ETH Zürich
Dr. Ana Cannas

Sommer 2015

MUSTERLÖSUNG ZUR BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Anwendung des Gaussalgorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

also ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}\right)$$

Dann müssen für $(x, y, z, w)^T$

$$\begin{aligned} x + 2y - 7w &= 0 \\ -z + 4x &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist somit (mit $y = s$ und $w = t$)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

c) Offenbar wird die Lösung von 2 Vektoren aufgespannt und ist somit 2-dimensional.

2. **a)** Wir verwenden Gaussalgorithmus zur Bestimmung der Inversen Matrix für $a = b = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Somit ist die Inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir wenden die Laplacesche Entwicklung auf die letzte Zeile an

$$\det A = b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = b(a-2)$$

Die Determinante ist $\neq 0$ genau dann, wenn $a \neq 2$ und $b \neq 0$.

c) Wir verwenden Gaussalgorithmus um den Rang von A für $a = 2$ und $b = 1$ zu bestimmen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist der Rang der Matrix 2.

3. **a)** Die Eigenwerte erfüllen

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

und somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Die zugehörigen Eigenvektoren liegen im Kern von $\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 1$ erfüllt $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0$. Der Eigenraum zu λ_1 ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ_1.

Ein Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = 2$ erfüllt $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ_2.

b) Die Lösungen der DGL sind von der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Eine Basis der Lösungen ist gegeben durch

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass nur die triviale Linearkombination für $t \to +\infty$ gegen 0 strebt. Für jegliche andere Linearkombinationen streben die Komponenten der Lösung gegen $\pm\infty$. Daher ist der Ursprung kein stabiler Gleichgewichtspunkt.

4. **a)** Die charakteristische Gleichung der DGL ist

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Die Nullstellen dieser Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i.$$

b) Wir wissen bereits aus Teilaufgabe (a), dass die Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y_h(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

ist.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Dann sind

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -A\sin x + B\cos x \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\sin x = -y_p(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 12y(x) + 4y'(x) &= 12A\cos x + 12B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x \\ &= (12A + 4B)\cos x + (12B - 4A)\sin x \overset{!}{=} -40\sin x. \end{aligned}$$

und somit müssen

$$12A + 4B = 0 \quad \text{und} \quad 12B - 4A = -40.$$

Dann ist $A = 1$ und $B = -3$ und somit eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = \cos x - 3\sin x.$$

Also ist die allgemeine Lösung dieser DGL

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-2x}\left(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right) + \cos x - 3\sin x,$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

c) Da nun die Lösungen als Basis $e^{-2x}\cos(3x)$ und $e^{-2x}\sin(3x)$ haben, und diese beide für $x \to +\infty$ gegen 0 konvergieren kann nur die triviale Lösung periodisch sein. Also gibt es keine nicht-triviale periodische Lösung dieser Differentialgleichung.

5. a) Da sowohl Nenner als auch Zähler des Bruchs für $x \to 1$ gegen 0 konvergieren berechnen wir den Grenzwert mithilfe der Regel von Bernoulli L'Hospital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{\sin(x-1)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{\cos(x-1)} = \frac{0+1}{1} = 1.$$

b) Kritische Punkte sind dort, wo die erste Ableitung verschwindet $f'(x) \overset{!}{=} 0$. Hier ist $f'(x) = x\ln x \overset{!}{=} 0$ für $x = 1$. Es ist $f(1) = 0$. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} &\text{für } 0 < x < 1: \quad && f'(x) = \underset{>0}{x}\,\underset{<0}{\ln x} < 0 \\ &\text{für } x > 1: && f'(x) = \underset{>0}{x}\,\underset{>0}{\ln x} > 0. \end{aligned}$$

Somit fällt f auf $(0,1)$ und wächst auf $(1,+\infty)$ und schliesslich ist $f(1) = 0$ der minimale Wert von f.

c) Wir berechnen mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) + K = \int \underset{\uparrow}{x}\,\underset{\downarrow}{\ln x}\,dx + K \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx + K \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx + K = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + K. \end{aligned}$$

Ausserdem ist $f(1) = 0$ und somit folgt aus $f(1) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + K = -\frac{1}{4} + K$, dass $K = \frac{1}{4}$ und somit

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

6. **a)** Die Tangente an die Kurve $\vec{r}(t)$ zur Zeit t hat Richtungsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$. Wir berechnen

