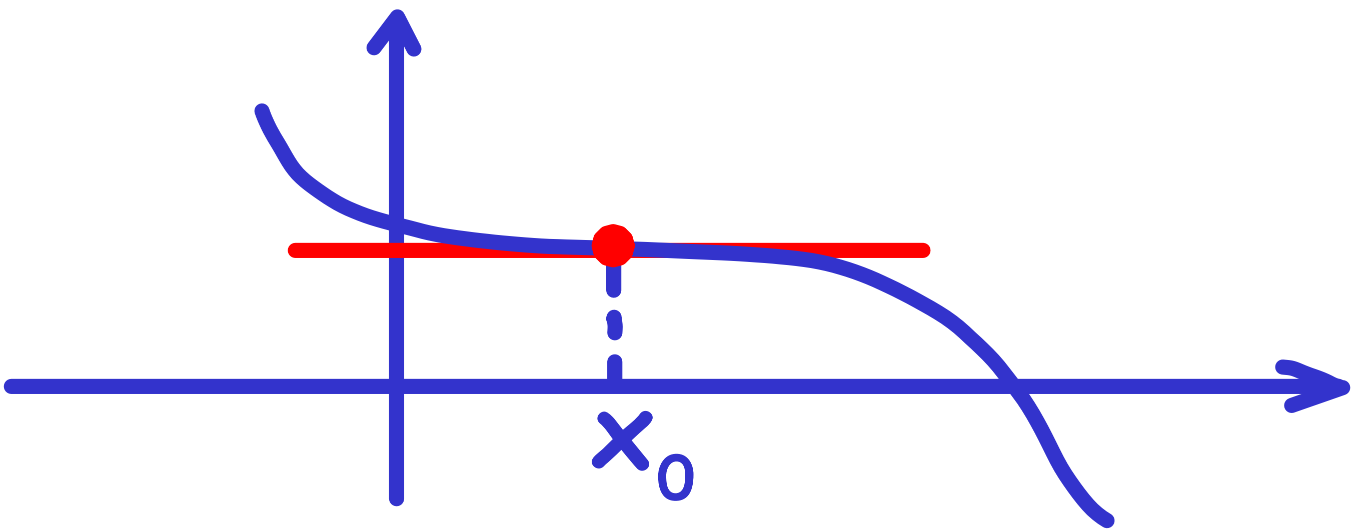
Ist $\boxed{f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)<0,}$ dann hat f ein lokales Maximum bei x_0.



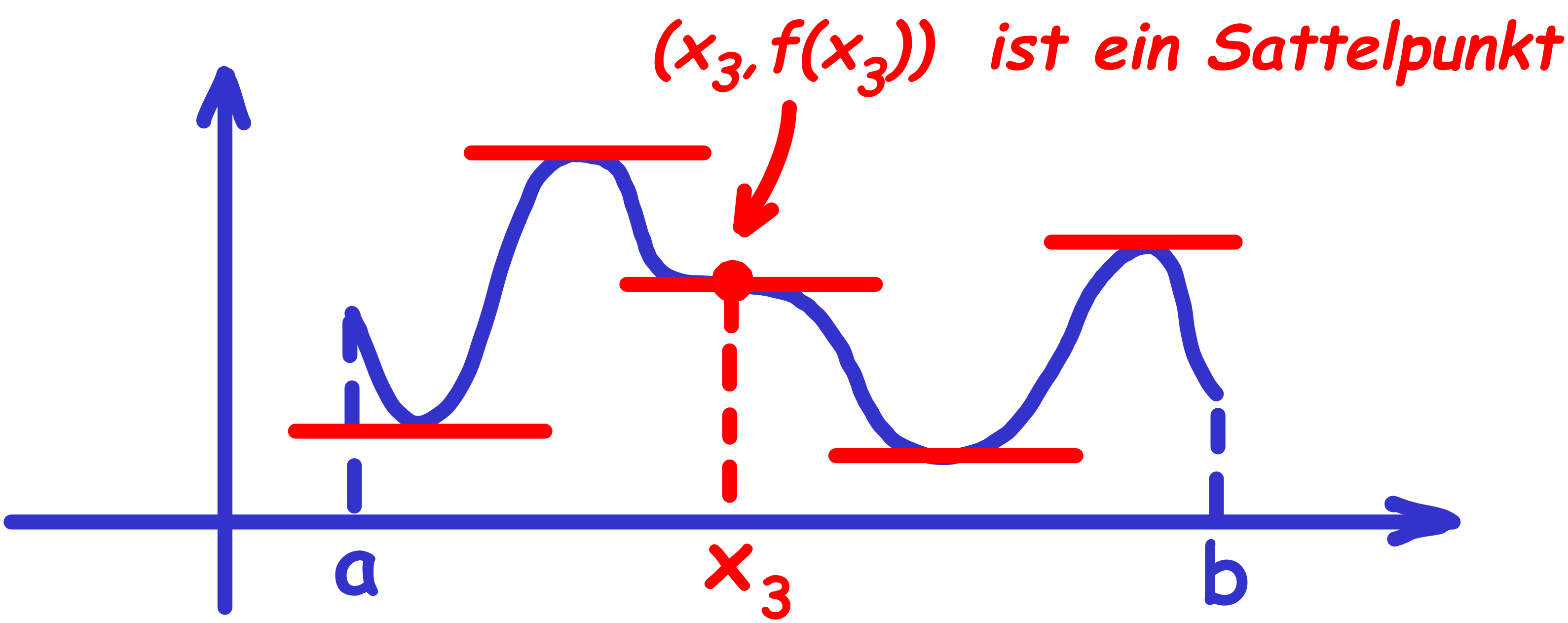
Ist $\boxed{f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)>0,}$ dann hat f ein lokales Minimum bei x_0.

