ETH Zürich
Dr. Ana Cannas Winter 2016

Musterlösung zur Basisprüfung Mathematik I und II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Wir verwenden Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dann muss für einen Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$x + 2y = 3 \quad \text{und} \quad z = -1$$

gelten. Wir setzen $y := t \in \mathbb{R}$ als Parameter. Dann ist der Lösungsraum gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Wir verwenden das Gaussverfahren zur Bestimmung der Inversen Matrix der Koeffizientenmatrix für $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

und somit ist die Inverse Matrix gegeben durch $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Wir verwenden abermals Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2 & -2 \\ 2 & 4 & k & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k-2 & 2 \end{array}\right).$$

Dann ist das Gleichungssystem genau dann nicht lösbar, wenn $k - 2 = 0$, also $k = 2$.

<u>Alternative:</u> Man kann auch den Rang der Koeffizientenmatrix A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ vergleichen. Insbesondere, haben beide maximal den Rang 3. Daher müssen wir nur noch den Fall finden, wo Rang von $A <$ Rang von $(A|\vec{b})$. Der Rang von A ist nicht voll, wenn die Matrix singulär ist, also wenn $\det A = 0$. Hier ist

$$\det A = k^2 + 8 - 8 - 2k = k^2 - 2k = k(k-2)$$

und somit ist die Matrix singulär für $k = 0$ und $k = 2$. Wir wissen bereits aus Teilaufgabe (a), dass das Gleichungssystem für $k = 0$ lösbar ist. Für $k = 2$ ist das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

was nicht lösbar ist.

2. a) Wir wollen überprüfen, ob die Gleichung

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{b}$$

lösbar ist. Hier haben wir 3 Gleichungen für zwei unbekannte Parameter α und β. Daher genügen die Gleichungen zweier Komponenten um die beiden Parameter zu bestimmen.

Man kann sehen, dass die Gleichungen für die ersten beiden Komponenten für $\alpha = -1$ und $\beta = 1$ erfüllt sind, jedoch die dritte nicht,

$$-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

Daher ist der Vektor $\vec{b}$ keine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

1. Alternative: Man kann auch das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mithilfe von Gaussalgorithmus untersuchen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Das obige Gleichungssystem ist nicht lösbar (die unteren beiden Zeilen des Gleichungssystems widersprechen sich) und somit ist der Vektor $\vec{b}$ keine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

2. Alternative: Der Vektor $\vec{b}$ ist genau dann eine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, wenn die drei Vektoren linear abhängig sind. Das bedeutet, dass die Matrix mit den drei Vektoren in den Zeilen trivialen Kern haben muss, was wiederum äquivalent zu Determinante $\neq 0$ ist. Wir berechnen mit Laplaceentwicklung nach der dritten Spalte

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (9-10) - (3-4) + 4(5-6) = -4 \neq 0 \end{aligned}$$

also ist der Kern trivial und somit die drei Vektoren linear unabhängig, das heisst der Vektor $\vec{b}$ kann keine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sein.

b) Ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ steht ist das Kreuzprodukt der beiden Vektoren

$$\vec{c} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 3-1 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Natürlich ist auch jedes (nicht-triviale) Vielfache von $\vec{c}$ ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ steht.

Alternativ: Wir suchen einen Vektor $\vec{c}$, so dass $\vec{v}_1 \cdot \vec{c} = 0$ und $\vec{v}_2 \cdot \vec{c} = 0$. Das heisst wir müssen den Kern der Matrix mit den beiden Vektoren in den Zeilen untersuchen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann sehen wir auch, dass zum Beispiel der Vektor $\vec{c}$ von oben im Kern liegt.

c) Die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind linear unabhängig und im dreidimensionalen Raum. Daher hat der gesuchte Raum Dimension gleich 1. Das sieht man auch anhand von Teilaufgabe (b).

