ETH Zürich
Dr. Ana Cannas

Winter 2015

Musterlösung zur Basisprüfung Mathematik I und II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. Anwendung des Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\\4&8&12\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

a) Die Matrix hat also Rang $= 2$ und somit ist der Lösungsraum eindimensional und kann wie folgt beschrieben werden

$$c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Da $\vec{b}$ die Summe der drei Spalten von A sein soll, ist $\vec{b}$ von der Form

$$\vec{b} = A \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \vec{v}\right),$$

wobei $\vec{v} \in \ker A$. Daher ist der Lösungsraum gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Anwendung des Gaussalgorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\2&3&4&2\\3&5&7&4\\4&8&12&k\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&-2&-2\\0&-1&-2&-2\\0&0&0&k-8\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&2&2\\0&0&0&k-8\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Das System besitzt also eine Lösung für $k = 8$.

Bitte wenden!

2. **a)** Das Taylorpolynom 2. Ordnung um $x_0 = 2$ ist gegeben durch

$$T_{f,2}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} f'(x)\big|_{x=2} &= \ln(2) + 1 \\ f''(x)\big|_{x=2} &= \frac{1}{x}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$T_{f,2}(x) = 2\ln(2) + (\ln(2) + 1)(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2.$$

b) Da sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to 1$ gegen 0 konvergieren, wenden wir Bernoulli de L'Hospital an

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\ln(x)}{1 - x^3} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{-3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

c) Die Funktion f ist stetig und definiert für $x \in (0, +\infty)$. Da $\ln(x)$ langsamer wächst als x gilt

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty.$$

Da f stetig ist und 1 zwischen 0 und $+\infty$ liegt, gibt es gemäss Zwischenwertsatz ein x so dass $x\ln(x) = 1$.

Anstelle der beiden Grenzwerte genügt auch die Feststellung, dass

$$f(1) = 0 \quad \text{und} \quad f(e) = e.$$

3. Diese Differentialgleichung ist trennbar und somit äquivalent zu

$$\frac{1}{1 + y^2}\,\frac{dy}{dx} = x^2.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{1 + y^2}\,dy = \int x^2\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad &\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + c \\ \Rightarrow \quad &y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + c\right) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und mit der Anfangsbedingung folgt

$$0 = y(0) = \tan(c).$$

Wählen wir $c = 0$. Somit ist die Lösung der DGL

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

Da $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ überall dort definiert ist, wo $\cos(z)$ keine Nullstelle hat und die Anfangsbedingung der DGL bei $x = 0$ ist, muss $-\frac{\pi}{2} < z < +\frac{\pi}{2}$. Also muss

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$$

und somit ist der Definitionsbereich der DGL $\left(-\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}\right)$

4. **a)** Wir betrachten die folgende DGL

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 10 \stackrel{!}{=} 0$$

also $\lambda = \pm i = 0 \pm i$.

Nun brauchen wir die Eigenvektoren. Die Eigenvektoren, sind im Kern von

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$

also muss $\vec{v}_1$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = i$, $\vec{v}_1 \in \ker \begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix}$ erfüllen und somit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$ und da die Eigenwerte komplex konjugiert sind ist $\vec{v}_2 = \bar{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren sind also $\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i.$

Bitte wenden!

b) Die allgemeine reelle Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =& c_1 e^{0t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + c_2 e^{0t}\left(\sin(t)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ =& c_1\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + c_2\left(\sin(t)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

oder

$$\begin{cases} x(t) &= 5c_1\cos(t) + 5c_2\sin(t) \\ y(t) &= \cos(t)(3c_1 - c_2) + \sin(t)(3c_2 + c_1). \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) Für die Anfangsbedingung berechnen wir

$$\begin{cases} x(0) &= 5c_1 \stackrel{!}{=} 5 \\ y(0) &= 3c_1 - c_2 \stackrel{!}{=} 1 \end{cases}$$

also ist $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$ und somit ist die Lösung der DGL mit dieser Anfangsbedingung gleich

$$\begin{cases} x(t) &= 5\cos(t) + 10\sin(t) \\ y(t) &= \cos(t) + 7\sin(t). \end{cases}$$

5. a) Die homogene Gleichung ist $y'' + 2y' = 0$. Wir suchen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0$$

und sind somit $\lambda = 0$ und $\lambda = -2$. Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Wir machen den Ansatz

$$y_p(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}$$

und setzen in die DGL ein

$$2A = 6$$

somit ist $A = 3$ und

$$y_p(x) = 3x$$

eine partikuläre Lösung.