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist eine Parametrisierung der Tangente an die Bahnkurve zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}$ gegeben durch

$$T(s) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) + s \cdot \dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} + s \end{pmatrix}.$$

b) Die Länge der Bahnkurve zwischen den Punkten $A = \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B = \vec{r}(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt = \int_0^\pi \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\pi. \end{aligned}$$

c) $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2).$$

Somit ist die Arbeit von $\vec{F}$ wegunabhängig und schliesslich

$$W = \phi(B) - \phi(A) = \phi(-2, 0, \pi) - \phi(2, 0, 0) = (4 + \pi^2) - 4 = \pi^2.$$

7. **a)** Die lokalen Extrema erfüllen $f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0$. Also müssen

$$\begin{aligned} &f_x(x, y) = 2x = 0 \\ &f_y(x, y) = 4y^3 - 4y = 4y(y^2 - 1) = 4y(y - 1)(y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Dann sind $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ kritische Punkte von f.

b) Zur Klassifizierung berechnen wir die Hesse-Matrix von f.

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Dann sind

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hess}_f(0,1) = \mathrm{Hess}(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Hesse-Matrix für $(0,0)$ indefinit und für die anderen beiden Punkte positiv definit. Somit handelt es sich bei $(0,0)$ um einen Sattelpunkt und bei $(0,1), (0,-1)$ um lokale Minima.

c) Dazu betrachten wir die Einschränkung von f auf den Teil der Diagonalen parametrisiert als (t,t), $0 \leq t \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(t,t) &= t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 = t^4 - t^2 + 1 \\ f_t(t,t) &= 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1) \end{aligned}$$

und liefert die kritischen Punkte $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, wobei der Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ wegfällt, da er nicht auf der Diagonalen liegt. Zusätzlich müssen wir noch die Randpunkte $(0,0)$, der bereits ein kritischer Punkt ist, und $(1,1)$ überprüfen. Es sind

$$f(0,0) = 1, \quad f(1,1) = 1 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Somit ist 1 der maximale Wert und $\frac{3}{4}$ der minimale Wert von f eingeschränkt auf das besagte Liniensegment.

8. a) Wir verwenden Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$. Hier ist $0 \leq z \leq 1 + 2x^2 + 2y^2 = 1 + 2r^2$ und $0 \leq x^2 + y^2 = r^2 \leq 1$. Also ist das Volumen des Körpers gegeben durch

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+2r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^1 [rz]_0^{1+2r^2}\,dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r + 2r^3)\,dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\operatorname{div}\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = 2yz + (-2yz) + 1 = 1.$$

Eine notwendige Bedingung an $\vec{G}$, so dass $\vec{G}$ ein Rotationsfeld sein kann, ist das Verschwinden der Divergenz. Hier ist $\operatorname{div}\vec{G} \neq 0$ und somit kann $\vec{G}$ kein Rotationsfeld sein.

c) Der nach aussen gerichtete Fluss von $\vec{G}$ durch die Oberfläche S von V ist gegeben durch

$$W = \iint_S \vec{G}\cdot d\vec{S} = \iint_V \operatorname{div}\vec{G}\, dV,$$

wobei wir den Satz von Gauss verwendet haben. Da $\operatorname{div}\vec{G} = 1$ ist dieses Integral genau gleich dem Volumen von V und somit wie in Teilaufgabe (b) ermittelt gleich 2π.

9. **a)** Einsetzen des Separationsansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die Differentialgleichung liefert

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) + 2X(x)T(t) = X(x)\left(T'(t) + 2T(t)\right)$$

was man umschreiben kann als

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) + 2T(t)}{T(t)} =: k \in \mathbb{R}.$$

und somit sind die beiden Seiten der folgenden Gleichung unabhängig von x und t.

Also ist das zugehörige System von ODE's

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und} \quad T'(t) + (2-k)T(t) = 0.$$

b) Da $u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0$ muss die Lösung der ODE in x periodisch sein, wobei $k < 0$. Wir setzen $\sqrt{-k} = \rho$

$$X(x) = A\cos(\rho x) + B\sin(\rho x).$$

Nun folgt aus $u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0$, dass

$$B\rho\cos(\rho x) = -A\rho\sin(\rho\cdot 2\pi) + B\rho\cos(\rho\cdot 2\pi) = 0$$

und somit muss $B = 0$ und $2\pi\rho = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$, also $\rho = \frac{n}{2}$. Schliesslich ist

$$X_n(x) = A_n\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

eine Basislösung für $X(x)$.