3. **a)** Die charakteristische Gleichung dieser DGL ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

und hat als Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i.$$

b) Für den Ansatz $y_p(x) = Ae^x + B$ gilt $y_p'(x) = Ae^x = y_p''(x)$. Eingesetzt in die DGL liefert dies

$$\begin{aligned} -Ae^x + 5Ae^x + 5B &= 8e^x - 5 \\ \Rightarrow \qquad 4Ae^x + 5B &= 8e^x - 5 \end{aligned}$$

und somit muss $B = -1$ und $A = 2$. Dann ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = 2e^x - 1.$$

c) Nun brauchen wir noch die Lösung der homogenen DGL

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

zu bestimmen. Wir haben aber bereits in Teilaufgabe (a) die Eigenwerte bestimmt. Daher ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = e^x \left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

und somit die allgmeine Lösung der DGL

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x \left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right) + 2e^x - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. **a)** Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix dieses Systems sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und somit ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2.

Nun bestimmen wir die Eigenvektoren. Für $\lambda = -1$ müssen wir den Kern von $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ bestimmen. Dann kann man direkt sehen, dass der Eigenraum von $\lambda = -1$ eindimensional und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda = -1$ ist.

b) Da der Eigenwert $\lambda = -1$ algebraische Vielfachheit 2 jedoch geometrische Vielfachheit 1 hat, müssen wir zur Bestimmung der allgemeinen Lösung des Systems noch einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$ bestimmen. Das heisst wir suchen einen Vektor $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, der die folgende Gleichung erfüllt

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor.

Somit ist die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ &= C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t - 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Da der Eigenwert $\lambda = -1$ ist garantiert der Term e^{-t} dass alle Lösungen für $t \to +\infty$ gegen 0 konvergieren und somit beschränkt bleiben.

5. a) Eine Funktion ist streng monoton wachsend in x, wenn $f'(x) > 0$ und streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$.

Hier ist $f'(x) = \frac{-x+1}{x^2+x}$ und wir untersuchen, wann der Ausdruck

$$\frac{-x+1}{x^2+x}$$

negativ, resp. positiv ist. Da f für $x > 0$ definiert ist, ist $x^2 + x > 0$ und somit suche wir x, so dass

$$-x + 1 < 0, \quad \text{resp.} \quad -x + 1 > 0.$$

Dann ist $f'(x) < 0$, wenn $-x + 1 < 0$ also $1 < x$ und $f'(x) > 0$, wenn $-x + 1 > 0$ also $1 > x$. Daher ist f auf $(0, 1)$ streng monoton wachsend und auf $(1, +\infty)$ streng monoton fallend.

Bmkg: Insbesondere sieht man daraus, dass in $x = 1$ ein globales Maximum von f ist.

b) Das quadratische Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch

$$T^2_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Hier ist $x_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-1+1}{1+1} = 0 \\ f''(x) &= \frac{-1(x^2+x) - (-x+1)(2y+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2} \\ f''(1) &= \frac{1-2-1}{2^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$T^2_{f,1}(x) = 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2 = -\frac{1}{4}(x-1)^2.$$

c) Wir berechnen $f(x)$, wobei $f(1) = 0$. Partialbruchzerlegung von $f'(x)$ liefert

$$f'(x) = \frac{-x+1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + B}{x^2+x}$$

und somit $A = 1$ und $B = -2$.

Dann ist

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1}\right) dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + c$$

und aus $f(1) = 0$ folgt $f(1) = \ln|1| - 2\ln(2) = -\ln(4)$ und somit muss $c = \ln(4)$. Dann ist

$$f(x) = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|4|.$$

6. a) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 12x - 6x^2 - 6y = 6(2x - x^2 - y) \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y(x,y) &= 6y - 6x = 6(y - x) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = y$ und eingesetzt in die erste

$$12x - 6x^2 - 6x = 6x(1-x) = 0.$$

Somit sind $(0,0)$ und $(1,1)$ kritische Punkte.

b) Zur Klassifizierung berechnen wir die Hesse-Matrix von f. Es sind

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 12 - 12x \\ f_{yy}(x,y) &= 6 \\ f_{xy}(x,y) &= -6 \end{aligned}$$

und somit ist die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12-12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &\det H_f(0,0) = 72 - 36 = 36 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(0,0) = 12 > 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minimum} \\ &\det H_f(1,1) = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt.} \end{aligned}$$

Also ist $(0,0)$ ein lokales Minimum und $(1,1)$ ein Sattelpunkt der Funktion f.

c) Der Satz für implizite Funktionen besagt, dass f in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0) der Graph einer differenzierbaren Funktion $y = y(x)$ ist, dann ist

$$y'(x) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

und somit muss $f_y(x_0,y_0) \neq 0$. Wir berechnen

$$f_y(-1,-1) = -6 + 6 = 0$$

und somit kann f in der Nähe von $(-1,-1)$ kein Graph einer Funktion $y(x)$ sein.