Ist $f'(c)=0$ und $f''(c)=0$, so versagt der Test.

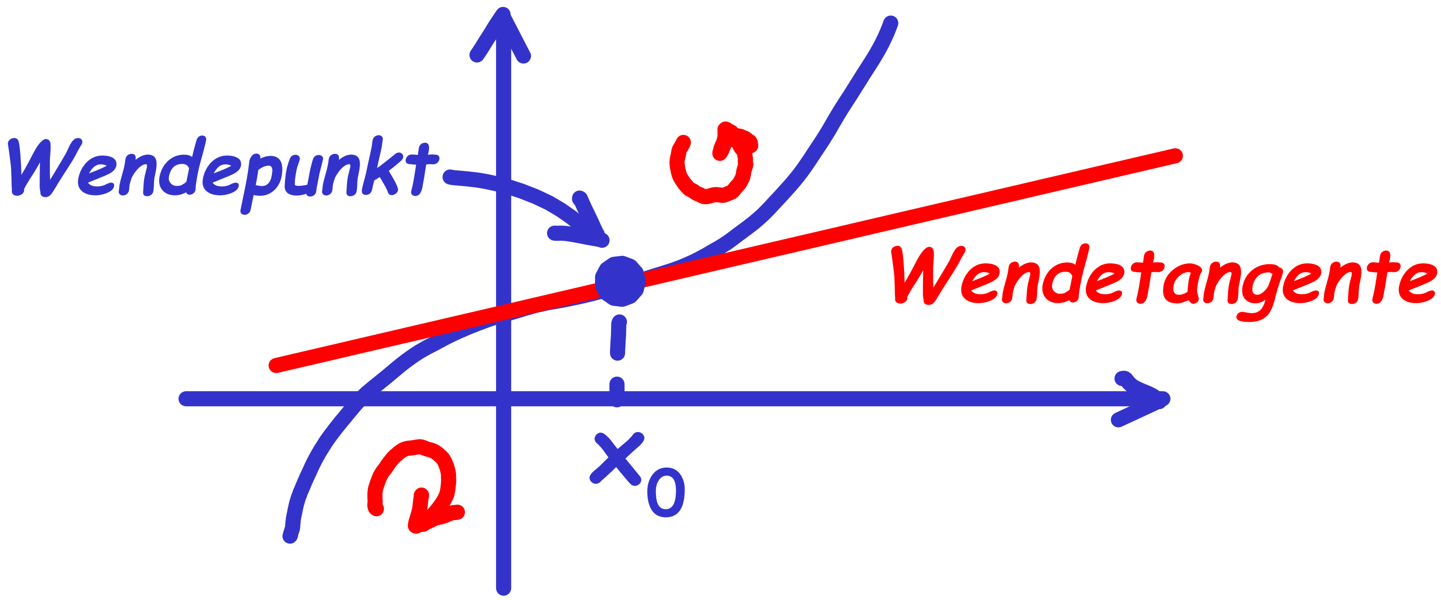
Sattelpunkte



Def Ein <u>Sattelpunkt</u> (oder Horizontalwendepunkt) ist ein Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$, wo $f'(x_0)=0$, aber der kein lokales Extremum ist.