Für T gilt nun $T'(t) = (k-2)T = \left(-\frac{n^2}{4} - 2\right) T$ und somit ist die Lösung dieser ODE die Exponentialfunktion

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n^2}{4}+2\right)t}.$$

Die Folge von Basislösungen ist also gegeben durch

$$u_n(x,t) = D_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\left(\frac{n^2}{4}+2\right)t}.$$

c) Die Cosinus-Reihe von f ist

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$$

Eine Reihendarstellung für die Lösung des Rand-Anfangswertproblems ist von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} D_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\left(\frac{n^2}{4}+2\right)t}.$$

Um die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ zu erfüllen, vergleichen wir die Koeffizienten der beiden Reihenausdrücke, wobei

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} D_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Dann ist $D_0 = \frac{\pi}{2}$ und für $\frac{n}{2} = 2k+1$,

$$D_{4k+2} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Schliesslich ist der obige Reihenausdruck für $u(x,t)$ gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{-2t} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)e^{-((2k+1)^2+2)t}.$$

10. **a)** Zuerst bemerken wir, dass diese PDE inhomogene Randbedingungen hat. Daher suchen wir zuerst eine spezielle von t unabhängige Lösung $u^*(x)$, welche die Randbedingungen erfüllt. Dann ist $0 = 4u^*_{xx}$ und somit machen wir einen linearen Ansatz $u^*(x) = Ax + B$. Einsetzen in die Randbedingungen liefert

$$u^*(-1) = -A + B = -1 \quad \text{und} \quad u^*(1) = A + B = 1$$

und somit $B = 0$ und $A = 1$ und schliesslich $u^*(x) = x$.

Nun setzt sich unsere ursprüngliche Lösung zusammen aus dieser Lösung $u^*(x)$ und einer Lösung $v(x, t)$

$$u(x, t) = u^*(x) + v(x, t),$$

wobei $v(x, t)$ die Lösung des folgenden homogenen Problems ist

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} \\ v(-1, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = x + 7\sin(3\pi x) - x = 7\sin(3\pi x). \end{cases}$$

Nun ist $v(x, t)$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung und wir können die in der Vorlesung ermittelten Basislösungen verwenden. Diese sind

$$v_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

wobei $L = 2$ und $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{2n\pi}{2} = n\pi$. Dann ist $v(x, t)$ gegeben durch

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 0} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$v(x, 0) = \sum_{n \geq 0} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 7\sin(3\pi x)$$

und somit muss $C_n = 7$ für $\frac{n}{2} = 3$, also $n = 6$ und für alle anderen n ist $C_n = 0$. Dann ist

$$v(x, t) = 7\sin(3\pi x)e^{-36\pi^2 t}$$

und schliesslich

$$u(x, t) = 7\sin(3\pi x)e^{-36\pi^2 t} + x.$$

b) Das Fourier-Integral von f ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \left[A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\right] dw,$$

wobei

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos(wv)\, dv \quad \text{und} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin(wv)\, dv.$$

Da es sich bei f um eine ungerade Funktion handelt, ist das Fourier-Integral ein reines Sinus-Integral und somit alle $A(w) = 0$. Wir berechnen

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^1 \sin(vw)\,dv + \underbrace{\int_{-1}^0 -\sin(vw)\,dv}_{=\int_0^1 \sin(vw)\,dv}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(vw)\,dv$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(vw)}{w}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(w)}{w} + \frac{1}{w}\right) = \frac{2}{\pi w}\left(1-\cos(w)\right).$$

Dann ist

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi w}(1-\cos(w))\sin(wx)\,dw.$$

c) Für einen unendlich langen Stab sieht die Lösung der PDE wie folgt aus

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right)e^{-c^2p^2t}\,dp.$$

Hier ist $c = 2$. Nun betrachten wir die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right)\,dp = \int_0^\infty \frac{2}{\pi w}(1-\cos(w))\sin(wx)\,dw$$

und vergleichen die Koeffizienten der beiden Integrale. Dann muss $A(p) = 0$ und $B(p) = \frac{2}{\pi w}(1-\cos(w))$ für $w = p$ und somit ist

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi p}(1-\cos(p))\sin(px)\right)e^{-4p^2t}\,dp.$$

11. 11.1 Die korrekte Antwort ist (d).

Es ist

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (2y+2)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{(x-1)^2}{2^2} + (y+1)^2 = 1. \end{aligned}$$

und somit ist $x = 1 + 2\cos t$ und $y = -1 + \sin t$.

11.2 Die korrekte Antwort ist (b).

Alle Gleichungen beschreiben entweder einen Kreis, eine Ellipse oder eine Hyperbel. Man überprüft entweder geometrisch, oder durch Berechnung, dass die beiden Kegelschnitte in (b) sich nicht schneiden. Für $x^2-y^2 = 4$ und $x^2+y^2 = 1$ folgt (durch Subtraktion) $-(x^2-y^2) + x^2 + y^2 = 2y^2 = 1 - 4 = -3$, was keine reelle Lösung besitzt.

