ETH Zürich
Dr. Ana Cannas

Sommer 2016

MUSTERLÖSUNG ZUR BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Da der maximale Definitionsbereich von $\ln$ das Intervall $(0, \infty)$ ist, besteht der maximale Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(2x - x^2)$ aus genau denjenigen $x \in \mathbb{R}$, für die $2x - x^2 > 0$ ist. Da der Graph $2x - x^2$ eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen bei 0 und 2 darstellt, ist genau dann $2x - x^2 > 0$, wenn $0 < x < 2$. Der maximale Definitionsbereich von f ist also das (offene) Intervall $(0, 2)$.

b) Die lokalen Extremstellen einer differenzierbaren Funktion sind die Nullstellen der Ableitung. Für die Ableitung von f ergibt sich mit der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left(2x - x^2\right)}{2x - x^2} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}.$$

(Da im Bereich $(0, 2)$ der Nenner von Null verschieden ist, ist diese Rechnung zulässig.) Dieser Bruch verschwindet genau dann, wenn der Zähler verschwindet und das passiert einzig und allein bei $x = 1$. Damit ist 1 die (einzige) lokale Extremstelle von f.

c) Da f stetig ist, die einzige lokale Extremstelle von f bei 1 liegt und die Funktion bei 0 und 2 den Grenzwert $-\infty$ hat, es gilt nämlich

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty,$$

ist besagte Extremstelle das globale Maximum von f. Wegen des Zwischenwertsatzes muss f auch alle Werte zwischen $-\infty$ und 0 annehmen. Folglich ist der Wertebereich von f das Intervall $(-\infty, 0]$.

d) Wir können $xf(x)$ auch als

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}$$

darstellen. Für $x \to 0^+$ divergieren Zähler und Nenner nach $-\infty$ bzw. ∞. Für den Quotient ihrer Ableitungen gilt bei $x \to 0^+$:

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\ln(2x - x^2)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2-2x}{2x-x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{(2-2x)x^2}{2x - x^2} = \frac{(2-2x)x}{2-x}$$

und für $x \to 0^+$ konvergiert dieser Ausdruck gegen 0. Nach der Regel von l'Hospital existiert damit der Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}}$ und stimmt mit dem oben berechneten Grenzwert des Quotienten der Ableitungen, 0, überein.

2. a) Das charakteristische Polynom der DGL

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

ist

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Da

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1,$$

sind Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

b) Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung ist von der Form

$$y_h(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p(x) = ke^{2x}$. Dann sind

$$y_p'(x) = 2ke^{2x}$$
$$y_p''(x) = 4ke^{2x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$e^{2x} = y_p''(x) - 4y_p'(x) + 5y_p(x) = (4 - 4\cdot 2 + 5)ke^{2x} = ke^{2x}$$

und somit muss $k = 1$ sein. Damit ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = e^{2x}.$$

d) Gemäß dem vorigen Aufgabenteil lautet die allgemeine Lösung dieser DGL

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{2x}\left(1 + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right),$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ reelle Konstanten sind. Es gilt

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 + C_1, \\ y'(0) &= 2y(0) + C_2, \end{aligned}$$

wobei die Gleichung für die Ableitung bei 0 aus der Produktregel folgt. Folglich erfüllt y die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 3$ genau dann, wenn $C_1 = 0$ und $C_2 = 1$. Die gesuchte Funktion ist

$$y(x) = e^{2x}(1 + \sin(x)).$$

3. a) Anwendung des Gaussalgorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 9 & 6 & 1 \end{array}\right) \overset{II-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 9 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-3\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{III-3\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

An der letzten Zeile kann abgelesen, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

b) Führt man die gleichen Schritte im obigen Gauß-Algorithmus mit

$$\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

auf der rechten Seite anstelle von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch, so gelangt man über

$$\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \overset{II-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix} \overset{III-3\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2k \end{pmatrix} \overset{III-3\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix}$$

zu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right).$$

Wegen der letzten Zeile ist das Gleichungssystem höchstens für $k = 0$ lösbar. Und für $k = 0$ steht auf der rechten Seite der Nullvektor, für den ein lineares Gleichungssystem stets lösbar ist. Somit ist das Gleichungssystem also einzig und allein für $k = 0$ lösbar.