6. **a)** Ein Normalenvektor zur Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,0,1)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} f_x(1,0) \\ f_y(1,0) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit ist die Gleichung für die Tangentialebene

$$\begin{aligned} 4(x-x_0) + (-2)(y-y_0) + (-1)(z-z_0) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 4(x-1) + (-2)y + (-1)(z-1) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 4x - 2y - z &= 3. \end{aligned}$$

Alternativen: Wenn man den Normalenvektor hat, ist die Tangentialebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oder man ermittelt die Gleichung wie folgt

$$f_x(1,0)x + f_y(1,0)y + (-1)z = d$$

und bestimmt d mittels Einsetzen von $(1,0,1)$.

b) Mit der impliziten Differentiation folgt aus $f(x, y(x)) = 1$ dass

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

also

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} = -\frac{4x^3 - 4xy}{6y^2 - 2x^2}$$

und deshalb im Punkt $(1,0)$

$$y'(1) = -\frac{f_x(1,0)}{f_y(1,0)} = -\frac{4}{-2} = 2.$$

7. Wir verwenden Lagrange Multiplikatoren. Wir bezeichnen $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Dann muss für $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} &f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ &f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 \\ &g(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Also

$$\begin{aligned} 4 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -3 + \lambda \cdot 2y &= 0 \end{aligned}$$

und somit $x = -\dfrac{2}{\lambda}$ und $y = \dfrac{3}{2\lambda}$ und eingesetzt in g

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1$$

also $\lambda = \pm\dfrac{5}{2}$ und somit die Punkte $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ und $\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$. Dort ist $f\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) = -5$ das Minimum und $f\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) = 5$ das Maximum.

<u>Alternative:</u> Man kann auch $x^2 + y^2 = 1$ parametrisieren mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$ und in die Funktion f einsetzen, dann ist $f(\gamma(t)) = 4(\pm\sqrt{1-t^2}) - 3t$ und daher für $t \neq \pm 1$

$$f'(\gamma(t)) = \pm\left(4\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{2}\right) - 3 \overset{!}{=} 0$$

und daher $t = \pm\dfrac{3}{5}$. Das liefert dieselben Punkte wie oben, wobei $(0, \pm 1)$ kritische Punkte des Kreises sind und nicht von f eingeschränkt auf den Kreis).

8. Wir verwenden Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}$$

mit Volumenelement $dV = r\,dr\,dz\,d\varphi$. Dann folgt aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ und $0 \leq z$, dass

$$0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2}$$

Siehe nächstes Blatt!

und $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\iiint_V (1 - x^2 - y^2)\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (1 - r^2) r\, dr\, dz\, d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[-\frac{1}{4}(1 - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\
&= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \left[(1 - (1 - z^2))^2 - 1 \right] dz \\
&= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (z^4 - 1)\, dz = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{z^5}{5} - z \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{5} - 1 \right] \\
&= \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Falls man für die Integralgrenzen $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}$ ermittelt hat, berechnet man

$$\begin{aligned}
\iiint_V (1 - x^2 - y^2)\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} (1 - r^2) r\, dz\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r \sqrt{1 - r^2}\, dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r\, dr \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{5} \frac{1}{(-2)} (1 - r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{5} (1 - r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = 2\pi \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Bestätigung unter Verwendung von Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\
y &= R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\
z &= R \cos(\vartheta)
\end{aligned}$$

mit Volumenelement $dV = R^2 \sin(\vartheta)\, dR\, d\phi\, d\vartheta$. Da wir über die obere Halbkugel integrieren, folgt $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq R \leq 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\iiint_V (1 - x^2 - y^2)\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - R^2 \sin^2(\vartheta)) R^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, dR\, d\varphi \\
&= V - 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^3(\vartheta)\, d\vartheta\, dR,
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

wobei $V = \dfrac{2\pi}{3}$ das halbe Kugelvolumen ist. Mit partieller Integration und der Formel $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ kann man zeigen, dass

$$\int \sin^3(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{4}\left(3\sin(\vartheta) - \sin(3\vartheta)\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\iiint_V \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dV &= \iiint \left[1 - R^2 \sin^2(\vartheta)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\right]\, dV \\
&= \iiint_V \left[1 - R^2\sin^2(\vartheta)\right]\, dV \\
&= \iiint_V 1\, dV - \iiint_V R^2 \sin^2(\vartheta)\, dV \\
&= V - \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 R^4 \sin^3(\vartheta)\, dR\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= V - 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^3(\vartheta)\, d\vartheta\, dR \\
&= \frac{2\pi}{3} - 2\pi \left[\frac{R^5}{5}\right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\left(3\sin(\vartheta) - \sin(3\vartheta)\right)\, d\vartheta \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5}\frac{1}{4}\left[-\cos(\vartheta) - \frac{1}{3}(-\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5}\frac{1}{4}\left[3 - \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