7. a) In diesem Fall ist die Linearisierung der Funktion g im Punkt $P = (2,1,2)$ ist gegeben durch

$$L_{g,P}(x,y,z) = g(2,1,2) + \nabla g(2,1,2) \cdot (x-2, y-1, z-2)^T.$$

Wir berechnen

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ x \\ 2z-x \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \nabla g(2,1,2) = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$L_{g,P}(x,y,z) = (2+4-4) + (-1)(x-2) + 2(y-1) + 2(z-2) = -x + 2y + 2z - 2.$$

b) Die Richtungsableitung einer Funktion ist maximal in Richtung des Gradienten. Daher steigt eine Funktion am schnellsten in einem Punkt P in Richtung des Gradienten. Also fällt sie am schnellsten in die entgegengesetzte Richtung und somit in die Richtung des Vektors

$$\frac{-\nabla g(P)}{|\nabla g(P)|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}.$$

Dann ist der gesuchte Minimalwert die Richtungsableitung der Funktion in Richtung des negativ gerichteten Gradienten. Also für $-|\nabla g(P)| = -3$. In der Tat

$$\begin{aligned} D_{-\nabla g(P)} g(P) = \nabla g(P) \cdot \frac{-\nabla g(P)}{|\nabla g(P)|} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \\ &= (-1 - 4 - 4)\frac{1}{3} = -3. \end{aligned}$$

c) Wir verwenden Zylinderkoordinaten $\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ mit Volumenelement $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$.

Dann sind die Integralgrenzen

$$0 \le x^2 + y^2 = r^2 \le 4 = 2^2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{und} \quad -1 \le z \le 3.$$

Die Funktion g in Zylinderkoordinaten ist

$$r^2 \cos\varphi \sin\varphi + z^2 - r\cos\varphi \cdot z$$

und somit der Integralausdruck

$$\int_{-1}^{3} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \left[r^2 \cos\varphi \sin\varphi + z^2 - r\cos\varphi \cdot z\right] \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

8. **a)** Wir wollen das Integral $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n}\,dA = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\,dA$ berechnen. Wir verwenden den Satz von Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\,dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei C die positiv orientierte (da wir den Fluss nach oben berechnen wollen) Randkurve von S ist. Hier ist C der positiv orientierte Kreis mit Radius 2 und zum Niveau $z = \sqrt{5}$ (für $z = \sqrt{5}$ erhalten wir die Randkurve $x^2 + y^2 = 9 - z^2 = 9 - 5 = 4$). Wir parametrisieren die Randkurve als

$$C: \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < 2\pi \quad \text{wobei} \quad \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist das gesuchte Integral

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}\left(\gamma(t)\right) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (4+1) \cdot 2\sin t \\ -10\cos t + \sqrt{5} \\ 4\sin t \cos t \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-20\sin^2(t) - 20\cos^2(t) + 2\sqrt{5}\cos(t) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -20 \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) dt + 2\sqrt{5} \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -20\, dt + 0 = -40\pi.
\end{aligned}$$

<u>Alternativ:</u> Unter Verwendung des Satzes von Green (siehe Teilaufgabe (b)) können wir das Integral auch wie folgt berechnen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA,$$

wobei A die von C berandete Kreisscheibe bezeichnet, siehe (b) und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der nach oben gerichtete Normaleneinheitsvektor zur Kreisscheibe A ist. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA &= \iint_A \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_A \left(-5 - \left[(x^2 + y^2 + 1) + 2y^2 \right] \right) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-5 - \left[r^2 + 1 + 2r^2 \sin^2(\varphi) \right] \right) r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-5r - r^3 - r - 2r^3 \in^2 (\varphi) \right) dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-5\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2} - \frac{2r^4}{4} \sin^2(\varphi) \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-10 - 4 - 2 - 8\sin^2(\varphi) \right) d\varphi \\
&= \left[-16\varphi - 8 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\
&= -32\pi - 8\pi = -40\pi.
\end{aligned}
$$