c) Das Ergebnis beim Gauß-Algorithmus oben zeigt, dass der Bildraum von der ersten und der dritten Spalte aufgespannt wird und somit zweidimensional ist, d.h. die Matrix A hat Rang 2. Nun ist die Summe aus der Dimension des Kerns und dem Rang allgemeinhin gleich der Dimension des Ursprungsraum (5 in unserem Fall). Daher gilt:

$$\dim(N(A)) = 5 - \text{Rang}(A) = 5 - 2 = 3.$$

<u>Alternativ:</u> Das Ergebnis des Gauß-Algorithmus oben zeigt, dass beim Lösen der Gleichung

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

genau drei freie Parameter eingeführt werden können. Damit ist der Kern von A dreidimensional.

4. **a)** Die Eigenwerte erfüllen

$$0 = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

und somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Die zugehörigen Eigenvektoren liegen im Kern von $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 1$ erfüllt

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0.$$

Der Eigenraum zu λ_1 ist somit $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Ein Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = -1$ erfüllt

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0.$$

Der Eigenraum zu λ_2 ist demnach $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Gemäß dem vorigen Aufgabenteil ist hat die gesuchte Funktion die Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Genau dann gilt $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt $c_2 = -c_1$. Setzt man dies in die erste Zeile ein, erhält man $1 = 2c_1 + c_2 = 2c_1 - c_1 = c_1$. Damit ist $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist. Damit ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bleibt genau dann beschränkt, wenn $c_1 = 0$ ist. Der zweite Summand konvergiert nämlich wegen des e^{-t} für $t \to \infty$ gegen Null, sodass $(x(t), y(t))$ also genau dann beschränkt bleibt, wenn der erste Summand beschränkt bleibt. Für $c_1 = 0$ ist dies auch der Fall, wenn c_1 aber von Null verschieden ist, wird der Vektor

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betragsmäßig beliebig groß.
Die beschränkten Lösungen des Systems haben also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erfüllen damit die Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig ist, ist der vom Vektor $(1,1)^T$ aufgespannte eindimensionale Unterraum genau die Menge der Anfangsbedingungen, für die die Lösung des Systems beschränkt bleibt.

5. **a)** Es ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach x und y:

$$f_x(x,y) = 2y - 2 \text{ und } f_y(x,y) = 2x + 2y.$$

Der Gradient von f lautet somit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-2 \\ 2x+2y \end{pmatrix}.$$

b) Die kritischen Punkte von f sind diejenigen Punkte (x,y), für die $\nabla f(x,y) = 0$ ist, also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} 2y-2 &= 0, \\ 2x+2y &= 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $y = 1$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, ergibt sich $x = -1$. Eine Probe zeigt, dass $(-1,1)$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems ist.

Zur Klassifizierung des einzigen kritischen Punktes $(-1,1)$ ziehen wir die Hesse-Matrix Hess_f von f heran. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f gilt:

$$f_{xx}(x,y) = 0,\ f_{xy}(x,y) = 2 = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y) = 2.$$

Damit lautet die Hesse-Matrix von f an jedem Punkt (x,y) und insbesondere auch in $(-1,1)$:

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der Hesse-Matrix im kritischen Punkt $(-1,1)$ den Wert -4 hat und damit negativ ist, ist $(-1,1)$ ein Sattelpunkt.

c) Da das gegebene Dreieck D kompakt und f stetig ist, gibt es (mindestens) eine Maximumstelle. Falls sich diese im Inneren des Dreiecks befindet, ist sie ein kritischer Punkt. Der einzige kritische Punkt von f ist nach der vorigen Teilaufgabe jedoch $(-1,1)$ und der liegt nicht im betrachteten Dreieck. Daher muss das Maximum von f auf dem Dreieck in einem Randpunkt angenommen werden. Im Folgenden untersuchen wir das Verhalten von f auf den drei Liniensegmenten, die den Rand des Dreiecks D bilden:

- Auf dem (vertikalen) Segment von $(0,0)$ nach $(0,1)$ hat f den Verlauf

  $$f(0,y) = y^2,$$

  was für $0 \le y \le 1$ maximal ist bei $y = 1$ (was dem Punkt $(0,1)$ entspricht, $f(0,1) = 1$).