9. **a)** Das Gebiet D beschreibt eine nach oben geöffnete Schale. Wir parametrisieren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} = \varrho(r,\varphi) \quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
dA = \left|\frac{\partial\varrho}{\partial r} \times \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right|\, dr\, d\varphi &= \left|\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\right|\, dr\, d\varphi \\
= \left|\begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}\right|\, dr\, d\varphi &= \sqrt{4r^4\cos^2(\varphi) + 4r^4\sin^2(\varphi) + r^2}\, dr\, d\varphi \\
= r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Schliesslich ist der Flächeninhalt von D gegeben durch

$$\iint_D dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\left[\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{8}\right]_0^1$$
$$= 2\pi\frac{1}{12}\left[(4+1)^{\frac{3}{2}}] - 1\right] = \frac{\pi}{6}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{6}[5\sqrt{5}-1].$$

b) Wir wollen den Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch D von unten nach oben. Dann ist mit dem Satz von Stokes

$$\Phi_D = \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dA = \oint_C \vec{F}d\vec{r},$$

wobei C die Randkurve von D mit passender Orientierung bezeichnet, also ein positiv orientierter Einheitskreis im Level $z=1$ von oben betrachtet. Wir parametrisieren C als

$$\varrho(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 1\end{pmatrix} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Dann ist

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\vec{F}(\varrho(t))\cdot\dot{\varrho}(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-2\sin(t)\\ 2\cos(t)\\ -e^{\cos(t)+\sin(t)+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix}dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(2\sin^2(t)+2\cos^2(t)\right)\,dt = 2\int_0^{2\pi}dt = 4\pi.$$

10. Aus der Vorlesung haben wir die Basislösungen für die Wärmeleitungsgleichung mit periodischer Randbedingung und Anfangsbedingung von der Form

$$\begin{cases} u_t = c^2u_{xx}\\ u(x+L,t) = u(x,t)\\ u(x,0) = f(x).\end{cases}$$

Dann sind die Basislösungen von der Form

$$e^{-\lambda_n^2 t}\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\quad e^{-\lambda_n^2 t}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

mit $\lambda_n = \frac{2n\pi c}{L}$.

In unserem Fall sind $c^2=1$ und $L=2\pi$ und somit $\lambda_n^2 = \frac{4n^2\pi^2}{4\pi^2} = n^2$ und $\frac{2n\pi}{L} = \frac{2n\pi}{2\pi} = n$.

Bitte wenden!

Die Lösung ist also von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right) e^{-n^2 t}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right) = 2\cos(3x) - 5\sin(4x)$$

also $A_n = 0$ für alle $n \neq 3$ mit $A_3 = 2$ und $B_n = 0$ für alle $n \neq 4$ mit $B_4 = -5$ und schliesslich

$$u(x,t) = 2\cos(3x)e^{-9t} - 5\sin(4x)e^{-16t}.$$

<u>Alternativ</u>: Wir machen den Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = k.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von t abhängt müssen beide Seiten konstant $= k \in \mathbb{R}$ sein. Wir suchen die Lösungen von

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und} \quad T'(t) - kT(t) = 0. \tag{1}$$

Da wir periodische nicht triviale Lösungen des Systems suchen, muss $k < 0$ und wir finden für X

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x).$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $X(x + 2\pi) = X(x)$ also muss $\sqrt{-k} = n$ also $k = -n^2$. Dann haben wir

$$X(x) = A\cos(nx) + B\sin(nx).$$

Für T finden wir

$$T(t) = Ce^{kt} = Ce^{-n^2 t}.$$

Also ist eine Basislösung von der Form

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right) e^{-n^2 t}$$

und schliesslich

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right) e^{-n^2 t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Nun verwenden wir die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\cos(3x) - 5\sin(4x)$ und erhalten

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) = 2\cos(3x) - 5\sin(4x)$$

also $A_n = 0$ für alle $n \neq 3$ mit $A_3 = 2$ und $B_n = 0$ für alle $n \neq 4$ mit $B_4 = -5$ und schliesslich

$$u(x,t) = 2\cos(3x)e^{-9t} - 5\sin(4x)e^{-16t}.$$

11. 11.1 Die korrekte Antwort ist (c).