11.3 Die korrekte Antwort ist (a).

Für eine viermal stetig differenzierbare Funktion sind die gemischten Ableitungen gleich unabhängig von der Ableitungsreihenfolge. Also muss der Ausdruck in (a) gleich der gegebenen Ableitung sein, was hier nicht stimmt. Die anderen Ableitungsausdrücke überprüft man direkt durch nachrechnen.

11.4 Die korrekte Antwort ist (a).

Die implizite Differentiation besagt, dass in einem Punkt (x_0, y_0)

$$x'(y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{4y_0^3 - 4y_0}{2x_0}.$$

Für $(x_0, y_0) = (1, \sqrt{2})$ ist

$$x'(\sqrt{2}) = -\frac{4 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{4} = -2\sqrt{2}.$$

11.5 Die korrekte Antwort is (c).

Die Richtungsableitung von f in einem Punkt P ist maximal in die Richtung des Gradienten. Wir berechnen

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{-y^2}, \frac{\cos z}{2\sqrt{\sin z}}\right).$$

Dann ist $\nabla f(1, 1, \frac{\pi}{2}) = (1, -1, 0)$ und nach Normierung ist $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Der Wert der Richtungsableitung von f im Punkt P ist

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = (1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

11.6 Die korrekte Antwort is (b).

Das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist gegeben durch

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{e^x}{1+y}, & f_{xx}(x,y) &= \frac{e^x}{1+y} \\ f_y(x,y) &= \frac{-e^x}{(1+y)^2}, & f_{yy}(x,y) &= \frac{2e^x}{(1+y)^3} \\ f_{xy} &= \frac{-e^x}{(1+y)^2}. \end{aligned}$$

Somit ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2.$$

11.7 Die korrekte Antwort ist (b).
Für das erste Integral sind die Grenzen bestimmt durch

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 1$$

welche sich einfach vertauschen lassen. Für das zweite Integral gilt

$$-2 \leq x \leq 0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}x \leq y \leq 1.$$

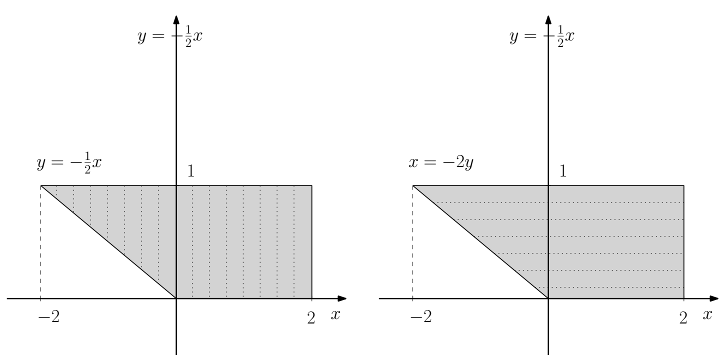
Diese vertauschen sich zu

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{und} \quad -2y \leq x \leq 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2}^0 \int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{-2y}^0 f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^2 f(x,y)\,dx + \int_{-2y}^0 f(x,y)\,dx\right] dy \\ &= \int_0^1 \int_{-2y}^2 f(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Das kann man auch anhand einer Skizze überprüfen



11.8 Die korrekte Antwort ist (a).

Offenbar handelt es sich um ein Gebiet zwischen zwei Kugeln mit Radius $1 \leq R \leq 2$. Für $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt mittels Kugelkoordinaten

$$z = R\cos\varphi = \sqrt{R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + R^2\cos^2\phi\cos^2\theta} = R\sin\varphi$$

und somit muss $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

11.9 Die korrekte Antwort ist (a).

Offenbar schickt $\vec{F}$ die in positive Richtung zeigende Diagonale (t, t), wieder auf sich selbst mit derselben Orientierung und dasselbe für das Liniensegment $(-t, t)$. Dies ist nur für das Vektorfeld in (a) erfüllt.

11.10 Die korrekte Antwort ist (a).

Da $\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial y}$ folgt, dass auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Rotation $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0}$. Somit erhalten wir mit dem Satz von Green

$$\oint_{C_2} H_1\,dx + H_2\,dy - \oint_{C_1} H_1\,dx + H_2\,dy = \iint_A \operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{N}dA = 0,$$

wobei $A = \{(x, y) :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ein Kreisannulus in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Daher ist

$$\oint_{C_2} H_1\,dx + H_2\,dy = \oint_{C_1} H_1\,dx + H_2\,dy = 1.$$