b) Der nach unten gerichtete Fluss von $\vec{G}$ durch die Kreisscheibe A ist das Integral $\iint_A \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA = \iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, wobei $\vec{n}$ ein auf A orthogonal nach unten gerichteter Normalenvektor bezeichnet. Wir verwenden den Satz von Green und erhalten

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \oint_{\widetilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei $\widetilde{C}$ die negativ orientierte Randkurve der Kreisscheibe bezeichnet. Abgesehen von der Orientierung handelt es sich um dieselbe Randkurve wie in Teilaufgabe (a). Daher ist das gesuchte Integral

$$\oint_{\widetilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 40\pi$$

wobei das zweite Integral gleich minus dem Integral aus Teilaufgabe (a) ist.

c) Ein Rotationsfeld muss stets quellenfrei sein, daher ist

$$\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

9. **a)** Wir setzen den Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ in die Differentialgleichung ein

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \pi^2 X(x)Y(y).$$

Dann ist
$$X''(x)Y(y) = X(x)\left(\pi^2 Y(y) - Y''(y)\right)$$
und schliesslich
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\pi^2 Y(y) - Y''(y)}{Y(y)} =: k$$
für eine relle Zahl k, da beide Seiten unabhängig von x und y sein müssen. Das liefert das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen
$$\begin{aligned}&X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und}\\ &\pi^2 Y(y) - Y''(y) = kY(y) \quad \text{resp.} \quad Y''(y) - (\pi^2 - k)Y(y) = 0.\end{aligned}$$

b) Anhand der Randbedingungen sehen wir, dass die Lösung periodisch in x sein muss. Daher muss
$$X(x) = A_n \cos(\sqrt{-k}x) + B_n \sin(\sqrt{-k}x)$$
mit $k = -(n\pi)^2 < 0$. In der Tat
$$\begin{aligned}&X(0) = A_n \cos(0) = A_n \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \quad \text{und}\\ &X(1) = A_n \cos(\sqrt{-k}) + B_n \sin(\sqrt{-k}) = B_n \sin(\sqrt{-k}) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$
und daher muss $\sqrt{-k}$ ein ganzes Vielfaches von π sein.

Ausserdem haben wir oben gesehen, dass $A_n = 0$ für alle n, also ist $X(x)$ von der Form
$$X(x) = B_n \sin(n\pi x).$$

Für die Lösung der ODE für Y bemerken wir nun, dass
$$\pi^2 - k = \pi^2 + (n\pi)^2 > 0$$
und somit ist $Y''(y) = \pi^2(1+n^2)Y(y)$ und schliesslich die Lösung eine Linearkombination von Exponentialfunktionen und wegen $u(x,0) = 0$ genau eine Sinushyperbolicus-Funktion
$$Y(y) = C_n \sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right).$$

Bmkg: Für die genaue Ermittlung der Lösung berechnet man die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der ODE
$$\lambda^2 - \pi^2(1+n^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\pi^2(1+n^2)} = \pm\pi\sqrt{1+n^2}$$
und somit ist die Lösung $Y(y) = \widetilde{C}_n e^{\pi\sqrt{1+n^2}y} + \widetilde{D}_n e^{-\pi\sqrt{1+n^2}y}$. Nun folgt aus der Randbedingung $u(x,0) = 0$, dass $Y(0) = 0$ und somit
$$0 = \widetilde{C}_n + \widetilde{D}_n \quad \Rightarrow \quad \widetilde{C}_n = -\widetilde{D}_n.$$

Dann ist

$$Y(y) = \widetilde{C}_n e^{\pi\sqrt{1+n^2}y} - \widetilde{C}_n e^{-\pi\sqrt{1+n^2}y} = 2\widetilde{C}_n \sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right)$$
$$= C_n \sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right).$$

Schliesslich ist eine Folge von Basislösungen gegeben durch

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin(n\pi x)\sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right)$$
$$= \sin(n\pi x)\sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right).$$

c) Eine Lösung ist nun gegeben durch die Superposition von Basislösungen

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 0} E_n \sin(n\pi x)\sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}y\right).$$

Die Sinus-Reihe von $f(x)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_f(x) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin((2k+1)\pi x).$$

Da wir die Randbedingung $u(x,1) = f(x)$ haben, können wir die Koeffizienten E_n aus den Fourierkoeffizienten von f bestimmen.