Wendepunkte und Wendetangenten



Def Ein <u>Wendepunkt</u> ist ein Graphenpkt, wo der Drehsinn der Tangente sich ändert. Eine <u>Wendetangente</u> ist die Tangente an einem Wendepunkt.

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt:

dritte Ableitung

$$\boxed{f''(x_0)=0 \;\&\; f^{(3)}(x_0)\neq 0}$$

Bmk Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagrechter Tangente.

Ⓘ Differentialrechnung

I.12. Das Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren erlaubt die numerische Bestimmung einer Lösung x^* einer nichtlinearen Gleichung von der Form $f(x)=0$.
Die grundlegende Idee ist, die Funktion in einem Ausgangspunkt x_0 zu linearisieren, d.h. ihre Tangente zu bestimmen, und die Nullstelle der Tangente als verbesserte Näherung x_1 der Nullstelle x^* zu verwenden.

Anwendung der Linearisierung:

das Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein effizientes Iterationsverfahren zur Approximation einer Lösung x^* einer Gleichung $f(x)=0$:

Wir wählen einen Anfangswert x_0 "nahe" x^* und konstruieren eine Folge von schrittweise verbesserten Näherungswerten für x^*.

$$x_0 \curvearrowright x_1 \curvearrowright x_2 \curvearrowright x_3 \curvearrowright \dots \longrightarrow x^*$$

Iterationsvorschrift (Newton):

$$x_n \curvearrowright x_{n+1}$$

Wenn eine Näherung x_n der Nullstelle x^* vorhanden ist, finden wir eine verbesserte Näherung x_{n+1} wie folgt.

Wir bestimmen die Tangente an den f-Funktionsgraphen bei x_n, d.h. die Gerade mit der Gleichung

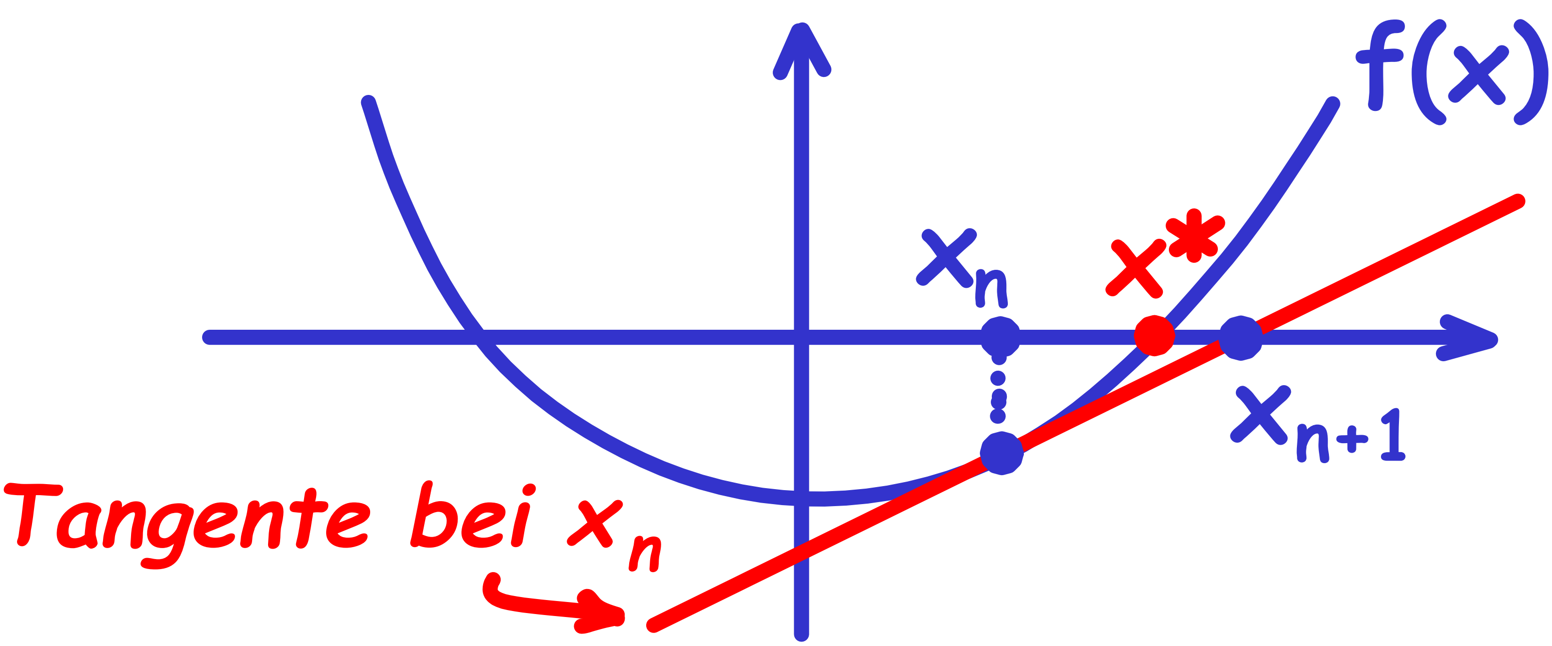
$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n).$$