- Auf dem (horizontalen) Segment von $(0,0)$ nach $(1,0)$ lautet f

$$f(x,0) = -2x,$$

was für $0 \leq x \leq 1$ für $x = 0$ maximal ist (entspricht $(0,0)$, $f(0,0) = 0$).

- Auf dem (schrägen) Segment von $(1,0)$ nach $(0,1)$ hat f die Werte

$$f(x, 1-x) = 2x(1-x) + (1-x)^2 - 2x = 1 - 2x - x^2,$$

wobei $0 \leq x \leq 1$. Dies wird in diesem Parameterbereich maximal für $x = 0$, was man an der Monotonie von $x^2 + 2x$ für positives x oder auch an der Darstellung

$$1 - 2x - x^2 = -(x+1)^2 + 2$$

sehen kann. ($x = 0$ entspricht dem Punkt $(0,1)$ mit $f(0,1) = 1$.)

Ein Vergleich der Maxima auf den Kanten des Dreiecks zeigt, dass der maximale Wert von f auf dem Dreieck D 1 beträgt (und dieser Wert einzig und allein im Punkt $(0,1)$ angenommen wird).

d) Stellt man das Dreieck als

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

dar, führt dies auf den Integralausdruck

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy + y^2 - 2x)\, dy\, dx.$$

Alternativ liefert die Darstellung

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1-y\}$$

dagegen den Ausdruck

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (2xy + y^2 - 2x)\, dx\, dy.$$

6. **a)** Mit der Beziehung $x = r\cos(\vartheta),\ y = r\sin(\vartheta)$ zwischen kartesischen und Polarkoordinaten erhält man die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \leq t \leq \pi$$

für die Trajektorie des Teilchens.

b) Die Geschwindigkeit des Teilchens ergibt sich als Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Tangente an die Bahnkurve ist genau dann horizontal, wenn die y-Komponente des Geschwindigkeitsvektors verschwindet, d.h. wenn

$$0 = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) = e^{-t}\big(\cos(t) - \sin(t)\big).$$

Da $e^{-t} > 0$ für jedes t, ist dies äquivalent zu $\cos(t) = \sin(t)$, was für $t \in [0, \pi]$ genau bei $t = \frac{\pi}{4}$ eintritt. Der Zeit $t = \frac{\pi}{4}$ entspricht der Punkt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

auf der Bahnkurve.

c) Für eine Potentialfunktion f zu $\vec{F}$ muss gelten:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{2y}{x^2+y^2} + 1. \end{cases}$$

Integration der ersten Gleichung (nach x bei beliebigem, aber fixem y) liefert, dass

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + g_1(y),$$

wobei $g_1(y)$ eine höchstens von y abhängige Funktion ist. Integration der zweiten Gleichung (nach y bei beliebigem, aber fixem x) ergibt

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y + g_2(x).$$

Somit ist $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. *Jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ ist als vollständige Antwort gültig.*

d) Da $\vec{F}$ ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y$ ist, ist die von $\vec{F}$ entlang eines Weges verrichtete Arbeit lediglich von den Endpunkten des Weges abhängig ist, ergibt sich:

$$W = f(-e^{-\pi}, 0) - f(1, 0) = \ln(e^{-2\pi}) - \ln(1) = -2\pi.$$

7. a) In Zylinderkoordinaten lautet die Parametrisierung

$$\vec{q}(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}, \ 0 \le r \le 1, \ 0 \le \vartheta < 2\pi.$$

Alternativ kann man genauso gut anstatt alles durch r und ϑ auszudrücken, die Variablen z und ϑ als freie Variablen wählen. Damit lautet die Parametrisierung

$$\vec{p}(z,\vartheta) = \begin{pmatrix} \sqrt{z+1}\cos(\vartheta) \\ \sqrt{z+1}\sin(\vartheta) \\ z \end{pmatrix}, \ -1 \leq z \leq 0, \ 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

b) Zur Berechnung des Flächeninhalts benötigen wir das Volumenelement. Dies ergibt sich aus