Es ist

$$u(x,1) = \sum_{n\geq 0} E_n \sin(n\pi x)\sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right).$$

Dann ist für $n = 2k+1$

$$E_n \sinh\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = -\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

und schliesslich

$$E_{2k+1} = -\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\sinh\left(\pi\sqrt{1+(2k+1)^2}\right)}$$

und für die restlichen n ist $E_n = 0$.

Also ist

$$u(x,y) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\sinh\left(\pi\sqrt{1+(2k+1)^2}\right)}\right.$$
$$\left.\sin((2k+1)\pi x)\sinh\left(\pi\sqrt{1+(2k+1)^2}y\right)\right].$$

10. **a)** Dieses Anfangswertproblem hat inhomogene Randbedingungen. Daher müssen wir zuerst eine spezielle Lösung finden, so dass wir dieses Anfangswertproblem in ein System mit homogenen (trivialen) Randbedingungen überführen können. Aufgrund der Differentialgleichung und der Randbedingung bietet sich ein Ansatz einer zeitunabhängigen linearen Lösung an. Dann ist

$$u(x,t) = v(x,t) + u^*(x), \quad \text{mit} \quad u^*(x) = Ax + B.$$

Aus den Randbedingungen $u(0,t) = 0$ und $u(\pi,t) = \pi$ erhalten wir

$$u^*(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \text{und} \quad u^*(\pi) = \pi \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

und somit ist $u^*(x) = x$. Nun hat das System für $v(x,t)$ triviale Randbedingungen

$$v(0,t) = u(0,t) - u^*(0) = 0, \quad v(\pi,t) = u(\pi,t) - u^*(\pi) = \pi - \pi = 0.$$

Nun ermitteln wir das neue Anfangswertproblem. Da $u^*(x)$ zeitunabhängig und linear ist, bleibt die Differentialgleichung für $v(x,t)$ unverändert. Die neuen Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - u^*(x) = x - x = 0 \\ v_t(x,0) &= 12\sin(2x). \end{aligned}$$

Dann ist das neue Anfangswertproblem, für $v(x,t)$, die Wellengleichung mit trivialen Randbedingungen

$$\begin{cases} v_{tt} = 9v_{xx} \\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 12\sin(2x). \end{cases}$$

Für die Lösung dieses Systems nehmen wir die Basislösungen aus der Vorlesung. Dann ist

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(C_n\cos(\lambda_n t) + D_n\sin(\lambda_n t)\right),$$

mit $L = \pi$, $c = 3$ und $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L} = 3n$, also

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} \sin(nx)\left(C_n\cos(3nt) + D_n\sin(3nt)\right).$$

Aus $v(x,0) = 0$ folgt

$$v(x,0) = \sum_{n\geq 1} \sin(nx)C_n = 0$$

und somit muss $C_n = 0$ für alle n. Aus der Bedingung $v_t(x,0) = 12\sin(2x)$ folgt

$$v_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} \sin(nx)\,(3n \cdot D_n) \stackrel{!}{=} 12\sin(2x)$$

und somit muss $3n \cdot D_n = 12$ für $n = 2$ also $D_2 = 2$ und für alle anderen n ist $D_n = 0$. Dann ist

$$v(x,t) = 2\sin(2x)\sin(6t)$$

und schliesslich

$$u(x,t) = v(x,t) + u^*(x) = 2\sin(2x)\sin(6t) + x.$$

b) Das Fourier-Integral von f ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_f(x) = \int_0^{+\infty} \left(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\right)\,dw,$$

wobei

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos(wv)\,dv \quad \text{und} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin(wv)\,dv.$$