Sei x_{n+1} der Schnittpunkt mit der x-Achse dieser Tangente, d.h.

$$0=f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n).$$

Also gilt:

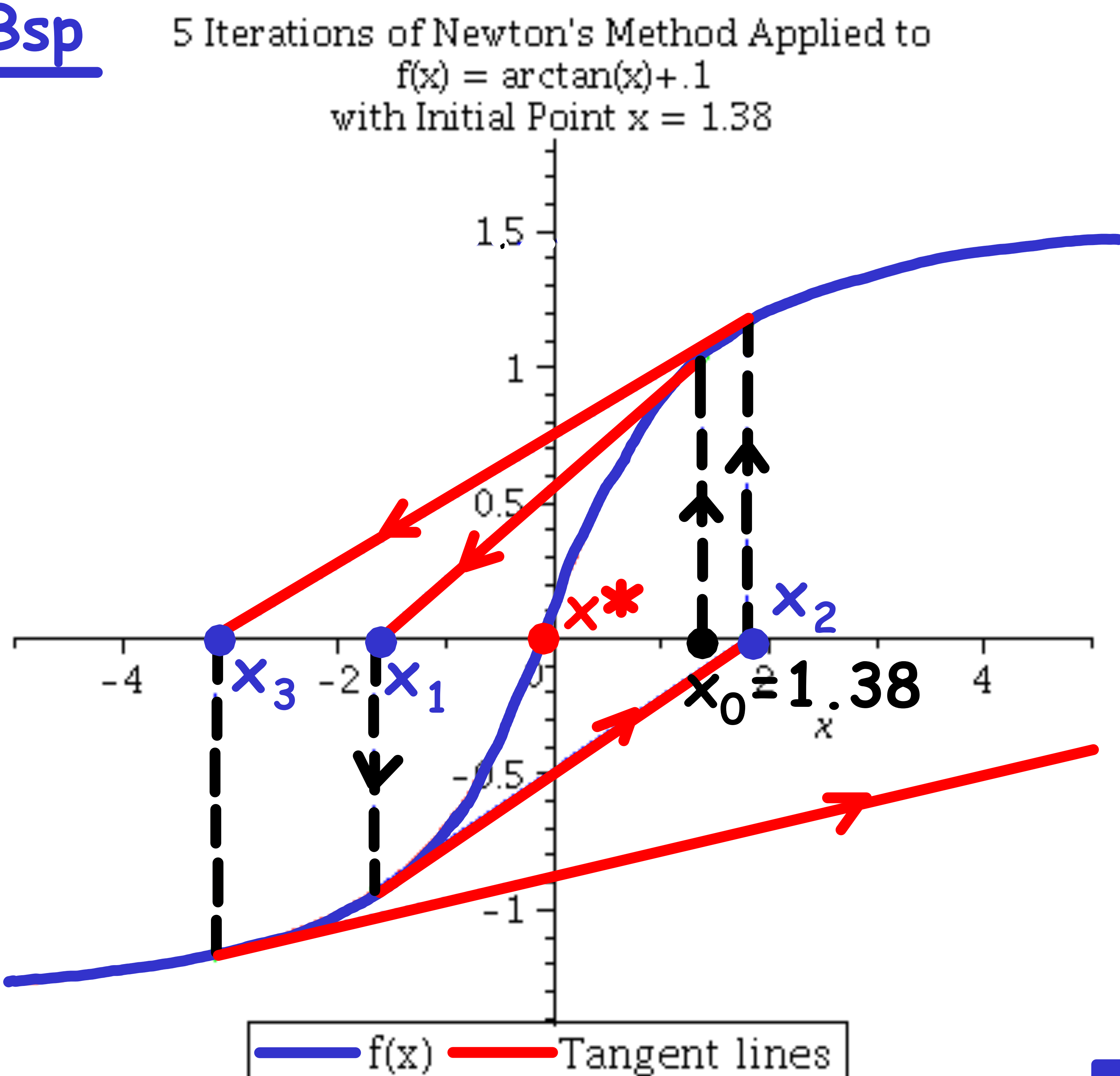
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