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\vartheta) \\ -2r^2\sin(\vartheta) \\ r \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vartheta} \right| = r\sqrt{4r^2+1}.$$

Somit ist der Inhalt A der Paraboloidstücks S gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1}\, d\vartheta\, dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr \\ &= 2\pi \Big[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right). \end{aligned}$$

Mit der *alternativen Parametrisierung* $\vec{p}$ erhält man

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z+1}}\cos(\vartheta) \\ \frac{1}{2\sqrt{z+1}}\sin(\vartheta) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{z+1}\sin(\vartheta) \\ \sqrt{z+1}\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{z+1}\cos(\vartheta) \\ -\sqrt{z+1}\sin(\vartheta) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vartheta} \right| = \sqrt{z+\frac{1}{4}}.$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt aus der Formel

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \sqrt{z+\frac{1}{4}}\, dz\, d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}\big(z+\frac{1}{4}\big)^{\frac{3}{2}}\right]_{z=-1}^{z=0} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\big(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8}\big)\, d\vartheta \\ &= \frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5}-1\big). \end{aligned}$$

c) Gemäß dem Satz von Stokes ist der Wirbelfluss eines Vektorfeldes $\vec{F}$ von unten nach oben durch S, also

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA,$$

wobei $\vec{n}$ den nach oben zeigenden Einheitsnormalenvektor von S bezeichne, gleich der Zirkulation von $\vec{F}$ entlang der (bzgl. $\vec{n}$ positiv orientierten) Randkurve C von S, welche in diesem Fall durch

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; 0 \leq t < 2\pi$$

parametrisiert werden kann. Diese Zirkulation berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) - 0 \\ e^0 - \cos(t) \\ \cos(t) - e^{\sin(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\sin^2(t) + \cos(t) - \cos^2(t)\big)\, dt = \int_0^{2\pi} \big(\cos(t) - 1\big)\, dt \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

8. **a)** Eine stationäre Lösung der Wellengleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den gegebenen inhomogenen Dirichletrandbedingungen ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u''(x) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 1, \quad . \end{cases}$$

Eine Lösung von $u'' = 0$ hat die Form

$$u(x) = Ax + B$$

mit reellen Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ gelten zusätzlich genau dann, wenn $A = 1$ und $B = 0$. Somit ist die eindeutige Lösung $u^*(x)$ des obigen Randwertproblems gegeben durch $u^*(x) = x$.

b) Für $v(x,t) = u(x,t) - u^*(x)$ gilt:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) &= u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t) + \underbrace{u^*_{xx}(x)}_{=0}, & 0 \leq x \leq 1, \\ v(0,t) &= u(0,t) - u^*(0) = 0 - 0 = 0, & t \geq 0, \\ v(1,t) &= u(1,t) - u^*(1) = 1 - 1 = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) &= u(x,0) - u^*(x) = f(x) - u^*(x) = f(x) - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(x,0) &= u_t(x,0) - 0 = g(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es löst u auch genau dann das Problem aus der Aufgabenstellung, wenn v dieses Problem löst.

c) Gemäß dem vorigen Aufgabenteil ist die Lösung gegeben durch $v(x,t)+x$, wobei v das Problem

$$\begin{cases} v_{tt} &= v_{xx}, & 0 \le x \le 1, \\ v(0,t) &= 0, & t \ge 0, \\ v(1,t) &= 0, & t \ge 0, \\ v(x,0) &= -\sin(3\pi x), & 0 \le x \le 1, \\ v_t(x,0) &= 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

löst. Die Basislösungen für die Wellengleichung auf $(0,1)$ mit Dirichletrandbedingungen lauten

$$\sin(n\pi x)\cos(n\pi t),\ n = 1,2,\ldots,$$
$$\sin(n\pi x)\sin(n\pi t),\ n = 1,2,\ldots.$$

Die allgemeine Lösung hat demgemäß die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\big(A_n\cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\big)$$