Wir berechnen mittel partieller Integration

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{\downarrow}{v} \cdot \cos\underset{\uparrow}{(wv)}\,dv = \frac{1}{\pi}\left[v\frac{\sin(wv)}{w}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(wv)}{w}\,dv \\ &= \frac{\sin(\pi w)}{w} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(wv)}{w^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin(\pi w)}{w} + \frac{1}{\pi w^2}\left(\cos(\pi w) - 1\right). \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten $B(w)$ berechnen wir analog

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{\downarrow}{v}\sin\underset{\uparrow}{(wv)}\,dw = \left[-v\frac{\cos(wv)}{w}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(wv)}{w}\,dw \\ &= -\frac{\cos(\pi w)}{w} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(wv)}{w^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(\pi w)}{w} + \frac{\sin(\pi w)}{\pi w^2}. \end{aligned}$$

Das Fourierintegral von f ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f(x) = \int_0^{+\infty} \bigg[&\left(\frac{\sin(\pi w)}{w} + \frac{1}{\pi w^2}\left(\cos(\pi w) - 1\right)\right)\cos(wx) \\ &+ \left(-\frac{\cos(\pi w)}{w} + \frac{\sin(\pi w)}{\pi w^2}\right)\sin(wx)\bigg]\,dw. \end{aligned}$$

c) Für die unendliche 1-dimensonale Welle haben wir als Basislösungen

$$\begin{aligned} &\cos(px)\cos(pct), \quad \sin(px)\cos(pct), \\ &\cos(px)\sin(pct), \quad \sin(px)\sin(pct), \quad \text{für} \quad p \geq 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Anfangsbedingung $u_t(x, 0) = 0$ und somit fallen jene Basislösungen mit $\sin(pct)$ weg, da

$$\frac{d}{dt}\sin(pct) = pc\cos(pct)$$

und an der Stelle 0 ausgewertet, verschwindet dieser Term nie für alle p ($c \neq 0$). Im Gegensatz dazu verschwindet der Term $\frac{d}{dt}\cos(pct) = -pc\sin(pct)$ ausgewertet an der Stelle 0.

Somit ist die Lösung der unendlichen Welle von der Form

$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))\cos(pct)\, dp$$

mit $c = 3$.

Nun wollen wir die Koeffizienten mittels Vergleichen der Fourierkoeffizienten-Funktionen von f ermitteln, mit $u(x, 0) = f(x)$. Dann ist

$$u(x, 0) = \int_0^\infty (A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))\, dp = \mathcal{F}_f(x).$$

Dann stimmen die Koeffizienten-Funktionen der beiden Integrale überein.

Schliesslich ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_0^\infty \Bigg[&\left(\frac{\sin(\pi p)}{p} + \frac{1}{\pi p^2}(\cos(\pi p) - 1) \right)\cos(px) \\ &+ \left(-\frac{\cos(\pi p)}{p} + \frac{\sin(\pi p)}{\pi p^2} \right)\sin(px) \Bigg] \cos(3pt)\, dp. \end{aligned}$$

11. 11.1 Die korrekte Antwort ist (c).

Diese Kurven sind nicht geschlossen. Falls zwei Parametrisierungen dieselbe Kurve beschreiben, müssen diese somit auch dieselben Anfangs- und Endpunkte haben. Man sieht leicht, dass die Kurven in (a), (b) und (d) jeweils von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ verlaufen jedoch die Kurve in (c) von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Man kann überprüfen, dass die Parametrisierungen in (a), (b) und (d) die Parabel

$$x = \left(\frac{y}{3} - 1 \right)^2$$

zwischen $(0,3)$ und $(1,6)$ parametrisieren während die Kurve in (c) die Parabel

$$x = \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right)^2$$

zwischen $(0,1)$ und $(1,4)$ parametrisiert.

11.2 Die korrekte Antwort ist (b).
Die Gleichung $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ ist für festgehaltenes y

$$x^2 + z^2 = 1 + y^2$$

also ein Kreis in der xz-Ebene mit Radius $\sqrt{1+y^2}$. Somit kommt nur (b) in Frage.

