Quiz - 5. Nov. 2015 - Lösungen

Q1 a) Ja, zum Beispiel $f(x) = x^4$.
b) Nein. Wir berücksichtigen die folgende Tabelle, die wir ausgefüllt haben durch die Verwendung von: $g'(x_0) > 0 \Rightarrow g(x)$ steigt in der Nähe von x_0. Zum Beispiel, ist $f'''(0) > 0$, so steigt f'' in der Nähe von 0, und es folgt, dass $f''(x) < f''(0) = 0$ für $x < 0, x \approx 0$ und $f''(x) > f''(0) = 0$ für $x > 0, x \approx 0$.

	$x < 0, \approx 0$	$x = 0$	$x > 0, \approx 0$
f'''	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$\mathbf{0}$	$+$
f'	$+$	$\mathbf{0}$	$+$
f	steigend		steigend

Eine solche Funktion kann nie ein lokales Minimum bei $x = 0$ besitzen, da sie in einer Umgebung von $x = 0$ (links und rechts) zunimmt.

Q2 Wir benutzen eine Integralsubstitution ($u = \frac{x}{2}$, $dx = 2du$)

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u + \text{Konst.} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \text{Konst.}$$

und Partialbruchzerlegung ($x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$)

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + \text{Konst.} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \text{Konst.}$$

Q3 Wir bestimmen den Betrag von z,

$$|2iz| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |2i||z| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 2\ ,$$

und sein Argument,

$$\arg\left(z\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \pi \Leftrightarrow \arg z + \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \pi$$
$$\Leftrightarrow \arg z + \frac{\pi}{3} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \arg z = \frac{2\pi}{3}\ .$$

Es folgt, dass $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und $\text{Im}\, z = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Quiz - 5. Nov. 2015 - Lösungen, Forts.

Q4 Da $f(x) \geq g(x)$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} ,$$

gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx}_{[-\cos x]_0^\pi} = 2 = U \ .$$

Q5 Wir bringen die DGL zunächst in die Standardform (für $x \neq 0$)

$$y' \underbrace{-\frac{5}{x}}_{P(x)} y = x$$

und bestimmen einen integrierenden Faktor

$$v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\frac{5}{x}\,dx} = e^{-5\ln|x| + \text{Konst.}} = k\frac{1}{|x|^5} = k\frac{1}{x^5} \text{ für } x > 0 \ .$$

Hier ist $k = e^{\text{Konst.}}$ eine beliebige, positive Konstante. Wir wählen $k = 1$, multiplizieren beide Seiten der DGL in Standardform mit $v(x)$ und integrieren:

$$\underbrace{\frac{1}{x^5}y' - \frac{5}{x^6}y}_{\frac{d}{dx}\frac{y}{x^5}} = \underbrace{\frac{1}{x^5}x}_{\frac{1}{x^4}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^5} = -\frac{1}{3x^3} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{x^2}{3} + Cx^5 \ .$$

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, muss $y(1) = -\frac{1}{3} + C = 0$, also $C = \frac{1}{3}$. Die Lösung ist dann $y(x) = \frac{1}{3}\left(x^5 - x^2\right)$.

Q6 Mithilfe der Mitternachtsformel bestimmen wir die Lösungen der charakteristischen Gleichung dieser DGL:

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 2 \pm i \ .$$

Daher ist die allgemeine Lösung der DGL von der Form

$$y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) \ , \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Da

$$y'(x) = e^{2x}\left((2c_1 + c_2)\cos x + (2c_2 - c_1)\sin x\right) \ ,$$

führen die Anfangsbedingungen,

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = -1 \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 6 \ , \end{cases}$$

zur Lösung des AWPs $y(x) = e^{2x}\left(-\cos x + 6\sin x\right)$.