Beim Anpassen dieser allgemeinen Lösung an die Anfangsbedingungen ergibt sich aus der Bedingung $v_t(x,0) = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) B_n n = 0,$$

d.h. die B_n verschwinden. Die Lösung $v(x,t)$ des Problems ist also von der Form

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi t).$$

Die Anfangsbedingung $v(x,0) = -\sin(3\pi x)$ liefert

$$-\sin(3\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_n = \begin{cases} -1, & n = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$v(x,t) = -\sin(3\pi x)\cos(3\pi t)$$

und die gesuchte Lösung lautet

$$u(x,t) = x - \sin(3\pi x)\cos(3\pi t).$$

9. 9.1 Die korrekte Antwort ist (b).

Es ist

$$(4\cos(t) - 1 + 1)^2 + 16(\sin(t) - 2 + 2)^2 = 16$$

und durch Einsetzen von $t = 0$ sieht man, dass keine der anderen Antwortmöglichkeiten zutreffen kann.

9.2 Die korrekte Antwort ist (d).

Die Gleichung beschreibt ein hyperbolisches Paraboloid. Somit kommen nur (c) und (d) in Frage. Ferner sollte der Schnitt mit der xz-Ebene ($y = 0$) eine in positiver x-Richtung geöffnete und der Schnitt mit der xy-Ebene ($z = 0$) eine in negativer x-Richtung geöffnete Parabel liefern. Dies trifft bei (c) zu (und bei (d) verhält es sich genau umgekehrt).

9.3 Die korrekte Antwort ist (d).

Der Graph von $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ kann als Kurve mit der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden. Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix},$$

woraus sich als Bogenlänge der Ausdruck

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

ergibt.

9.4 Die korrekte Antwort ist (c).

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion sind die gemischten Ableitungen gleich unabhängig von der Ableitungsreihenfolge. Von den a priori 6 möglichen gemischten zweiten Ableitungen sind also stets zwei gleich. Für die übrig gebliebenen sechs Ableitungen

$$f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}$$

gibt es i.A. keinen Grund, gleich zu sein, wie man z.B. an der Funktion

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 8xy + 10xz + 12yz$$

sehen kann.

9.5 Die korrekte Antwort is (D).

Das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{4})$ ist gegeben durch

$$f(0,\frac{\pi}{4})+f_x(0,\frac{\pi}{4})x+f_y(0,\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}f_{xx}(0,\frac{\pi}{4})x^2+f_{xy}(0,\frac{\pi}{4})x(y-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}f_{yy}(0,\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \tan(y), \quad & f_{xx}(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= \frac{x}{\cos^2(y)}, \quad & f_{yy}(x,y) &= \frac{2x\sin(y)}{\cos^3(y)}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{\cos^2(y)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_x(0,\frac{\pi}{4}) &= 1, \quad & f_{xx}(0,\frac{\pi}{4}) &= 0 \\ f_y(0,\frac{\pi}{4}) &= 0, \quad & f_{yy}(0,\frac{\pi}{4}) &= 0 \\ f_{xy}(0,\frac{\pi}{4}) &= 2. \end{aligned}$$

Somit ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$x + 2x(y - \frac{\pi}{4}) = x - \frac{\pi}{2}x + 2xy.$$

9.6 Die korrekte Antwort ist (a).

Die implizite Differentiation besagt, dass in einem Punkt (x_0, y_0)

$$x'(y_0) = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}.$$

Für $f(x,y) := \ln(x+y) + x^2y + x + y$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{x+y} + 2xy + 1 \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{x+y} + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Bei $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ist also

$$f_x(1,0) = 2 \text{ und } f_y(1,0) = 3$$

und somit nach dem oben erwähnten Resultat über implizite Differentiation

$$x'(0) = -\frac{3}{2}.$$

9.7 Die korrekte Antwort ist (c).

Die Parabel $y = 6 - x^2$ und die Winkelhalbierende $y = x$ treffen sich im ersten Quadranten im Punkt $(2, 2)$. Damit ist der von der Geraden $x = 0$, der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = 6 - x^2$ eingeschlossenene Bereich gegeben durch