11.3 Die korrekte Antwort ist (d).
Der natürliche Logarithmus ist nur für positive Parameter definiert. Daher muss

$$1 + \frac{y}{x^2+4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > -\frac{y}{x^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4 > -y$$

wobei wir $x^2 + 4 > 0$ verwendet haben und somit muss $y > -x^2 - 4$ gelten.

11.4 Die korrekte Antwort ist (a).
Man berechnet

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \sqrt{y+z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x,y,z) &= -\frac{1}{4}\frac{1}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

11.5 Die korrekte Antwort ist (a).
Wir ermitteln die Schnittstellen. $x^2 - x = x(x-1) = 0$. Dann ist die Fläche des eingeschlossenen Gebietes

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

11.6 Die korrekte Antwort is (c).

Die Integralgrenzen sind

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x \quad \text{und} \quad 0 \le z \le 2-2x-2y.$$

Das Volumen des gegebenen Körpers

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} dz\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-2x-2y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - 2xy - y^2\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 (2(1-x) - 2x(1-x) - (1-x)^2)\,dx \\
&= \int_0^1 (1-2x+x^2)\,dx = \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

11.7 Die korrekte Antwort ist (b).

Mittels Kugelkoordinaten erhalten wir $x^2+y^2+z^2 = R^2 \ge 2$ also $R \ge \sqrt{2}$ und

$$R^2\cos^2\varphi = z^2 = x^2+y^2 = R^2\sin^2\varphi.$$

Also muss $\cos\varphi = \pm\sin\varphi$. Das ist für $0 \le \varphi \le \pi$ genau der Fall für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$, wobei der Wert $-\frac{\pi}{4}$ einem positiven Winkel von $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ entspricht.

11.8 Die korrekte Antwort ist (c).

Hier ist $r(t) = (t, e^t)$ und $\dot{r}(t) = (1, e^t)$ mit Dichtefunktion f. Dann ist die Masse des Filamentes gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int_C f(r(t))|\dot{r}(t)|\,dt &= \int_0^1 f(t,e^t)\sqrt{1+e^{2t}}\,dt = \int_0^1 3e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt \\
&= \left[\left(1+e^{2t}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(\left[\left(1+e^{2t}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = (1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \\
&= (1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Hinweis: Für die Masse eines Filamentes gegeben durch eine Funktion $y = g(x)$ von x_0 nach x_1 mit Dichtefunktion $\varrho(x,y)$ kann man auch direkt die folgende Form verwenden

$$\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x, g(x)) \cdot \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx.$$

Dann kann man auch direkt das Integral

$$\int_0^1 f(x, e^x)\sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

berechnen.

11.9 Die korrekte Antwort ist (d).

Wir verwenden den Satz von Gauss, wobei $\operatorname{div} \vec{F} = 3$ und erhalten

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 3 \iiint_K dV$$

also dreimal das Volumen der Einheitskugel.

11.10 Die korrekte Antwort ist (a).

$\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld, falls das Wegintegral entlang jeder geschlossenen Kurve verschwindet. Insbesondere gilt, falls die Rotation von $\vec{F}$ 0 ist, so ist $\vec{F}$ auf jedem wegzusammenhängenden Gebiet ein Gradientenfeld (das folgt direkt aus dem Satz von Green). Hier ist jedoch $\vec{F}$ für alle $(x, y) \neq 0$ definiert. Insbesondere gibt es eine nicht-triviale Wegzusammenhangskomponente und wir müssen auch die Zirkulation von $\vec{F}$ für eine Kurve um den Ursprung betrachten. Wir wissen bereits, dass die Zirkulation von $\vec{F}$ entlang des Einheitskreises C verchwindet. Insbesondere folgt daraus, dass die Zirkulation entlang jedes geschlossenen Weges um den Usprung verschwindet und somit is $\vec{F}$ in der Tat ein Gradientenfeld für alle $(x, y) \neq 0$.

<u>Bmkg:</u> Sei $\widetilde{C}$ eine andere Kurve um den Ursprung. Insbesondere beranden C und $\widetilde{C}$ ein Gebiet R. Dann folgt mit dem Satz von Green

$$\oint_{\widetilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0,$$

da $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Also gilt $\oint_{\widetilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.