Man überzeugt sich, dass die Gleichung (hier zum Niveau 0)

$$0 = x^2 - y^2 + z^2$$

ein Kegel um die y-Achse beschreibt. Für $y = c$ fix haben wir, $c^2 = x^2 + z^2$, was für $c > 0$ einen Kreis um die y-Achse beschreibt. Da dies nicht vom Vorzeichen von c abhängt, ergibt sich also ein Doppelkegel mit der y-Achse als Rotationsachse und Zentrum im Ursprung.

11.2 Die korrekte Antwort ist (c).

Um die kritischen Punkte zu ermitteln, berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -3x^2 + 6x = 3x(-x+2) \overset{!}{=} 0 \qquad && \Rightarrow x = 0,\ x = 2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 - 3 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow y = \pm 1 \end{aligned}$$

und somit sind $(0,\pm 1),\ (2,\pm 1)$ die kritischen Punkte von f. Um diese zu Klassifizieren berechnen wir die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -6x + 6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante von f ist $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$. Dann sind

$\Delta(0,1) = 36 > 0$	und	$f_{xx}(0,1) = 6 > 0$	$\Rightarrow$ lokales Minimum
$\Delta(0,-1) = -36 < 0$			$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$\Delta(2,-1) = 36 > 0$	und	$f_{xx}(2,-1) = -6 < 0$	$\Rightarrow$ lokales Maximum
$\Delta(2,1) = -36 < 0$			$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

Bitte wenden!

11.3 Die korrekte Antwort ist (c).

Der Satz der impliziten Funktion besagt, dass wenn $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ es eine Umgebung um (x_0, y_0) gibt, wo sich f als eine differenzierbare Funktion $y(x)$ von x darstellen lässt (und analog für $x(y)$). Ausserdem gilt

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}, \quad \left(\text{resp.} \quad x'(y) = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}\right)$$

und eine durch $f(x,y) = 0$ definierte Funktion $y = y(x)$ ist differenzierbar genau dann, wenn $f_y(x,y) \neq 0$ (und analog für eine Funktion $x = x(y)$ falls $f_x(x,y) \neq 0$).

Wir berechnen

$$f_x(x,y) = 3(x-1)^2 e^{(x-1)^3}(y^2-1) \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = e^{(x-1)^3} 2y.$$

Dann ist für $(1,0)$ $f_x = f_y = 0$ und für $(0,1)$ $f_x = 0$ aber $f_y \neq 0$. Also lässt sich die Funktion nur in der Nähe des Punktes $(0,1)$ als differenzierbare Funktion von x darstellen.

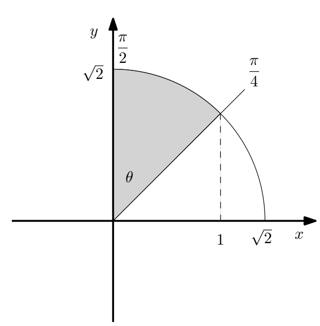
11.4 Die korrekte Antwort ist (c).

Man überprüft direkt durch Einsetzen in das Gleichungssystems, das zwar alle Funktionen die Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$ erfüllen, jedoch nur (a) und (c) die Differentialgleichung. Schliesslich erfüllt die Funktion in (a) jedoch die Randbedingung nicht, da $\sinh(0) \neq \sinh(\pi)$ und somit ist die Funktion in (c) die Lösung.

$$\begin{cases} (-\sin x)\sinh y + \sin x \sinh y = 0 \\ \sin(0)\sinh y = \sin(\pi)\sinh y \\ \sin x \sinh(0) = 0. \end{cases}$$

11.5 Die korrekte Antwort ist (a).

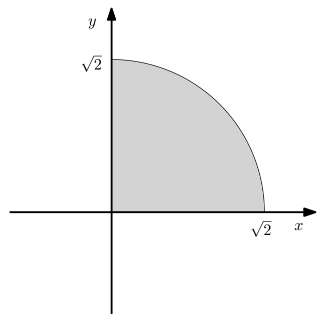
Da in I das Integral über r und dasjenige über θ unabhängig voneinander sind folgt direkt, dass I =(c)=(d). Desweiteren entspricht das Integrationsgebiet von I dem Kreis mit Radius $r = \sqrt{2}$ zwischen dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$.



Siehe nächstes Blatt!