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 6 - x^2\}.$$

Der Flächeninhalt dieses Bereichs kann damit durch die Berechnung nachfolgenden Integrals ermittelt werden:

$$\int_0^2 \int_x^{6-x^2} dy\, dx = \int_0^2 (6 - x - x^2)\, dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2}$$
$$= 12 - 2 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}.$$

Für das erste Integral sind die Grenzen bestimmt durch

9.8 Die korrekte Antwort ist (b).

Da $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, ist die erste Bedingung äquivalent zu $1 \leq \varrho \leq \sqrt{3}$. Da $z = \varrho \cos(\varphi)$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho \sin(\varphi)$, ist die zweite Bedingung äquivalent zu $\cos(\varphi) < -\sin(\varphi)$ $(\varphi \in [0, \pi])$. Das heißt, $\varphi \in (\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

9.9 Die korrekte Antwort ist (b).

(a) kommt nicht in Frage, weil $(y^2, 0)$ parallel zur x-Achse liegt. (c) und (d) scheiden aus, weil die x-Komponente der beiden Vektorfelder aus (c) und (d) im ersten und vierten Quadranten positiv und im zweiten und dritten negativ ist. Das abgebildete Vektorfeld hingegen weißt im vierten Quadranten durchaus negative x-Komponenten und im zweiten Quadranten positive x-Komponenten auf.

Für (b) spricht zum Beispiel, dass das abgebildete Vektorfeld auf der Winkelhalbierenden $y = x$ horizontal ist und der Eindruck einer Rotationsbewegung, den das Bild vermittelt, kann auf den Bestandteil $(y, -x)$ in (b) zurückgeführt werden.

9.10 Die korrekte Antwort ist (c).

Die Gebiete A, B und D sind einfach zusammenhängend. Daher ist jedes rotationsfreie Vektorfeld auf A, B oder D automatisch ein Gradientenfeld auf A, B oder D. Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist rotationsfrei:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{x^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-z}{x^2+z^2}\right) \end{pmatrix}$$

Das Gebiet C ist hingegen nicht einfach zusammenhängend. Daher ist die verschwindende Rotation von $\vec{F}$ nicht hinreichend, dass $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist.

Und tatsächlich kann $\vec{F}$ auf C gar kein Gradientenfeld sein, weil es geschlossene Wege gibt, entlang welcher $\vec{F}$ ein nicht verschwindendes Wegintegral hat. Betrachte z.B. die Kurve, gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t) \\ 0 \\ \sqrt{3}\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \leq t < 2\pi.$$

Man rechnet nach, dass sie in C enthalten ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}\sin(t)}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}\cos(t)}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin(t) \\ 0 \\ \sqrt{3}\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

<u>Alternativ:</u> Auf den Gebieten A, B und D ist die Funktion

$$\frac{y^3}{3} - \arctan\left(\frac{x}{z}\right)$$

ein Potential für $\vec{F}$.

9.11 Die korrekte Antwort ist (b).

Die π-periodische Fourierreihe stellt die π-periodische Fortsetzung der Funktion dar und konvergiert punktweise gegen ebendiese in mindestens all den Punkten, an denen sie stetig differenzierbar ist. Damit konvergiert die π-periodische Fourierreihe von $f(x) = x^2 - \pi x$ an der Stelle $\frac{3\pi}{2}$ gegen den Wert der π-periodischen Fortsetzung von f an der Stelle $\frac{3\pi}{2}$. Dies ist aber wegen der Periodizität nichts anderes als

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}.$$

9.12 Die korrekte Antwort ist (b).

Schreibt man die Differentialgleichung

$$u_{tt} = (1 + x^2 + 2t^2)u_{xx}$$

in der Form

$$Au_{tt} + 2Bu_{xt} + Cu_{xx} = 0$$

mit den Funktionen

$$A(x,t) = 1,\ B(x,t) = 0,\ C(x,t) = -(1 + x^2 + 2t^2),$$

so liefert die Negativität der Determinante

$$AC - B^2 = -(1 + x^2 + 2t^2) < 0,$$

dass die Gleichung (in jedem Punkt) hyperbolisch ist.