Vorsicht: das Verfahren kann divergent sein!

d.h. sukzessive x_n liegen nicht näher bei x^*

Bsp



Konvergenz der Newton-Folge

Wir können zwei benachbarte Näherungen x_n und x_{n+1} mittels der Linearisierung vergleichen:

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

wobei c zwischen x^* und x_n ist.

=> Die Folge konvergiert quadratisch gegen x^* falls:

- $f'(x^*) \neq 0$
- f zweimal stetig diff ist
- x_0 "genügend" nah ist ■

(I) Differentialrechnung

I.13. Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Eine Stammfunktion einer Funktion f ist eine Funktion F, deren Ableitung F' mit f übereinstimmt.

Unter dem unbestimmten Integral von f verstehen wir die allgemeine Stammfunktion von f, d.h. die Menge aller Stammfunktionen von f.

Stammfunktionen

Def Eine <u>Stammfunktion</u> von f auf einem Intervall I ist eine differenzierbare Funktion F mit $F'(x)=f(x)$ für alle x aus I.

Bsp Sei $f(x)=4x^3-x^2+6x-5$.

Dann ist z.B.

$$F(x)=x^4-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x+\underbrace{33}_{\text{die Konstante wurde frei gewählt}}$$

eine Stammfunktion von f.

■

Zwei beliebige Stammfunktionen von f auf einem Intervall I unterscheiden sich durch eine additive Konstante:

$$G'(x)=F'(x)=f(x) \Rightarrow G(x)=F(x)+\underbrace{C}_{\text{Konstante}}$$

für alle x aus I

Folgerung:

Ist F eine Stammfkt von f auf I, so ist die <u>allegemeine Stammfkt</u> von f auf I

$$G(x) = F(x) + \underbrace{\text{Konst}}_{\text{beliebige reelle Konstante}}.$$

Bsp Was ist die Stammfunktion $F(x)$ von $\cos x$, die $F(0)=33$ erfüllt?

Antwort: $F(x) = \sin x + \underbrace{33}$.

die Bedingung $F(0)=33$ bestimmt die Konstante

Bsp Was ist die Lösung des folgenden Systems?

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = \cos x \\ F(0) = 33 \end{cases}$$

heisst ein <u>Anfangswertproblems</u>

Antwort: $F(x) = \sin x + 33$.

Unbestimmtes Integral

Def Die allgemeine Stammfkt von f (also die Menge aller Stammfunktionen von f), heisst <u>unbestimmtes Integral</u> von f bzgl. x und wird bezeichnet

$$\int f(x)\, dx.$$

Integralzeichen

Bsp $\int x^3\, dx = \frac{1}{4} x^4 + \text{Konst.}$

Bsp $\int \cos x\, dx = \sin x + \text{Konst.}$

Bsp $\int \sin x\, dx = -\cos x + \text{Konst.}$

Folgerung der Kettenregel

Sei $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$ und $u(x)$ eine stetig diff Fkt.

$$\boxed{\text{Dann ist } F(u(x)) \text{ eine Stammfkt von } f(u(x))\cdot u'(x).}$$

Check: $\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))\cdot u'(x)$

Kettenregel

$= f(u(x))\cdot u'(x)$ ■

<u>Bsp</u> $\frac{1}{2}(u(x))^2$ ist eine Stammfkt von $u(x)u'(x)$ (hier $f(u)=u$). ■

<u>Bsp</u> $\ln|u(x)|$ ist eine Stammfkt von $\frac{u'(x)}{u(x)}$ (hier $f(u)=\frac{1}{u}$). ■