Das Integral in (b) beschreibt ebenfalls dasselbe Integral, da in kartesischen Koordinaten die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 2$ auf der oberen Halbebene nach y aufgelöst gleich $y = \sqrt{2 - x^2}$ ist. Dann entspricht $\theta = \frac{\pi}{4}$ der Gerade $y = x$ und wird bis zum Rand des Kreises $y = \sqrt{2 - x^2}$ integriert. Man überprüft, dass die x-Koordinate dann von 0 bis 1 verläuft.

Das Integral in (a) ist verschieden von den anderen und entspricht dem Integrationsgebiet



Bemerkung: Dass I den gleichen Wert hat, wie das Integral in (a) (und **nicht** (b)) folgt direkt mit der Reparametrisierung in Polarkoordinaten

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

und Bestimmung der Integrationsgrenzen wie oben.

11.6 Die korrekte Antwort is (b).

Mit der Gleichung für die Kugel, sieht man direkt, dass $R = 2$. Wir verwenden die Kugelkoordinaten für $z = R\cos\theta$ mit $0 \leq \theta \leq \pi$. Dann ist $z \leq \sqrt{2}$ falls $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ auf $[0, \pi]$ und dies ist erfüllt für $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$.

Das kann man sich auch geometrisch überlegen, denn $z = \sqrt{2}$ falls

$$R\cos\theta = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Da θ der Winkel zwischen dem Ortsvektor und der z-Achse ist und für $\theta = 0$ der Ortsvektor genau auf der positiven z-Halbachse beschreibt muss $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$.

11.7 Die korrekte Antwort ist (c).

Wir verwenden Polarkoordinaten $X = r\cos t$ und $Y = r\sin t$ mit $r^2 = X^2 + Y^2$ und $0 \leq t \leq 2\pi$. Umformen der Gleichung $(x - 1)^2 + 4y^2 = 16$ liefert eine Ellipse (gestauchter Kreis)

$$\left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2y}{4}\right)^2 = 1$$

Bitte wenden!

und somit

$$\frac{x-1}{4} = \cos t \quad \Rightarrow \quad x = 1 + 4\cos t \quad \text{und} \quad \frac{y}{2} = \sin t \quad \Rightarrow \quad y = 2\sin t.$$

Alternativ kann man auch einfach die Werte für x und y in die Gleichung einsetzen und deren Korrektheit überprüfen.

11.8 Die korrekte Antwort ist (b).

Ein Vektorfeld ist konservativ, wenn es sich um ein Gradientenfeld handelt. Man sieht leicht, dass eine Potentialfunktion f folgende Gleichungen erfüllen muss

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int 2xyz\,dx + C(y,z) = x^2yz + C(y,z) \\ f(x,y,z) &= \int x^2z\,dy + C(x,z) = x^2yz + C(x,z) \\ f(x,y,z) &= \int x^2y\,dz + C(x,y) = x^2yz + C(x,y) \end{aligned}$$

und somit ist $f(x,y,z) = x^2yz$ ein Potential für $\vec{F}$ und somit ist $\vec{F}$ konservativ.

Um zu Ermitteln ob $\vec{F}$ quellenfrei ist berechnen wir die Divergenz

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) = 2yz \neq 0$$

also ist $\vec{F}$ nicht quellenfrei.

11.9 Die korrekte Antwort ist (c).

Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Satz von Green wie folgt ist

$$\int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\,dA = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$$

wobei $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}$ mit $\vec{N}$ einem Normaleneinheitsvektor zu A, $\vec{T}$ ein Tangenteneinheitsvektor zu C und C die Randkurve von A.

Dann steht auf der linken Seite das Integral über die Rotation von $\vec{F}$ durch die Fäche A und auf der rechten Seite steht genau die Zirkulation von $\vec{F}$ auf dem Rand von A.

11.10 Die korrekte Antwort ist (a).

Auf $[-\pi,\pi]$ ist (2π)-periodische Fortsetzung der Betragsfunktion symmetrisch . Daher muss ihre Fourierreihe eine reine Cosinusreihe sein.

Siehe nächstes Blatt!

Konkret:

Es handelt sich hier um eine symmetrische Funktion und somit ist die Fourierreihe eine reine Cosinusreihe. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\,dx$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{\sin(n\pi)}{n}\right) - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{n}\sin(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\right) \\
&= 0 + \frac{2}{n^2\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\begin{cases} -2, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade}, n \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daher ist die Fourierreihe

$$
\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).
$$